

УДК 624.042.7

## О связи уравнений относительного и абсолютного движения при дифференцированном сейсмическом воздействии

Е.В. Позняк

**Позняк Елена Викторовна** – кандидат технических наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин НИУ «МЭИ», e-mail: PozniakYV@mpei.ru

При дифференцированном сейсмическом воздействии каждая опорная точка конструкции, двигаясь совместно с грунтом, имеет отличающиеся функции перемещений, скоростей и ускорений. Основная цель статьи — показать, как многомерное кинематическое воздействие преобразуется к виду, удобному для проведения нормативных расчетов на сейсмостойкость, т. е. выражается через переносные сейсмические силы и сейсмическую интенсивность. Приведено описание дифференцированного воздействия в виде поля кинематических параметров; дано определение (по Ю.П. Назарову) интенсивности дифференцированного воздействия через интенсивность в одной из опорных точек (точке привязки) и функции изменения поля ускорений; дано определение переносного движения; получены уравнения движения в абсолютных и относительных координатах.

В уравнениях движения в абсолютных обобщенных координатах сейсмическая нагрузка выражается в виде сил, представляющих собой произведение матрицы жесткости системы опорных элементов на вектор опорных перемещений. Показано, что в уравнениях движения в относительных координатах инерциальные сейсмические силы, так же, как и при традиционном интегральном описании сейсмического воздействия, зависят от сейсмической интенсивности в точке привязки. Теоретические выкладки проиллюстрированы на примере плоской рамы, в каждой опорной точке которой заданы свои функции вертикальных, горизонтальных и угловых перемещений.

*Ключевые слова:* сейсмическое движение грунта, опорные перемещения, интенсивность сейсмического воздействия, абсолютные и относительные координаты, переносное движение, расширенная матрица жесткости, матрица влияния.

## About the Link between the Relative and Absolute Motion Equations under a Differentiated Seismic Impact

Ye.V. Poznyak

**Poznyak Yelena V.** – Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of Robotics, Mechatronics, Machines Dynamics and Strength Dept., MPEI, e-mail: PozniakYV@mpei.ru

When a structure is subjected to a differentiated seismic impact, each of its support points is characterized by different functions of displacements, velocities and accelerations as it moves with the ground. The main purpose of this article is to show how a multidimensional kinematic impact can be converted to a form suitable for carrying out standard earthquake engineering analysis, i.e., how it is expressed in terms of translation seismic forces and seismic intensity. A description of differentiated impact in the form of a field of kinematic parameters is presented. A definition of seismic impact intensity in terms of intensity at one of the support points (anchor point) and acceleration field alteration functions (according to Y.P. Nazarov's formulation) is given. A definition of translational motion is given, and the equations of motion in absolute and relative coordinates are obtained.

In the equations of motion written in absolute generalized coordinates, seismic load is expressed in the form of forces defined as the product of the support elements system stiffness matrix by the vector of support displacements. It is shown that in the equations of motion written in relative coordinates, inertial seismic forces depend, as in case of using the traditional integral description of a seismic impact, on the seismic intensity at the anchor point. The theoretical formulas are illustrated using the example of a two-dimensional frame, for each support point of which individual functions of vertical, horizontal and angular displacements are specified.

*Key words:* seismic ground motion, support displacements, seismic impact intensity, absolute and relative coordinates, translation motion, extended stiffness matrix, influence matrix.

При прохождении сейсмических волн под фундаментами зданий и сооружений каждая точка грунтового основания совершает трехмерное движение, в этом случае говорят о пространственно-временном поле перемещений грунта. Сейсмическое воздействие в виде пространственно-временного поля задает дифференцированное сейсмическое воздействие на конструкцию — кинематическое возбуждение опорных точек, при котором каждая из них имеет свои функции перемещений. Дифференцированный подход применяется для протяженных пространственных сооружений, таких, как мостовые конструкции, трубопроводы, дамбы, здания с размерами фундаментов, превышающими длины доминирующих сейсмических волн, особенно если фундаменты податливые. Для оценки динамической реакции по строительным нормам требуется выразить сейсмические нагрузки через интенсивность воздействия. Однако при наличии пространственного поля сейсмических движений это оказывается не таким очевидным делом. Во-первых, для дифференцированного воздействия само понятие сейсмической интенсивности требует уточнения, она изменяется в зависимости от времени и координаты. Во-вторых, для получения сейсмических нагрузок в виде инерционных сил требуется перейти к относительным обобщенным координатам, т. е. необходимо понимать, как задается пространственное переносное движение. Этим вопросам и посвящена настоящая работа.

