

УДК 624.04

Аналитическое моделирование нагружения балочной фермы регулярного типа

М.Н. Кирсанов

Сведения об авторе

Кирсанов Михаил Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники НИУ «МЭИ», e-mail: mpei2004@yandex.ru

Предложена схема статически определимой плоской фермы со сложной решеткой. Конструкция фермы включает две опоры: подвижный и неподвижный шарниры. Рассмотрено нагружение верхнего пояса фермы равномерной нагрузкой. Предполагается, что жесткости стержней поясов и решетки разные. Введен безразмерный параметр перераспределения жесткостей. Поставлена и решена задача определения прогиба фермы в зависимости от размеров фермы, нагрузки и числа панелей. В отличие от стандартных балочных ферм с параллельными поясами и решетками треугольного типа в исследуемой ферме невозможен расчет усилия в отдельном стержне или группе стержней независимо от других. В любом случае расчет усилий требует анализа системы уравнений равновесия всех узлов. Это вызывает особенные трудности при расчете ферм с большим числом панелей, где численные методы неэффективны в связи с известным «проклятием размерности», приводящим к накоплению погрешности вычислений. Для преодоления возникающих проблем предложено использовать метод индукции с привлечением системы компьютерной математики Maple. Прогиб определяли по формуле Максвелла – Мора в предположении упругой работы стержней. В результате анализа последовательности решений для 16 ферм с различным числом панелей была выведена общая формула для прогиба. Для решения привлекались операторы `rgf_findrecur` и `rsolve` из пакета рекуррентных уравнений `genfunc` системы Maple. Отмечены некоторые ее особенности. Обнаружен минимум на кривой зависимости прогиба от высоты фермы. Показано, что существует критическое значение высоты фермы, ниже которой перераспределение жесткостей поясов в пользу нижнего приводит к уменьшению прогиба, а выше — к увеличению. Найдена предельная характеристика зависимости прогиба от числа панелей, согласно которой рост прогиба имеет кубический характер. Из анализа полученного решения следует также, что при определенных сочетаниях размеров фермы независимо от нагрузки и числа панелей определитель системы линейных уравнений обращается в нуль.

Ключевые слова: ферма, прогиб, аналитическое моделирование, индукция, перераспределение жесткостей.

Analytical modeling of regular-type truss loading conditions

M.N. Kirsanov

Information about author

Kirsanov Mikhail N. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of theoretical mechanics and mechatronics dept., MPEI, e-mail: mpei2004@yandex.ru

The scheme of a statically determinate flat truss with a complex lattice is suggested. The truss structure includes two supports: one with a movable hinge and the other with a fixed hinge. The truss upper belt's uniform loading conditions are considered. It is assumed that the rods used in the belts and lattice have different stiffness. A dimensionless stiffness redistribution parameter is introduced. The problem of determining the truss deflection as a function of truss size, load, and number of panels is stated and solved. Unlike standard girders with parallel belts and triangular-type lattices, the considered truss structure does not allow forces arising in a single rod or in a group of rods to be calculated independently of the forces arising in the other rods or their groups. The system of equilibrium equations for all nodes shall in any case be analyzed in order to calculate the forces in the system. As a result, serious difficulties are encountered in calculating trusses containing a large number of panels, where numerical methods are inefficient in connection with the well-known «curse of dimensionality»,

which leads to accumulation of computational errors. To overcome the encountered problems, it is proposed to use the induction method with engaging the Maple computer algebra system. The deflection was determined using the Maxwell–Mohr formula under the assumption of elastic rod behavior. The sequence of solutions obtained for 16 trusses having different numbers of panels was analyzed, and a general formula for calculating the deflection was derived based on the analysis results. For solving the problem, the operators `rgf_fndrecur` and `rsolve` from the `genfunc` package of recurrent equations available in the Maple system were involved. Some specific features of the solution are noted. Thus, a minimum in the deflection versus the height truss curve is revealed. It is also shown that there exists a critical truss height value below which the redistribution of belt stiffness values in favor of the lower one causes the deflection to decrease and vice versa. The limiting characteristic of the “deflection versus the number of panels” dependence is found, according to which the deflection grows as a cubic function of the number of panels. It also follows from the analysis of the obtained solution that at certain combinations of truss sizes, the determinant of the system of linear equations becomes zero irrespective of the load and number of panels.

