УДК 511.8

Уравнения произвольного порядка с оператором Коши–Римана и сингулярной линией на плоскости

С. М. Мухсинова*, А. Б. Расулов

Показано интегральное представление решения для уравнения произвольного порядка с оператором Коши–Римана и сингулярной линией на плоскости. Изучено влияние сингулярной линии на разрешимость краевых задач и выполнена корректная постановка граничной задачи типа Римана–Гильберта.

Ключевые слова: оператор Коши–Римана, интегральные представления, сингулярная линия.

Пусть $S^+ = \{(x, y): y > 0, -\infty < x < \infty\}$, $L = \setminus\{(x, y): y = 0, -\infty < x < \infty\}$. В области $S_\varepsilon^+ = \{(x, y): y > \varepsilon, -\infty < x < \infty\}$ рассмотрим уравнения высшего порядка коэффициенты которых имеют сингулярную особенности на линии $L = \{(x, y): y = 0, -\infty < x < \infty\}$:

$$\prod_{j=1}^{k}\Big(\partial_{\overline{z}} - \frac{(z-\overline{z})a_j(z)}{|z-\overline{z}|^2}\Big)U = f(z), k = 1, 2, ...m; \qquad (1)$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$ — оператор Коши-Римана; $a_j(z) \in C^{j-1}(\overline{S^+}), j = \overline{1, m}, U(z),\ F(z) \in L^{p,2}(S^+), p > 2$ — искомая и заданные функции.

Под обобщенным решением уравнения (1) здесь понимается ограниченная на бесконечности функция $U \in D^{m,p}(S^+)$ имеющих $m - 1$ производную по $\overline{z}$ в обычном смысле и обобщенную производную порядка m по $\overline{z}$ принадлежащих классу $L^{p,2}(S_\varepsilon^+)$ для любого $\varepsilon > 0$, где $S_\varepsilon^+ = S^+ \cap \{|Imz| > \varepsilon\}$ и ограниченных при $Imz \to 0$ и $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ по любым направлениям.

В дальнейшем для компактного изложения материала введем следующие обозначения [1 — 6]:

$$L_j \equiv \frac{\partial}{\partial\overline{z}} - \frac{(z-\overline{z})a_j(z)}{|z-\overline{z}|^2};$$
$$(Ta_j)(z) \equiv -\frac{1}{\pi}\int_G \frac{(a_j(\zeta) - a_j^0(\zeta))d\xi d\eta}{|\zeta-\overline{\zeta}|^n(\zeta - z)}; j = 1, 2, .., m. \qquad (2)$$

В случае $m = 1$ имеет место

Теорема 1. *Пусть в обозначениях (2) существует такая аналитическая в области S^+ функция a_1^0, что*

$$\mathrm{Re}a_1^0(z) < 0 \ \ \text{и}\ a_1^0 = o(|z|^{-\varepsilon_1}), \varepsilon_1 > 1, \mathrm{Imz} \neq 0, |z| \to \infty,$$

$$A_0(z) = \frac{(z-\overline{z})[a_1(z) - a_1^0(z)]}{|z-\overline{z}|^2} \in L_{p,2}(S^+),\ p > 2.$$

Кроме того,

$$|a_1(z) - a_1^0(z)| < H_1|z|^{\beta_1}, \beta_1 > 1, |z| \to \infty;$$
$$|z-\overline{z}|^{a_1^0 - 1}\ f(z) \in L_{p,2}(S^+),\ p > 2.$$

Произвольная аналитическая в области S^+ функция $\phi_1(z) \in C(S^+)$ и $\phi_1(z) = o(|z|^{-2})$, при $|z| \to \infty$ по любым направлениям.

Тогда функция

$$U(z) = |z-\overline{z}|^{-a_1^0}\ e^{(TA_0)(z)} \times$$
$$\times\left\{\phi_1(z) - \frac{1}{\pi}\int_{S^+}\frac{|\zeta-\overline{\zeta}|^{a_1^0(\zeta)}\ e^{(TA_0)(\zeta)}f(\zeta)}{(\zeta - z)}d_2\zeta\right\}$$

описывает общее решение уравнения (1) в этой подобласти из класса $D^1(S^+)\bigcap C(\overline{S^+})$.

