

УДК 531.8

## Построение математической модели мобильного манипулятора и оценка энергетических затрат при его движении

И.В. Орлов

**Орлов Игорь Викторович** — кандидат технических наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин НИУ «МЭИ», e-mail: orloviv@mpei.ru

Математическая модель мобильного робота-манипулятора исследована с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. В качестве образца использована система, созданная на кафедре теоретической механики и мехатроники НИУ «МЭИ» для участия в международных соревнованиях. Манипулятор установлен на трехколесной платформе с двумя ведущими колесами и одним пассивным. Предполагается, что мобильный манипулятор перемещается в горизонтальной плоскости. Также предполагается, что проскальзывание колес в точках соприкосновения с поверхностью отсутствует. Каждый диск колеса приводится во вращение двигателем постоянного тока. Рука манипулятора имеет телескопическую конструкцию. В точке крепления к шасси она может вращаться вокруг горизонтальной и вертикальной осей. Повороты реализованы двигателями постоянного тока, которые имеют редукторы с разными передаточными отношениями. Мобильный манипулятор рассматривается в работе как система твердых тел. При этом учтены только масса платформы и масса конечного эффектора. Колеса и стержни манипулятора считаются невесомыми. Переходные процессы в двигателе привода не учитываются. Условие отсутствия скольжения в проекции на оси приводных колес (бокового скольжения) дает ограничение скорости, которая определяет неголономные системы. Уравнения движения мобильного манипулятора записываются в виде уравнений Аппеля. Программное управление основано на силах реакции, которые возникают в результате наложения неголономных связей на движение платформы и конечного эффектора манипулятора.

Сама постановка проблемы использования в управлении природных реакций механических связей приводит к близости решения к оптимальному, так как соответствует экстремальным принципам классической механики. Численное моделирование движения манипулятора вдоль заданной траектории реализовано. Потребление энергии системы привода оценено на основе данных, полученных в процессе моделирования. Оценки использованы в качестве критерия при выборе оптимальных значений передаточных отношений мотор-редуктора.

*Ключевые слова:* мобильный манипулятор, неголономная система, уравнения Аппеля, множители Лагранжа, синтез управления, затраты энергии.

## Constructing the Mathematical Model of a Mobile Manipulator and Estimating the Energy Expenditures for Moving It

I.V. Orlov

**Orlov Igor V.** – Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of Robotics, Mechatronics, Machines Dynamics and Strength Dept., MPEI, e-mail: orloviv@mpei.ru

The mathematical model of a mobile robotic manipulator is investigated using the Wolfram Mathematica computer algebra system. The system constructed at the Moscow Power Engineering Institute's Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics for participating in international competitions was used as a prototype. The manipulator is mounted on a three-wheeled platform with one passive and two driving wheels. It is assumed that the mobile manipulator moves in a horizontal plane. It is also assumed that the wheels do not slip at the points where they come in contact with the surface. Each of the driving wheels is rotated by a DC motor. The manipulator arm has a telescopic design. At the point of its attachment to the chassis, the arm can rotate both about the horizontal and vertical axes. The arm rotary motions are effectuated by DC motors having reducers with different gear ratios. In the present study, the mobile manipulator is considered as a system of rigid bodies. Only the platform weight and the end effector mass are taken into account in the analysis. The manipulator wheels and rods are considered weightless. Transients in the drive motor are not taken into account. The no-sliding condition in the projection on the drive wheel axles (sideslip) yields the speed limit, which determines nonholonomic systems.

The mobile manipulator motion equations are written in the form of Appel's equations. Control by means of software is based on the reaction forces that arise as a result of imposing nonholonomic constraints on the movement of the platform and the manipulator's end effector.

The very formulation of the problem of using the natural reactions of mechanical constraints in control yields a close-to-optimal solution, because it corresponds to the extreme principles of classical mechanics. Numerical simulation of manipulator motion along a predetermined trajectory has been implemented. The energy consumption by the drive system is estimated based on the data obtained from the simulation. These estimates are used as a criterion in selecting the optimal gear ratios of the motor-gear unit.

*Key words:* mobile manipulator, non-holonomic system, Appel equations, Lagrangian multipliers, control synthesis, energy expenditures.