Key words: truss, deflection, analytical modeling, induction, redistribution of stiffness values.

Введение

Аналитические решения в механике имеют значение как тестовые для сложных численных методов и как простые оценки, где реальный объект с множеством свойств и характеристик заменяется на простую модель, отражающую основные черты своего прообраза. Известны некоторые точные решения для упругих статически определимых плоских [1–5] и пространственных ферм [6, 7], полученных методом индукции с использованием системы компьютерной математики Maple [8–10]. В настоящей работе предлагается схема балочной фермы и расчет ее прогиба для произвольного числа панелей. Особенность конструкции и возникающей при этом задачи — невозможность получения усилий в отдельных стержнях простыми, принятыми в таких задачах способами (методом вырезания узлов, или методом Риттера). Конфигурация решетки фермы такова, что для решения этой задачи расчетчик вынужден составлять полную систему уравнений равновесия всех узлов фермы. Для значительного числа панелей это приводит к несоразмерно большим потерям в точности и времени счета, если вычисления проводятся численно. В символьной форме время преобразований значительно больше, чем в численной форме, и время это быстро растет с увеличением числа стержней, так что уже для ферм с десятью и более панелями результат практически недостижим. Остается единственный метод получения решения — метод индукции, как раз и предназначенный для регулярных конструкций.

Вторая особенность предлагаемой конструкции — ее нестандартная архитектурная выразительность, выгодно отличающая эту ферму от более простых в конструкции и расчете известных и хорошо изученных балочных ферм. Число и разнообразие схем статически определимых ферм ограничено. Не случайно поиск новых схем таких конструкций в [11] назван «охотой».

Постановка задачи

Рассмотрим конструкцию фермы на рис. 1. Верхний и нижний пояса представляют собой ломаные линии, а ячейкой периодичности фермы — панелью (на рис. 1 первая панель выделена утолщением) — является шестиугольник. В отличие от известных ферм, в которых конструкция строится по принципу присоедине-

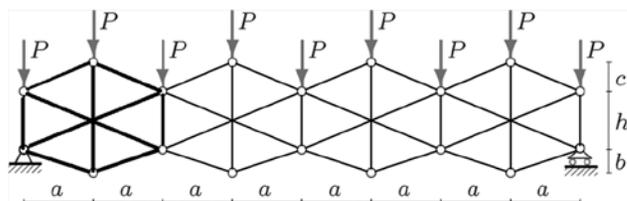


Рис. 1. Конструкция фермы, $n = 2, k = 4$

ния каждого следующего узла двумя стержнями к уже готовой части, и всегда имеются жесткие стержневые треугольники, в данной ферме таких треугольников нет. Однако ферма статически определима. Для фермы с числом панелей n число стержней, включая три опорных, равно $n_s = 8n + 4$, число шарниров — $m = 4n + 5$. Вырезая все узлы (равновесия трех опорных узлов не рассматриваются), можно получить необходимые для определения всех усилий уравнения.

Расчет усилий выполняется по алгоритму и программе [8], составленной на языке системы компьютерной математики Maple. Будем рассматривать фермы с четным числом панелей $n = 2k$. Это дает возможность однозначно выбрать среднюю точку на ферме, смещение которой будем ассоциировать с прогибом фермы. Для задания схемы конструкции необходимо ввести в программу координаты шарниров и порядок соединения стержней. Пронумеруем шарниры фермы (нижний пояс слева направо, затем верхний пояс). Выбирая начало координат в левой неподвижной шарнирной опоре, зададим положения шарниров:

$$x_i = x_{i+2n+1} = (i-1)a, \quad y_i = -((-1)^i + 1)b/2; \\ y_{i+2n+1} = h + ((-1)^i + 1)c/2, \quad i = 1, \dots, 2n+1.$$

Координаты опорных узлов:

$$x_{m-2} = -2; \quad y_{m-2} = 0; \quad x_{m-1} = x_1; \quad y_{m-1} = -1; \quad x_m = x_{2n+1}; \quad y_m = -1.$$