Пусть конструкция имеет  $p$  опорных точек, связанных с основанием; движение  $i$ -й точки с координатами  $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$  зададим векторами абсолютных перемещений, скоростей, ускорений:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) &= (X_{1i}^0 \ X_{2i}^0 \ X_{3i}^0)^T; \\ \dot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) &= (\dot{X}_{1i}^0 \ \dot{X}_{2i}^0 \ \dot{X}_{3i}^0)^T, \quad i = 1, \dots, p; \\ \ddot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) &= (\ddot{X}_{1i}^0 \ \ddot{X}_{2i}^0 \ \ddot{X}_{3i}^0)^T. \end{aligned}$$

При прохождении сейсмических волн грунт совершает угловые движения (ротации). В каждой опорной точке введем векторы углов поворота относительно трех неподвижных осей, а также векторы угловых скоростей и ускорений:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) &= (\alpha_{1i}^0 \ \alpha_{2i}^0 \ \alpha_{3i}^0)^T; \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) &= (\dot{\alpha}_{1i}^0 \ \dot{\alpha}_{2i}^0 \ \dot{\alpha}_{3i}^0)^T, \quad i = 1, \dots, p; \\ \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) &= (\ddot{\alpha}_{1i}^0 \ \ddot{\alpha}_{2i}^0 \ \ddot{\alpha}_{3i}^0)^T. \end{aligned}$$

Введение угловых перемещений не является излишним усложнением теории. Вспомним, что перемещения опорных точек являются граничными условиями для задачи динамики, поэтому в неподвижной системе координат их необходимо дополнить углами

поворотов<sup>1</sup>. Это даст возможность в дальнейшем корректно перейти к уравнениям относительного движения. Ротации в точке можно определить по формулам Ньюмарка [1] или по методу Назарова [2] в виде трехмерных ротационных акселерограмм.

Таким образом, движение каждой опорной точки полностью описывается шестикомпонентными векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) &= (\mathbf{X}_i^0 \ 0)^T; \\ \dot{\mathbf{q}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) &= (\dot{\mathbf{X}}_i^0 \ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0)^T, \quad i = 1, \dots, p; \\ \ddot{\mathbf{q}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) &= (\ddot{\mathbf{X}}_i^0 \ \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0)^T. \end{aligned} \quad (1)$$

Интенсивность воздействия в  $i$ -й точке есть модуль вектора ускорения поступательного движения  $\ddot{\mathbf{X}}_i^0$ , инвариантный относительно ориентации системы координат:

$$I_i^X = |\ddot{\mathbf{X}}_i^0| = \sqrt{(\ddot{X}_{1i}^0)^2 + (\ddot{X}_{2i}^0)^2 + (\ddot{X}_{3i}^0)^2}. \quad (2)$$

Вектор ускорений в опорной точке есть произведение интенсивности воздействия на вектор направляющих косинусов:

$$\ddot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = |\ddot{\mathbf{X}}_i^0| \mathbf{v}_i^X(t). \quad (3)$$

Координаты вектора направляющих косинусов поступательного движения  $\mathbf{v}_i^X(t) = (v_{1i}^X \ v_{2i}^X \ v_{3i}^X)^T$ :

$$v_{1i}^X = \frac{\dot{X}_{1i}^0}{|\dot{\mathbf{X}}_i^0|}, \quad v_{2i}^X = \frac{\dot{X}_{2i}^0}{|\dot{\mathbf{X}}_i^0|}, \quad v_{3i}^X = \frac{\dot{X}_{3i}^0}{|\dot{\mathbf{X}}_i^0|}, \quad (4)$$

причем выполняется условие нормировки

$$(v_{1i}^X)^2 + (v_{2i}^X)^2 + (v_{3i}^X)^2 = 1.$$

Аналогичное представление для вектора угловых ускорений:

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = |\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0| \mathbf{v}_i^\alpha(t) = I_i^\alpha \mathbf{v}_i^\alpha(t), \quad (5)$$

где  $I_i^\alpha$  — интенсивность углового движения,

$$I_i^\alpha = |\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0| = \sqrt{(\ddot{\alpha}_{1i}^0)^2 + (\ddot{\alpha}_{2i}^0)^2 + (\ddot{\alpha}_{3i}^0)^2}. \quad (6)$$