## Введение

Мобильный манипулятор на колесном шасси — автономное устройство, имеющее бортовой источник энергии в виде аккумулятора, поэтому наряду с решением задачи о построении управлений движением манипулятора, установленного на подвижном шасси, представляет достаточный интерес оценка энергетических затрат устройством при реализации построенных программных движений. Исследование динамики мобильных манипуляторов осложняется большим числом степеней свободы и громоздкостью системы уравнений. Это обстоятельство приводит к развитию матричных методов составления уравнений движения [1, 2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00429 -а).

## Математическая модель мобильного манипулятора

Разработанный в НИУ «МЭИ» манипулятор установлен на трехколесном подвижном основании. Два колеса — ведущие, одно пассивное, самоориентирующееся (рояльное). Каждое ведущее колесо приводится во вращение мотор-редуктором постоянного тока. Самоориентирующееся колесо закреплено в свободно вращающейся относительно вертикальной оси вилке.

Манипулятор прикреплен к средней части шасси. Штанга манипулятора телескопическая, собрана из двух трубок соответствующих диаметров. Трубка меньшего диаметра приводится в движение с помощью винтового устройства, вращаемого мотор-редуктором (МР). Трубка большего диаметра закреплена на шасси так, что может вращаться относительно вертикальной и горизонтальной осей. Вращения обеспечиваются мотор-редукторами постоянного тока с различными передаточными числами. Платформа мобильного манипулятора движется в горизонтальной плоскости. Предполагается, что колеса не проскальзывают в точках контакта с поверхностью.

Введем в рассмотрение следующие системы координат (рис. 1):  $OXYZ$  — неподвижная система координат;  $Ax_1y_1z_1$  — подвижная система, жестко связанная с платформой. Координаты точки  $A$  в неподвижной системе  $(x, y, 0)$ ;  $\psi$  — угол поворота МР вокруг оси  $Az_1$  относительно неподвижной системы координат;  $\delta$  — угол поворота штанги относительно вертикальной оси (угол между осью  $Ax_1$  и проекцией вектора  $\mathbf{DB}$  на горизонтальную плоскость);  $\alpha$  — угол отклонения вектора  $\mathbf{DB}$  от вертикали;  $s$  — удлинение штанги. При построении математической модели мобильного манипулятора люфты в редукторах не учитывались: было сделано допущение о том, что углы поворотов роторов двигателей пропорциональны соответствующим угловым или линейной координатам.

Запишем уравнения мобильного манипулятора в виде уравнений Аппеля [1]. В уравнениях будем учитывать только массу платформы и массу схвата. Массу колеса и звеньев штанги манипулятора не учитываем. Переходными процессами в двигателях привода пренебрегаем.

Условие отсутствия бокового скольжения в проекции на ось  $Ay_1$  соответствует равенству нулю проекции скорости точки  $A$  на эту ось:

$$V_{Ay_1} = -\dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi = 0.$$

В уравнениях будем учитывать только массу платформы и массу схвата. Переходными процессами в двигателях привода пренебрегаем.

Положение системы абсолютно твердых тел в этом случае определяется вектором обобщенных координат

$$\mathbf{q} = (x, y, \psi, \delta, \alpha, s)^T;$$

вектор обобщенных скоростей

$$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}, \dot{\delta}, \dot{\alpha}, \dot{s})^T;$$

вектор псевдоскоростей

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = (V, \Omega, \omega_3, \omega_4, u)^T.$$