Конфигурацию стержней решетки фермы определим условными векторами $\vec{V}_i, i = 1, \dots, n_s$. Координаты этих векторов задают номера шарниров по концам стержня. Выбор начала и конца векторов произволен и не связан со знаками усилий в стержнях. Для стержней нижнего пояса имеем следующие векторы:

$$\vec{V}_i = [i, i+1], \quad i = 1, \dots, 2n;$$

верхнего пояса:

$$\bar{V}_{i+2n} = [i + 1 + 2n, i + 2 + 2n], i = 1, \dots, 2n;$$

раскосы решетки:

$$\bar{V}_{i+4n} = [2i - 1, 2i + 2n + 1];$$

$$\bar{V}_{i+5n-2} = [2i + 1, 2i + 2n], i = 1, \dots, n;$$

стойки решетки:

$$\bar{V}_{i+6n} = [2i, 2i + 2n + 1], i = 1, \dots, n;$$

$$\bar{V}_{i+7n} = [2i - 1, 2i + 2n], i = 1, \dots, n + 1.$$

В уравнения равновесия узлов фермы входят направляющие косинусы, вычисленные через длины стержней и проекции их векторных представлений на оси координат:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}; \quad l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}};$$

$$l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, n_s.$$

Первый индекс в номере $V_{j,i}$ означает номер компоненты вектора \bar{V}_i (номер начала или конца стержня), второй — номер стержня. Матрица направляющих косинусов \mathbf{G} имеет следующие элементы:

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i; \quad k = 2V_{i,2} - 2 + j; \quad k \leq n_s; \quad j = 1, 2; \quad i = 1, \dots, n_s;$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i; \quad k = 2V_{i,1} - 2 + j; \quad k \leq n_s; \quad j = 1, 2; \quad i = 1, \dots, n_s.$$

Полученную систему линейных уравнений равновесия запишем в матричной форме

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{B}}.$$

Здесь $\bar{\mathbf{S}}$ — вектор усилий в стержнях, включая три опорных; $\bar{\mathbf{B}}$ — вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i , записываются в нечетные элементы B_{2i-1} , вертикальные — в четные B_{2i} . Решение системы линейных уравнений находим с помощью обратной матрицы $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{G}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$.

Решение

Вычисление усилий по описанному алгоритму при различном числе панелей сразу выявило одну особенность: для нечетного числа панелей n при $b = c$ определитель системы уравнений равновесия оказывается равным нулю [8, с. 38]. Объяснение этому эффекту оказалось простым. Фермы с обозначенным свойством геометрически изменяемы. Для $n = 1$ можно привести допустимую картину распределения скоростей узлов (рис. 2). Неподвижными остаются узлы 1 и 6, стержни 1-4, 1-2 и 5-6 совершают мгновенно вращательное движение, стержень 2-3 — плоское, стержни 4-3 и 5-2 — мгновенно поступательное. Скорости узлов 4 и 3, 2 и 5 попарно равны. Очевидно выполняется и теорема о проекциях скоростей: $u' = u \cos \alpha = v' = v \cos(\pi/2 - 2\alpha) = v \sin \alpha$, где $\text{tg} \alpha = h/(2a)$. Равенство $b = c$ обеспечивает

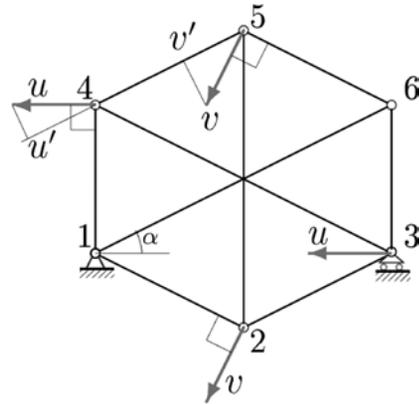


Рис. 2. Виртуальные скорости узлов, $n = 1$

параллельность стержней 5-6 и 1-2 и 4-5 и 2-3, откуда и вытекают эти соотношения.

Прогиб

Прогиб центрального узла нижнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n_s-3} \frac{S_k s_k l_k}{EF_k}.$$

Здесь S_k — усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки; s_k — усилия от единичной нагрузки, приложенной к центральному узлу в середине пролета; l_k — длины стержней. Материал стержней предполагается одинаковым, для всех стержней модуль упругости равен E . Площадь сечения стержней нижнего пояса принята $F_1 = F_0/\gamma_1$, верхнего пояса — $F_2 = F_0/\gamma_2$, стержней (наклонных и вертикальных) решетки — $F_3 = F_0/\gamma_3$, где F_0 — площадь некоторого условного сечения.