Вектор направляющих косинусов углового движения  $\mathbf{v}_i^\alpha(t) = (v_{1i}^\alpha \ v_{2i}^\alpha \ v_{3i}^\alpha)^T$  имеет координаты

$$\begin{aligned} v_{1i}^\alpha &= \frac{\dot{\alpha}_{1i}^0}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0|}, \quad v_{2i}^\alpha = \frac{\dot{\alpha}_{2i}^0}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0|}, \quad v_{3i}^\alpha = \frac{\dot{\alpha}_{3i}^0}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^0|}; \\ (v_{1i}^\alpha)^2 &+ (v_{2i}^\alpha)^2 + (v_{3i}^\alpha)^2 = 1. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Так, например, если рассматривать в качестве опорных элементов колонны, то в соответствующей стержневой модели концы стержня имеют три поступательные и три угловые степени свободы. Эти угловые степени свободы и определяются ротациями грунта.

Шестикомпонентный вектор ускорений грунта (1) в  $i$ -й точке выразим через интенсивность поступательного движения  $I_i^X$ , применив метод Назарова, изложенный в [2]:

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = I_i^X \mathbf{v}_i(t), \quad (7)$$

где  $\mathbf{v}_i(t)$  — вектор, объединяющий векторы направляющих косинусов  $\mathbf{v}_i^X$  и  $\mathbf{v}_i^\alpha$  в единый вектор направления сейсмического воздействия

$$\mathbf{v}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i^X \\ w\mathbf{v}_i^\alpha \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $w$  — относительная интенсивность углового ускорения, равная отношению интенсивностей ротационного и поступательного движения; величина  $w$  оценивается по результатам обработки акселерограмм ротационного движения.

Если расчет проводится на нормативную интенсивность  $I$ , то формула (7) для полного вектора ускорений принимает вид

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = I\mathbf{v}_i(t). \quad (9)$$

В [2] предлагается выбрать одну из опорных точек в качестве начальной (точка привязки) для описания кинематики всего поля движения грунта. Пусть такой точкой привязки будет первая опорная точка с вектором перемещений  $\mathbf{q}_1^0$  и ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}_1^0$  (1). Вектор ускорений (9) в первой точке

$$\ddot{\mathbf{q}}_1^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \left| \ddot{\mathbf{q}}_1^0 \right| \mathbf{v}_1(t) = I\mathbf{v}_1(t), \quad (10)$$

где  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(t)$  — вектор направляющих косинусов сейсмического воздействия (8) в точке привязки.

Для описания полей ускорений в [3] вводятся скалярные функции координат и времени, задающие пространственное изменение поля ускорений по отношению к точке привязки:

$$\begin{aligned} T_{1i} &= T_1(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \ddot{X}_{1i}^0 / \ddot{X}_{11}^0; \\ T_{2i} &= T_2(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \ddot{X}_{2i}^0 / \ddot{X}_{21}^0; \\ T_{3i} &= T_3(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \ddot{X}_{3i}^0 / \ddot{X}_{31}^0; \\ T_{4i} &= T_4(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \ddot{\alpha}_{1i}^0 / \ddot{\alpha}_{11}^0; \\ T_{5i} &= T_5(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \ddot{\alpha}_{2i}^0 / \ddot{\alpha}_{21}^0; \\ T_{6i} &= T_6(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \ddot{\alpha}_{3i}^0 / \ddot{\alpha}_{31}^0. \end{aligned}$$

Функции  $T$  зависят от типа, направления и длин сейсмических волн и могут учитывать их пространственную изменчивость [4].