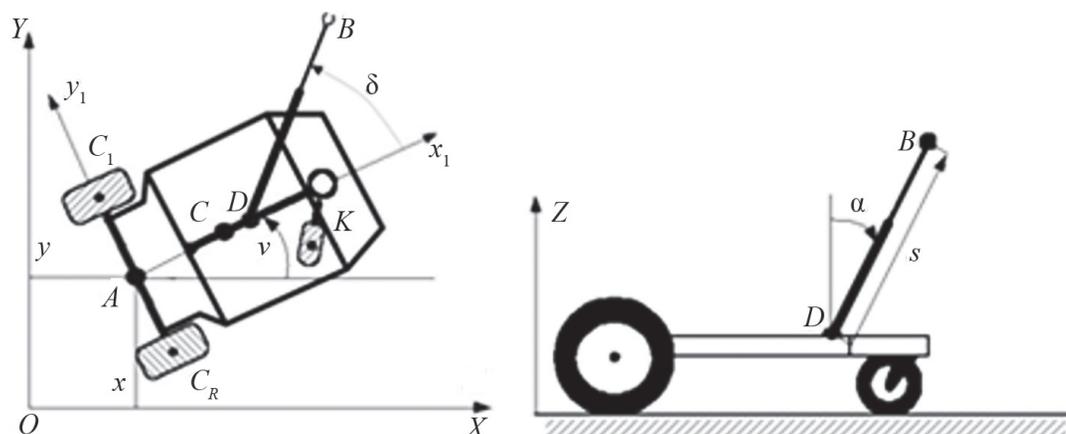


Рис. 1. Мобильный манипулятор (вид сверху и боковой вид)

Кинематические уравнения, устанавливающие связь между обобщенными скоростями и псевдоскоростями:

$$\dot{x} = V \cos \psi; \quad \dot{y} = V \sin \psi; \quad \dot{\psi} = \Omega; \quad \dot{\delta} = \omega_3; \quad \dot{\alpha} = \omega_4; \quad \dot{s} = u.$$

Запишем выражение для функции Аппеля:

$$S = \frac{1}{2} \left( m((\dot{V} - a\Omega)^2 + (a\dot{\Omega} + V\Omega)^2) + J\dot{\Omega}^2 + m_b \mathbf{w}_B^2(\ddot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{q}) \right),$$

где  $\mathbf{w}_B^2(\ddot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{q})$  — квадрат абсолютного ускорения схвата манипулятора.

Уравнения Аппеля в матричной форме имеют вид

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \ddot{\mathbf{n}}} \right)^T = \mathbf{Q},$$

$\mathbf{Q} = (Q_V, Q_\Omega, Q_\delta, Q_\alpha, Q_s)^T$  — вектор обобщенных сил. С учетом массы схвата компоненты вектора обобщенных сил определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} Q_V &= \frac{n(M_{\text{лв}} + M_{2\text{лв}})}{r}; \\ Q_\Omega &= \frac{nl(M_{\text{лв}} - M_{2\text{лв}})}{r}; \\ Q_\delta &= n_\delta M_{3\text{лв}}; \\ Q_\alpha &= mgs \sin \alpha + n_\alpha M_{4\text{лв}}; \\ Q_s &= -mg \cos \alpha + n_s M_{5\text{лв}}. \end{aligned}$$

Момент, развиваемый двигателем постоянного тока, определяется выражением

$$M_{i\text{лв}} = c_1 U_i - c_2 \omega_i r_s,$$

где  $i$  — номер двигателя;  $c_1, c_2$  — постоянные двигателя;  $U_i$  — напряжение на  $i$ -м двигателе;  $\omega_i$  — угловая скорость ротора  $i$ -го двигателя.

### Построение программных движений как наложение на систему новых связей

Пусть  $\mathbf{AD} = b$ , тогда координаты точки  $B$  будут определяться формулами

$$\begin{aligned} x_B &= x + b \cos \psi + s \cos(\psi + \delta) \sin \alpha; \\ y_B &= y + b \sin \psi + s \sin(\psi + \delta) \sin \alpha; \\ z_B &= s \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Для нахождения скорости и ускорения точки  $B$  продифференцируем выражения (1) по времени и заменим обобщенные скорости через псевдоскорости. Тогда

$$\mathbf{V}_B(t) = \mathbf{V}\dot{\mathbf{n}}, \quad (2)$$

где матрица  $\mathbf{V}$  достаточно громоздка и в явном виде здесь не приводится.

Дифференцирование равенства (2) приводит к следующему выражению для ускорения точки  $B$ :

$$\mathbf{w}_B(t) = \mathbf{V}\ddot{\mathbf{n}} + \tilde{\mathbf{w}},$$

где  $\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{w}}(\dot{\mathbf{n}}, \mathbf{q})$  — вектор, компоненты которого не зависят от псевдоускорений.

Пусть в неподвижной системе координат задан вектор скорости схвата  $\mathbf{V}_B(t)$ . Тогда левые части выражений (2) будут известными функциями времени и, следовательно, уравнения можно рассматривать как неголономные связи для вектора псевдоскоростей  $\dot{\mathbf{n}}$  [1].