Прогиб представим в виде суммы, выделив отдельно сумму для стержней нижнего Δ_1 , верхнего Δ_2 поясов и стержней решетки Δ_3 :

$$\Delta EF = P(\gamma_1 \Delta_1 + \gamma_2 \Delta_2 + \gamma_3 \Delta_3)/(b - c)^2,$$

где

$$\Delta_1 = 2C_1 c^2 g^3 / h^2;$$

$$\Delta_2 = 2b(C_2 b + C_3 c) d^3 / h^2;$$

$$\Delta_3 = (C_4 d^3 c^2 + C_5 d^3 c b + C_6 d^3 b^2 + C_7 c^3 b^2 + C_1 b^3 c^2 + C_8 c^4 b + C_9 c^5) c^2.$$

Коэффициенты $C_k, k = 1, \dots, 9$, получены при $h = 2c$ индуктивным методом при обработке последовательности решений 16 ферм:

$$C_1 = 2k^2(10k^2 - 7)/3; \quad C_2 = 4k^2(5k^2 - 2)/3;$$

$$C_3 = -2k^2; \quad C_4 = C_2/4; \quad C_5 = k^2(10k^2 - 13)/3;$$

$$C_6 = k^2(5k^2 + 1)/3; \quad C_7 = 50k^2(k^2 - 1) + 8(2k + 1);$$

$$C_8 = 4(5k^4 - 7k^2 + 1); \quad C_9 = 2k^2(5k^2 - 8)/3.$$

Заметим, что полученное решение оказалось существенно сложнее аналогичных решений, полученных также индуктивным методом для более простых ферм (балочных, арочных и пространственных), где число коэффициентов редко превышало три.

Изменение прогиба в зависимости от размеров фермы и числа панелей отражено на рис. 3. Кривые безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF_0/P_s$ построены при фиксированной длине пролета $L = 2an = 10$ м, заданной суммарной нагрузке $P_s = (2n + 1)P$, $b = 1$ м и одинаковых сечениях стержней $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$, размер c на рисунке указан в метрах. Отметим пересечение кривых, свидетельствующее о возможности выбрать подходящие размеры при одинаковых прогибах фермы.

Любопытную особенность полученного решения можно заметить, если построить зависимость прогиба от высоты фермы при различных комбинациях площадей сечений нижнего и верхнего поясов (рис. 4). Введем параметр λ перераспределения площади сечений: $\gamma_1 = 2\lambda$; $\gamma_2 = 2(1 - \lambda)$. Таким образом, при $\lambda = 1/2$ площади сечений поясов одинаковые, при увеличении λ от 0 до 1 жесткость нижнего пояса увеличивается, а верхнего уменьшается до нуля. Очевидно, крайние значения этого интервала рассматривать не имеет практического смысла. Для стержней решетки принято $\gamma_3 = 1$. Кривые на рис. 4 построены при $L = 2an = 10$ м, $c = 0,2$ м. Три верхние кривые соответствуют $k = 7$, нижние — $k = 6$. Одна особенность этого решения — наличие минимума прогиба при определенной высоте фермы предсказуема и была замечена в аналогичных решениях для ферм [4]. Другая особенность несколько неожиданна. Пересечения кривых, соответствующих различным λ , указывают на устойчивую закономерность в решении: при одной и той же высоте фермы возможно различное распределение жесткостей стержней, соот-