В случае $m = 3$ имеет место

Теорема 2. *Пусть в уравнении (1) $a_j(z) \in C^2(S^+)$, $j = 1, 2, 3$ и ограниченные в $\overline{S^+}$, и в окрестности ∂S^+ удовлетворяют условиям:*

* mirzodaler@gmail.com

$$1)\ a_j(z) - a_j^0(z) = O(1)\,|z - \bar{z}|^{\gamma_j}, \gamma_j > n, 1 \le j \le 3. \quad (3)$$

Кроме того, функции $a_j(z)$, $1 \le j \le 3$ *таковы, что выполняются условия:*

$$2)\ a_j(z) - a_j^0(z) = O(1)\,|\bar{z} - z|^{\gamma_j}, \gamma_j > 0, y \to 0, 1 \le j \le 3; \quad (4)$$

$$\mathrm{Re}\,a_1^0 > \mathrm{Re}\,a_2^0 > \mathrm{Re}\,a_3^0 > 0, y \to 0; \quad (5)$$

$$a_j(z) = o(|z|^{\varepsilon_j});\ \varepsilon_j > 1;\ y \ne 0;\ |z| \to \infty;\ 1 \le j \le 3; \quad (6)$$

$$|\bar{z} - z|^{a_3 - 3} f(z) \in L^{p,2}(S^+),\ p > 2, \quad (7)$$

Тогда и для любых функций

$$\phi_j(z) \in C(S^+ \bigcup \partial S^+), \phi_j(z) = o(r^{-2}), r \to \infty, 1 \le j \le 3$$

аналитических в области S^+ *формула*

$$U(z) = |\bar{z} - z|^{a_1}\, e^{(T(a_1))(z)} \left(\phi_1(z) + \left(T\left(|\bar{z} - z|^{\beta}\, e^{(T(q_\beta))(\zeta)} \phi_2(\zeta)\right)\right)\right)(z) -$$
$$-\left(T\left((K_{a_1}(\zeta) - K_{a_1}(z))\,|\bar{z} - z|^{a_1^0(\zeta_1) - a_3^0(\zeta_1)}\, e^{-(T(q_{a_1 - a_3}))(\zeta)} \Phi_3(\zeta)\right)\right)(z) +$$
$$+\left(T\left((K_{a_1, a_2 - a_3}(t) - K_{a_1, a_2 - a_3}(z))\,|\bar{t} - t|^{a_3^0(t) - 3}\, e^{-(T(q_{a_3}))(\zeta)} f(\zeta)\right)\right)(z)$$

определяет решение уравнения (1) из класса

$$D^3(S^+) \bigcap C(S^+),$$

где

$$K_{a_1}(t) = T(|\zeta - \bar{\zeta}|^{a_1^0}\, e^{T_{a_1}})(t), \beta = a_1 - a_2;$$
$$K_{a_1, a_2 - a_3}(z) = T((K_{a_1}(t) - K_{a_1}(z)) \times$$
$$\times |\zeta - \bar{\zeta}|^{a_2^0 - a_1^0}\, e^{T_{a_2 - a_3}(\zeta)})(z).$$

В работе найдено интегральное представление решений уравнения (1). В случае $m = 3$ исследована следующая задача.

Задача типа Гильберта– Шмидта

Требуется найти решение $U(z) \in D^{3,p}(S^+)$ уравнения (1) по краевому условию

$$\mathrm{Re}[\lambda_1 |z - \bar{z}|^{-a_1^0} U]_{\partial S^+} = g_1(t);$$
$$\mathrm{Re}[\lambda_2 |z - \bar{z}|^{-a_2^0} L_1 U]_{\partial S^+} = g_2(t);\ (G)$$
$$\mathrm{Re}[\lambda_3 |z - \bar{z}|^{-a_3^0} L_2 L_1 U]_{\partial S^+} = g_3(t),$$

где функция $\lambda_j(t) = \alpha_j(t) + i\beta_j(t) \in H(\partial S^+)$, причем

$$\lambda_j(t) \ne 0, t \in \partial S^+, g_j(t) = o(|t|^{-h_j}), h_j > 0, j = 1, 2, 3.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2 и задачи* (G).

Если $\kappa_k \ge 0$, $k = 1, 2, 3$, *то задача* (*1*) — (G) *для полуплоскости, безусловно разрешима и ее решение содержит* $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 3$ *произвольных постоянных.*

Если $\kappa_k \ge 0$, $\kappa_j \le -2, k, j = 1, 2, 3;\ k \ne j$, *то для разрешимости задачи* (*1*) — (G) *необходимо и достаточно выполнения* $|\kappa_j| - 2$ *условий разрешимости.*

Аналогичные результаты получены также для других значений m.

Литература

1. **Векуа И.Н.** Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
2. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. **Раджабов Н.** Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных сосверхсингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992,
4. **Раджабов. Н.Р . Мухсинова С.М.** Интегральные представления и их формула обращения для линейной эллиптической системы третьего порядка с сингулярной линией в полуплоскости // ДАН Таджикистан. 2006. Т. 49. № 1. С. 5 — 8.
5. **Солдатов А.П.** Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости // Известия РАН. 2006. Т. 70. № 6. С. 161 — 192.
6. **Расулов А.Б., Мухсинова С.М.** Задача типа Римана–Гильберта для линейной эллиптической системы третьего порядка с сингулярной линией в полуплоскости // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 4. С. 561 — 563.

Статья поступила в редакцию 23.10.2015