Рассмотрим свободное движение мобильного манипулятора при наличии связей (2). Для этого запишем уравнения Аппеля с неопределенными множителями

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{n}}} \right)^T = \mathbf{Q} + \mathbf{V}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}$  — вектор неопределенных множителей.

Введем матрицу  $\tilde{\mathbf{V}}$ , которая является обратной матрице, полученной добавлением слева к матрице  $\mathbf{V}^T$  двух единичных столбцов.

Умножим слева уравнения (3) на матрицу  $\tilde{\mathbf{V}}$ :

$$\tilde{\mathbf{V}} \left( \left( \frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{n}}} \right)^T - \mathbf{Q} - \mathbf{V}^T \boldsymbol{\lambda} \right) = 0. \quad (4)$$

Так как  $\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{V}^T \boldsymbol{\lambda} = (0, 0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ , то первые два уравнения системы (4) не содержат компонент вектора  $\boldsymbol{\lambda}$ . Эти два уравнения можно рассматривать как уравнения мобильного манипулятора, на движение которого наложена неголономная связь (2).

Знание неопределенных множителей  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  позволяет вычислить программные значения управляющих воздействий по формуле

$$\mathbf{Q}_{\text{пр}} = \mathbf{V}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t). \quad (5)$$

После подсчета обобщенных сил по формуле (5) можно вычислить напряжения, при подаче которых на двигатели будут реализованы требуемые моменты. Предполагается, что манипулятор приводится в движение такими же двигателями, какие вращают ведущие колеса платформы.

Из выражений, описывающих обобщенные силы  $Q_V$  и  $Q_\Omega$ , получим следующие формулы для вычисления напряжений  $U_1$  и  $U_2$ , которые необходимо подать на ведущие двигатели платформы в процессе движения схвата по заданной траектории:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a_1} \left( Q_V + \frac{2c_2 n^2 V}{r^2} \right) + \frac{1}{a_2} \left( Q_\Omega + \frac{2c_2 n^2 l^2 \Omega}{r^2} \right) \right]; \\ U_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a_1} \left( Q_V + \frac{2c_2 n^2 V}{r^2} \right) - \frac{1}{a_2} \left( Q_\Omega + \frac{2c_2 n^2 l^2 \Omega}{r^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (6) использованы следующие обозначения  $a_1 = \frac{c_1 n}{r}$ ;  $a_2 = \frac{c_1 n l}{r}$ .

Вычислим напряжения, которые необходимо подать на двигатели манипулятора:

$$\begin{aligned} U_3 &= \frac{1}{c_1} \left( \frac{Q_\delta}{n_\delta} + c_2 n_\delta \omega_3 \right); \\ U_4 &= \frac{1}{c_1} \left( \frac{Q_\alpha - m_2 g s \sin \alpha}{n_\alpha} + c_2 n_\alpha \omega_4 \right); \\ U_5 &= \frac{1}{c_1} \left( \frac{Q_s + m_2 g \cos \alpha}{n_s} r_s + c_2 n_s \frac{u}{r_s} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Ток каждого двигателя определим приближенно по следующим формулам:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{U_1 - c\omega_1}{R}; \quad i_2 = \frac{U_2 - c\omega_2}{R}; \quad i_3 = \frac{U_3 - c n_\delta \omega_3}{R}; \\ i_4 &= \frac{U_4 - c n_\alpha \omega_4}{R}; \quad i_5 = \frac{U_5 - c n_s (u/r_s)}{R}; \quad \omega_5 = u/r_s, \end{aligned}$$

где  $R$  — сопротивление обмоток двигателей;  $c$  — постоянный коэффициент.