Аналогичным образом получаем выражение для шестимерного вектора ускорений в  $i$ -й опорной точке

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0(t) = \mathbf{T}_i \ddot{\mathbf{q}}_1^0(t) = I\mathbf{T}_i \mathbf{v}_1, \quad (11)$$

где  $I$  — нормативная интенсивность сейсмического воздействия;  $\mathbf{v}_1$  — вектор направляющих косинусов в первой опорной точке;  $\mathbf{T}_i^{[6 \times 6]}$  — матричная функция изменения поля ускорений в  $i$ -й опоре,

$$\mathbf{T}_i = \text{diag}[T_{1i}, T_{2i}, \dots, T_{6i}]. \quad (12)$$

Полный  $6p$ -мерный вектор ускорений также выражается через нормативную интенсивность и вектор направляющих косинусов сейсмического воздействия в точке привязки:

$$\ddot{\mathbf{q}}^0(t) = \mathbf{T} \ddot{\mathbf{q}}_1^0(t) = I\mathbf{T}\mathbf{v}_1, \quad (13)$$

где матрица  $\mathbf{T}^{[6p \times 6]}$  составлена из блоков  $\mathbf{T}_i$ :

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_p]. \quad (14)$$

Формула (13) позволяет выразить ускорение в любой опорной точке через характеристики сейсмического воздействия в точке привязки — интенсивность и направляющие косинусы.

Дифференцированное сейсмическое воздействие задается перемещениями опорных точек и представляет собой кинематические краевые условия для системы дифференциальных уравнений равновесия. Допустим, система имеет  $n$  степеней свободы,  $p$  опорных точек, в которых заданы  $6p$  перемещений (три поступательных и три угловых). Динамическое поведение такой системы будем описывать полным вектором абсолютных обобщенных координат  $\mathbf{q}_{all}^{[n+6p]}$

$$\mathbf{q}_{all} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{abs} \\ \mathbf{q}^0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{q}_{abs}^{[n]}$  — вектор абсолютных обобщенных координат системы;  $\mathbf{q}^{0[6p]}$  — вектор кинематических краевых условий (опорных перемещений). Опорные точки принадлежат опорным элементам и являются частью динамической системы. В методе конечных элементов опорные точки являются узлами конечно-элементной сетки, а опорные перемещения имеют смысл заданных узловых перемещений. Вектору  $\mathbf{q}_{all}$  соответствует полная глобальная матрица жесткости  $\mathbf{K}_{all}^{[(n+6p) \times (n+6p)]}$ , построенная путем объединения матриц жесткости отдельных элементов без учета условий закрепления. Произведение дает вектор всех активных и реактивных сил в направлении узловых перемещений (т. е. внешних сил и опорных реакций).

Строки матрицы  $\mathbf{K}_{all}$ , соответствующие компонентам вектора  $\mathbf{q}_{abs}$ , формируют расширенную матрицу жесткости  $\bar{\mathbf{K}}^{[n \times (n+6p)]}$ . Если элементы вектора  $\mathbf{q}_{all}$  упорядочены в соответствии с (15), левый блок матрицы  $\bar{\mathbf{K}}$  размерности  $[n \times n]$  соответствует матрице жесткости  $\mathbf{K}$  для системы с жесткими заделками в опорных точках. Правый блок размерности  $[n \times 6p]$  представляет собой  $\mathbf{K}_s$  — матрицу жесткости системы опорных элементов, преобразующую кинематическое воздействие в сейсмические силы. Таким образом, при выполнении (15) расширенная матрица жесткости  $\bar{\mathbf{K}}$  состоит из блоков  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}_s$ :

$$\bar{\mathbf{K}} = (\mathbf{K} \quad \mathbf{K}_s). \quad (16)$$

Произведение  $\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{abs}$  представляет собой вектор внешних сил, приложенных к системе, включая сейсмические силы. В силу (15) и (16)

$$\tilde{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{abs} \\ \mathbf{q}^0 \end{pmatrix} = (\mathbf{K} \ \mathbf{K}_s) \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{abs} \\ \mathbf{q}^0 \end{pmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} + \mathbf{K}_s\mathbf{q}^0. \quad (17)$$

Здесь  $\mathbf{K}\mathbf{q}_{abs}$  — восстанавливающие силы;  $\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0$  — внешние сейсмические силы. Эти силы вместе с даламберовыми силами инерции входят в уравнения динамического равновесия. Таким образом, представление (17) отражает преобразование кинематического воздействия в силовое, действующее на систему через опорные элементы.