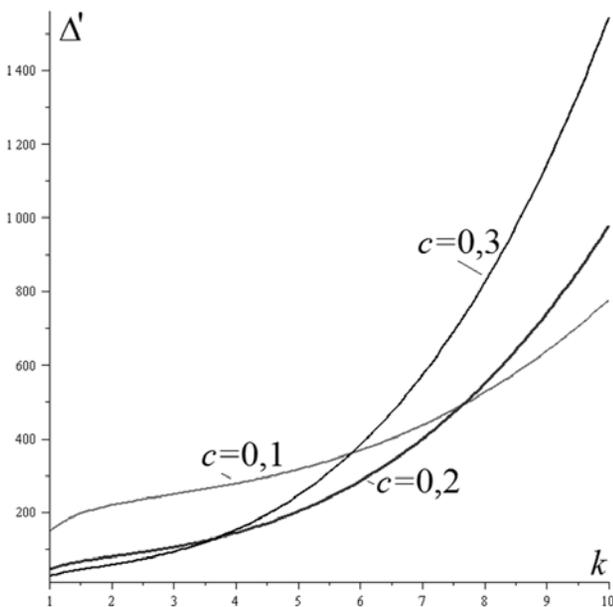


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей

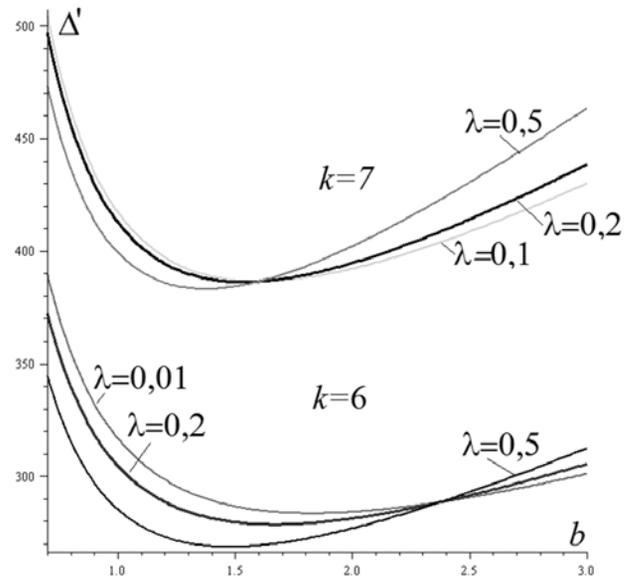


Рис. 4. Зависимость прогиба от высоты фермы

ветствующее одному и тому же прогибу фермы. Отсюда вытекает еще один вывод: при одних значениях высот фермы (при $k = 6$ это $b < b^* = 2,4$ м) увеличение λ приводит к уменьшению прогиба фермы, при других ($b > b^*$) — к увеличению. Как видно из решения, критическое значение b^* растет с уменьшением числа панелей.

Аналитическая форма полученного результата позволяет выявить асимптотику решения. В системе Maple легко вычисляется предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k^3 = \frac{5(2b^3(\gamma_1 + 2\gamma_3) + b^2 c(2\gamma_2 + 31\gamma_3) + c^2(14b + 3c)\gamma_3)}{12(b-c)^2 L}$$

Значение этого предела чисто теоретическое, необходимое для сравнения различных конструкций ферм и оценки их деформативности [2, 3].

Выводы

Полученное выражение для прогиба имеет достаточно простую структуру, легко анализируется и может быть использовано в практических инженерных расчетах для выбора оптимальных размеров фермы, распределения материала по поясам и числа панелей. Выразительная архитектурная форма предлагаемой схемы позволяет применять ее в декоративных целях, а однотипность элементов конструкции упрощает изготовление и монтаж. При этом аналитическое решение предупреждает проектировщика об опасной особенности фермы: в знаменателе выражения для прогиба стоит разность $b - c$, свидетельствующая о возможности роста прогиба при неправильном выборе размеров. Численные расчеты эту особенность выявить не могут.

Литература

1. **Тиньков Д.В.** Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Appl. Mechanics and Mechatronics. 2015. Т. 1. С. 52—56.

2. **Тиньков Д.В.** Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 66—73.

3. **Тиньков Д.В.** Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 6. С. 21—28.

4. **Ахмедова Е.Р.** Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. 2015. Т. 1. С. 62—65.

5. **Заборская Н.В.** О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования: сборник научных трудов по материалам Междунар. науч.-практ. конф. В 13 частях.

Ч. 9. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком». 2015. С. 58—60. DOI: 10.17117/2015.02.28.09.

6. **Кирсанов М.Н.** Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37—43.

7. **Ларичев С.А.** Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. 2015. Т. 1. С. 4—8.

8. **Кирсанов М.Н.** Maple и MapleT. Решение задач механики. СПб.: Лань, 2012.

9. **Дьяконов В.П.** Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2011.

10. **Голоскоков Д.П.** Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: ПаркКом, 2011.

11. **Hutchinson R.G., Fleck N.A.** Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. V. 85. N 9. P. 607—617.

Статья поступила в редакцию 06.04.2016