Движение грунта передается на конструкцию через опорные точки или элементы и является причиной ее вынужденных колебаний. Обобщенные переменные, описывающие колебательный процесс динамической системы, могут быть абсолютными, т. е. задавать движение в неподвижной (неинерциальной) системе координат, и относительными — если система координат подвижная (инерциальная). Подвижная система координат сама совершает движение относительно неподвижных осей, это движение называется переносным. Для системы с  $n$  степенями свободы вектор абсолютных обобщенных координат  $\mathbf{q}_{abs}^{[n]}$  есть сумма векторов относительных обобщенных координат  $\mathbf{q}_r^{[n]}$  и переносного движения  $\mathbf{q}_{tr}^{[n]}$ :

$$\mathbf{q}_{abs} = \mathbf{q}_r + \mathbf{q}_{tr}. \quad (18)$$

Для консервативных систем, находящихся под действием кинематического воздействия, уравнения движения в абсолютных координатах с учетом (17) имеют вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0, \quad (19)$$

где  $\mathbf{M}^{[n \times n]}$  и  $\mathbf{K}^{[n \times n]}$  — матрицы инерции и жесткости конструкции;  $\mathbf{K}_s^{[n \times 6p]}$  — матрица жесткости системы опорных элементов;  $\mathbf{q}^0$  —  $6p$ -мерный вектор опорных перемещений (для плоской системы  $\mathbf{q}^{0[3p]}$  и  $\mathbf{K}_s^{[n \times 3p]}$ ).

Определим  $n$ -мерный вектор переносного движения  $\mathbf{q}_{tr}$  как вектор перемещений, возникающих в конструкции от статических опорных перемещений  $\mathbf{q}^0$ . В этом случае вектор опорных реакций  $\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0$  будет уравновешен вектором упругих усилий в опорных элементах  $\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr}$ :

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_{tr} = \mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}, \quad (20)$$

откуда

$$\mathbf{q}_{tr} = -\mathbf{F}\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0, \quad (21)$$

где  $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$  — матрица податливости системы. При подстановке (18) в (19) с учетом (20) получаются уравнения движения в относительных координатах

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}\mathbf{q}_r = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{tr}. \quad (22)$$

С учетом вектора переносного движения в форме (21)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}\mathbf{q}_r = \mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{K}_s\ddot{\mathbf{q}}^0. \quad (23)$$

Заметим, что в случае переносного движения для многомерного пространственного кинематического воздействия сложно представить какую-то определенную подвижную систему координат, привычную для динамики твердого тела. Определение переносного движения в виде (21) дает возможность автоматически получить в правой части уравнений относительного движения (23) переносные инерционные силы (зависящие только от вектора ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}^0$ ).

Очевидно, что вычисление правой части формулы (23) сопряжено с трудностями, возрастающими с ростом числа степеней свободы динамической системы. Несколько упростить задание правой части уравнения движения можно с помощью матрицы влияния  $\mathbf{F}_s^{[n \times 6p]}$  (для случая плоской системы  $\mathbf{F}_s^{[n \times 3p]}$ ), связывающей перемещения вдоль обобщенных координат с перемещениями опорных точек [2]. Матрицу влияния  $\mathbf{F}_s$  введем как взятое с обратным знаком произведение матрицы податливости системы  $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$  на матрицу жесткости системы опор  $\mathbf{K}_s$  (см. (21)):

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}\mathbf{K}_s, \quad (24)$$

тогда вектор переносного движения

$$\mathbf{q}_{tr} = \mathbf{F}_s\mathbf{q}^0, \quad (25)$$

а уравнение движения будет иметь вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}\mathbf{q}_r = -\mathbf{M}\mathbf{F}_s\ddot{\mathbf{q}}^0. \quad (26)$$

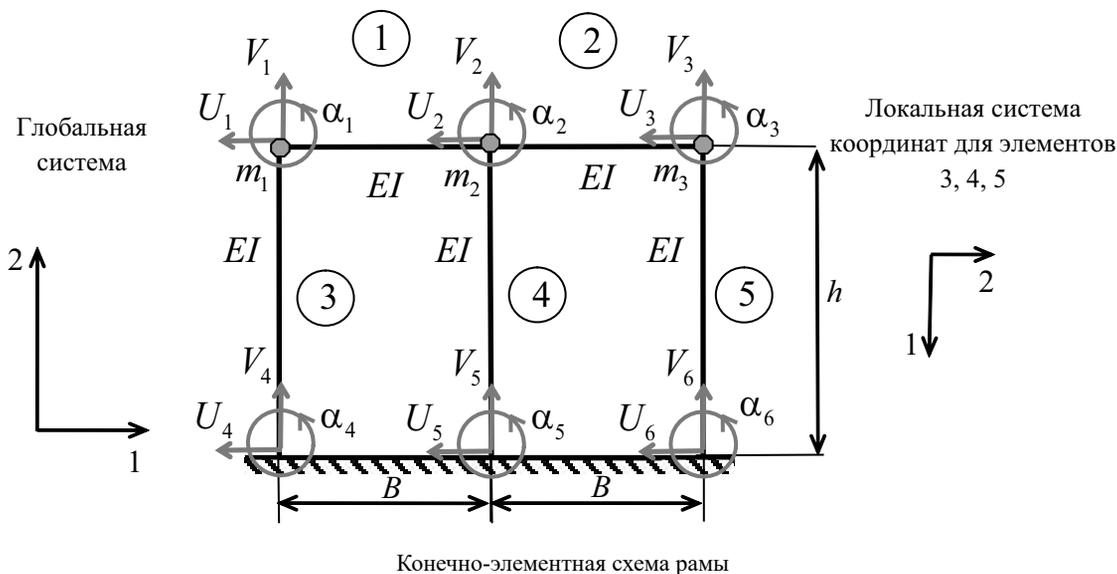
На практике для вычисления матрицы влияния  $\mathbf{F}_s$  решают  $6p$  статических задач, в ходе которых определяется вектор перемещений системы на единичное смещение каждой из опор. Таким образом,  $i$ -й столбец матрицы влияния  $\mathbf{F}_s$  в (25) — это  $n$  перемещений системы от единичного перемещения  $i$ -го компонента вектора  $\mathbf{q}^0$ .

Отметим, что расчеты на прочность проводят по относительным перемещениям  $\mathbf{q}_r$ . Однако реальные перемещения системы — абсолютные, определяются по формуле (18)

$$\mathbf{q}_{abs} = \mathbf{q}_r + \mathbf{q}_{tr} = \mathbf{q}_r + \mathbf{F}_s\mathbf{q}^0. \quad (27)$$

Рассмотрим пример составления уравнений движения в абсолютных и относительных координатах модели простейшей относительной конструкции — плоской рамы — при дифференцированном сейсмическом воздействии.

Сейсмическое воздействие на плоскую раму задано поступательными и угловыми перемещениями основания в опорных точках (см. рисунок). Запишем уравнения движения при условии, что массы ригелей сосредоточены в узлах рамы. Обозначим:  $EI$ ,  $EF$  — изгибная жесткость и жесткость на растяжение-сжатие каждой стойки и ригеля;  $h$  — высота рамы;  $B$  — ширина пролета. Стержневая система состоит из шести узлов и пяти элементов, общее число степеней свободы — 18,



включая девять узловых перемещений ригелей и девять кинематических краевых условий (опорных перемещений); нумерация узловых перемещений и стержневых конечных элементов показана на рисунке.

Введем вектор абсолютных обобщенных координат, описывающих движение масс в горизонтальном и вертикальном направлениях,

$$\mathbf{q}_{abs} = (U_1 \ V_1 \ U_2 \ V_2 \ U_3 \ V_3)^T$$

и вектор кинематических краевых условий

$$\mathbf{q}^0 = (U_4 \ V_4 \ \alpha_4 \ U_5 \ V_5 \ \alpha_5 \ U_6 \ V_6 \ \alpha_6)^T,$$

который будем считать известным. Сформируем вектор узловых перемещений, разделяя перемещения ригелей и опор

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{q}^0 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{f}_1 = (U_1 \ V_1 \ \alpha_1 \ U_2 \ V_2 \ \alpha_2 \ U_3 \ V_3 \ \alpha_3)^T$  — абсолютные узловые перемещения ригелей в глобальной системе координат.

Матрицы жесткости горизонтальных ригелей длиной (стержневые конечные элементы 1 и 2) в глобальной системе координат представим в блочном виде:

$$\mathbf{K}^H = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^H & \mathbf{K}_{12}^H \\ \mathbf{K}_{21}^H & \mathbf{K}_{22}^H \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{K}_{11}^H = \begin{pmatrix} EF/B & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/B^3 & 6EI/B^2 \\ 0 & 6EI/B^2 & 4EI/B \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{12}^H = \begin{pmatrix} -EF/B & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/B^3 & 6EI/B^2 \\ 0 & -6EI/B^2 & 2EI/B \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{21}^H = \begin{pmatrix} -EF/B & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/B^3 & -6EI/B^2 \\ 0 & 6EI/B^2 & 2EI/B \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{22}^H = \begin{pmatrix} EF/B & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/B^3 & -6EI/B^2 \\ 0 & -6EI/B^2 & 4EI/B \end{pmatrix}.$$

Для горизонтальных элементов локальная и глобальная системы координат совпадают. Для вертикальных стоек длиной  $h$  (элементы 3, 4, 5) матрица жесткости в глобальной системе имеет вид

$$\mathbf{K}^V = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{K}_{12}^V \\ \mathbf{K}_{21}^V & \mathbf{K}_{22}^V \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{11}^V = \begin{pmatrix} 12EI/h^3 & 0 & 6EI/h^2 \\ 0 & EF/h & 0 \\ 6EI/h^2 & 0 & 4EI/h \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{12}^V = \begin{pmatrix} -12EI/h^3 & 0 & 6EI/h^2 \\ 0 & -EF/h & 0 \\ -6EI/h^2 & 0 & 2EI/h \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{21}^V = \begin{pmatrix} -12EI/h^3 & 0 & -6EI/h^2 \\ 0 & -EF/h & 0 \\ 6EI/h^2 & 0 & 2EI/h \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{22}^V = \begin{pmatrix} 12EI/h^3 & 0 & -6EI/h^2 \\ 0 & EF/h & 0 \\ -6EI/h^2 & 0 & 4EI/h \end{pmatrix}.$$

Здесь учтено, что для стоек локальная система координат не совпадает с глобальной, ориентация локальной системы показана на рисунке.

Глобальная матрица жесткости  $\mathbf{K}_{all}$  получается путем объединения матриц жесткости отдельных эле-

ментов, причем компоненты, соответствующие общим степеням свободы соседних элементов, суммируются [5]:

$$\mathbf{K}_{all} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^H + \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{K}_{12}^H & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^H & \mathbf{K}_{22}^H + \mathbf{K}_{11}^H + \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{K}_{12}^H & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^H & \mathbf{K}_{22}^H + \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^V \\ \mathbf{K}_{21}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^V \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{0}^{[3 \times 3]}$  — нулевая матрица. Матрица  $\mathbf{K}_{all}$  имеет размерность  $[18 \times 18]$ , по числу степеней свободы стержневой системы. Произведение  $\mathbf{K}_{all} \mathbf{f}$  дает вектор активных и реактивных сил в направлении узловых перемещений (т. е. внешних сил и опорных реакций).

Левый верхний блок матрицы  $\mathbf{K}_{all}$  размерности  $[9 \times 9]$  соответствует матрице жесткости рамы, жестко заделанной в основание:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^H + \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{K}_{12}^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^H & \mathbf{K}_{22}^H + \mathbf{K}_{11}^H + \mathbf{K}_{11}^V & \mathbf{K}_{12}^H \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^H & \mathbf{K}_{22}^H + \mathbf{K}_{11}^V \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Правый верхний блок размерности  $[9 \times 9]$  представляет собой матрицу жесткости системы опорных элементов, преобразующую кинематическое воздействие в сейсмические силы

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{12}^V & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^V \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Расширенная матрица жесткости  $\tilde{\mathbf{K}}^{[9 \times 18]}$  состоит из строк, соответствующих перемещениям  $\mathbf{f}_1$ , т. е. из блоков  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}_s$ :

$$\tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{K} \quad \mathbf{K}_s).$$

Уравнения движения запишем по принципу Даламбера: к уравнениям статического равновесия добавим даламберовы силы инерции. Заметим, что в данном примере все массы сосредоточенные, не имеют угловых степеней свободы, поэтому вектор обобщенных координат  $\mathbf{q}_{abs}$  не содержит угловых перемещений и не равен вектору  $\mathbf{f}_1$ . Для записи уравнений движения из расширенной матрицы жесткости вычеркнем строчки и столбцы с номерами 3, 6 и 9. Это угловые направления, по которым не действуют инерционные силы и которым не соответствуют уравнения динамического равновесия. Матрица жесткости стержневой системы (28) в развернутом виде

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{EF}{B} + \frac{12EI}{h^3} & 0 & -\frac{EF}{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{B^3} + \frac{EF}{h} & 0 & -\frac{12EI}{B^3} & 0 & 0 \\ -\frac{EF}{B} & 0 & \frac{2EF}{B} + \frac{12EI}{h^3} & 0 & -\frac{EF}{B} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{B^3} & 0 & \frac{24EI}{B^3} + \frac{EF}{h} & 0 & -\frac{12EI}{B^3} \\ 0 & 0 & -\frac{EF}{B} & 0 & \frac{EF}{B} + \frac{12EI}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{B^3} & 0 & \frac{12EI}{B^3} + \frac{EF}{h} \end{pmatrix};$$

матрица жесткости опорных элементов (29)

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} -\frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EF}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{h} & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения движения в абсолютных координатах имеют вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{K}_s \mathbf{q}^0, \quad (30)$$

где  $\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$  — матрица инерции.

Движение в относительных координатах по формуле (23) записывается в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}\mathbf{q}_r = \mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_s \dot{\mathbf{q}}^0, \quad (31)$$

через матрицу влияния  $\mathbf{F}_s = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_s$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}\mathbf{q}_r = -\mathbf{M}\mathbf{F}_s \dot{\mathbf{q}}^0. \quad (32)$$

В уравнении (32) выразим сейсмические переносные силы через интенсивность (13) и матричную функцию изменения интенсивности  $\mathbf{T}$  (см. (14)):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}\mathbf{q}_r = -\mathbf{M}\mathbf{F}_s \mathbf{T}\mathbf{v}_1. \quad (33)$$

Уравнения движения в форме (33) позволяют применять к конструкциям, находящимся под действием дифференцированного сейсмического воздействия, привычный для прикладных инженеров-проектировщиков линейно-спектральный метод с учетом опасных направлений сейсмического воздействия, разработанный для решения задач сейсмостойкости. Отметим, что предварительно придется решать задачу определения функции изменения поля ускорений  $\mathbf{T}$ , согласуясь с сейсмологическими данными о типах и скоростях сейсмических волн или разрабатывая тестовые воздействия на основе записей землетрясений на площадках со схожими грунтовыми и геологическими условиями. Задание обобщенной волновой модели как комбина-

ции  $P$ - и  $S$ -волн описано в [2], пример моделирования пространственного поля ускорений от поверхностной волны Релея по трехкомпонентным акселерограммам можно найти в [6].

### Литература

1. Ньюмарк Н., Розенблюэт Э. Основы сейсмостойкого строительства. М.: Стройиздат, 1980.
2. Назаров Ю.П. Аналитические основы расчета сооружений на сейсмические воздействия. М.: Наука, 2010.
3. Назаров Ю.П. Расчетные параметры волновых полей сейсмических движений грунта. М.: Наука, 2015.
4. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. О пространственной изменчивости сейсмических движений грунта при расчете сооружений // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2014. № 5. С. 17—20.
5. Мищенко Г.В., Самогин Ю.Н., Чирков В.П. Метод конечных элементов в курсе сопротивления материалов. М.: Физматлит, 2015.
6. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Моделирование процесса распространения волн Рэлея в пространстве

по заданной акселерограмме // Строительство и реконструкция. 2015. № 2 (58). С. 20—26.

### References

1. N'jumark N., Rozenbljuet Je. Osnovy Sejsmostojkogo Stroitel'stva. M.: Strojizdat, 1980. (in Russian).
2. Nazarov Ju.P. Analiticheskie Osnovy Rascheta Sooruzhenij na Sejsmicheskie Vozdejstvija. M.: Nauka, 2010.
3. Nazarov Ju.P. Raschetnye Parametry Volnovyh Polej Sejsmicheskikh Dvizhenij Grunta. M.: Nauka, 2015. (in Russian).
4. Nazarov Ju.P, Poznjak E.V. O Prostranstvennoj Izmenchivosti Sejsmicheskikh Dvizhenij Grunta pri Raschete Sooruzhenij. Osnovaniya, Fundamenty i Mehanika Gruntov. 2014;5:17—20. (in Russian)
5. Mishenkov G.V, Samogin Ju.N, Chirkov V.P. Metod Konechnyh Jelementov v Kurse Soprotivlenija Materialov. M.: Fizmatlit, 2015. (in Russian)
6. Nazarov Ju.P, Poznjak E.V. Modelirovanie Processa Rasprostraneniya Voln Rjeleja v Prostranstve po Zadannoju Akselerogramme. Stroitel'stvo i rekonstrukcija. 2015; 2 (58):20—26. (in Russian).

*Статья поступила в редакцию 14.06.2016*