### Оценка энергетических затрат при движении мобильного манипулятора

Оценка энергетических затрат проведена при реализации управлений, осуществляющих движение схвата вдоль прямой и винтовой линий. Расход энергии при работе электронных блоков в работе не рассматривается. Исследуется расход энергии при работе двигателей ведущих колес платформы и привода манипулятора. Это можно сделать, поскольку, как уже было показано, напряжения, подаваемые на двигатели и токи, протекающие в них, вычисляются для рассмотренных движений схвата манипулятора. Вычисления проводятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned} W_p &= \int_{t_0}^{t_k} (U_1(t)i_1(t) + U_2(t)i_2(t)) dt; \\ W_m &= \int_{t_0}^{t_k} (U_3(t)i_3(t) + U_4(t)i_4(t) + U_5(t)i_5(t)) dt; \\ W_\Sigma &= W_p + W_m, \end{aligned}$$

где  $W_p$ ,  $W_m$ ,  $W_\Sigma$  — энергия, затрачиваемая соответственно двигателями платформы, двигателями манипулятора, и общая энергия. Оценка энергозатрат проведена на интервале времени  $t_0 = 0$ ,  $t_k = 30$  с.

В табл. 1, 2 приведены результаты расчета затрат энергии при движении манипулятора по винтовой и прямой линиям при различных начальных условиях (НУ).

Данные, приведенные в табл. 1, 2, показывают, что распределение затрат энергии между платформой и манипулятором зависит от траектории движения схвата и начальных условий.

### Оптимальный выбор передаточных чисел редукторов в приводах мобильного манипулятора

Вопрос о выборе оптимальных передаточных чисел редукторов в приводах мобильного манипулятора до-

Таблица 1

Энергетические затраты при движении схвата по винтовой линии, Дж

Начальное условие	Платформа	Манипулятор	Общие затраты
НУ 1	48,53	49,53	98,06
НУ 2	63,05	52,25	115,30
НУ 3	99,4	53,43	152,83

Таблица 2

Энергетические затраты при движении схвата по прямой линии, Дж

Начальное условие	Платформа	Манипулятор	Общие затраты
НУ 1	57,68	92,27	149,95
НУ 2	67,45	97,84	165,29
НУ 3	122,65	62,92	185,56

статочно важен, так как рассматриваемое устройство является автономным. От выбора коэффициентов редукции зависит эффективность и надежность электропривода. В качестве критерия оптимизации рассмотрим минимум энергозатрат во время движения манипулятора при ограничениях на напряжения, подаваемые на двигатели.

Оптимизация передаточных чисел редукторов производится в случаях фиксированной и переменной длины штанги манипулятора. В качестве критерия выбора рассматривается минимум энергозатрат при движении по заданной траектории. На рис. 2 представлены затраты энергии в зависимости от передаточного числа редуктора по углу  $\alpha$  при движении манипулятора с фиксированной длиной по прямой линии (длина штанги равна 1,5 м) в зависимости от начальных условий. Энергозатраты, когда схват движется по прямой при разных длинах штанги и НУ 1, представлены на рис. 3.

При разных начальных условиях и длинах манипулятора оптимальные значения передаточного числа

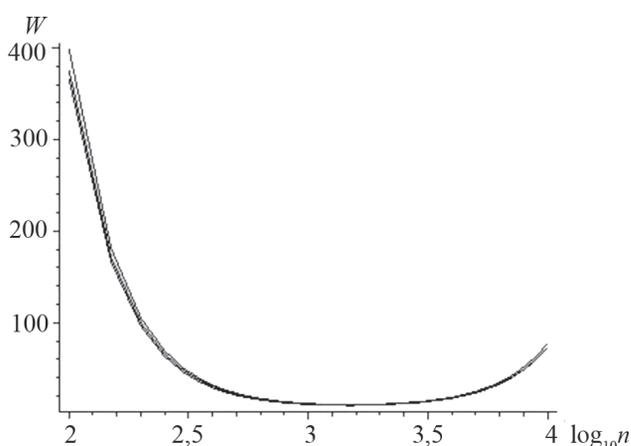


Рис. 2. Затраты энергии манипулятором со штангой фиксированной длины

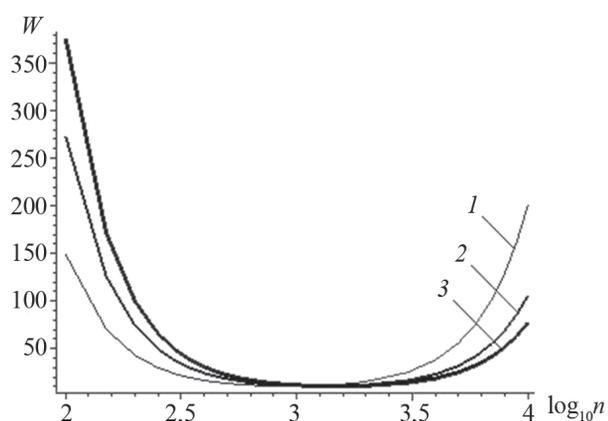


Рис. 3. Затраты энергии манипуляторов со штангами разной длины:

1 — длина штанги 1 м; 2 — то же 1,3 м; 3 — 1,5 м

редуктора очень близки, при этом энергозатраты почти одинаковы. На рис. 3 видно, что при значении передаточного числа  $n$  меньше оптимального и при движении по одной и той же линии манипулятор с более короткой штангой затрачивает меньше энергии по сравнению с манипулятором с более длинной штангой. При  $n$  больше оптимального наблюдается обратная ситуация. Это объясняется тем, что при малых  $n$  более длинный манипулятор тратит больше энергии на компенсацию момента силы тяжести схвата. При больших значениях  $n$  существенным становится поддержание заданной скорости движения схвата в этом случае манипулятор с более короткой штангой тратит больше энергии. Оптимальное значение передаточного числа редуктора в приводе по углу  $\alpha$  для манипулятора фиксированной длины составляет  $n \approx 1100$ .

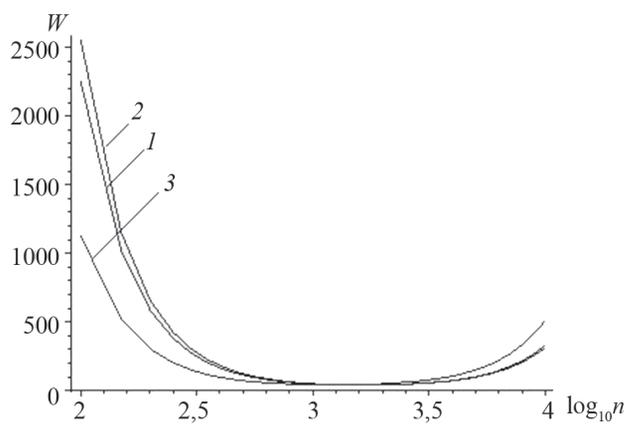
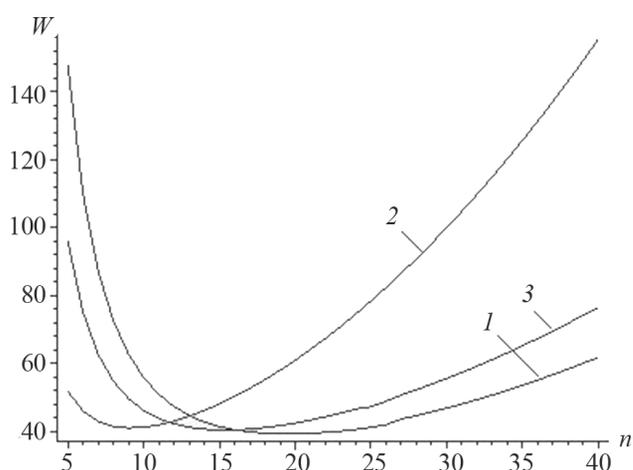
Для манипулятора со штангой переменной длины сначала оценивались энергозатраты при изменении передаточного числа редуктора привода по углу  $\alpha$  при фиксированном значении передаточного числа редуктора по координате  $s$  (рис. 4). Схват двигался по прямой линии с начальными условиями (рис. 5). По минимуму затрат энергии выбиралось передаточное число по углу  $\alpha$ , далее производился выбор передаточного числа редуктора по координате  $s$ .

Анализ рис. 4, 5 показывает, что оптимальные значения передаточного числа редуктора по углу  $\alpha$  совпадают для манипуляторов с фиксированной и переменной длиной.

## Заключение

Построена математическая модель мобильного телескопического манипулятора. Проведено численное моделирование программного движения схвата, заданного в виде неголономной связи, накладывающей ограничение на скорость схвата.

По результатам численных расчетов выбраны оптимальные значения передаточных чисел редукторов приводов манипулятора по критерию минимума энергозатрат при движении схвата по заданной траектории.

Рис. 4. Выбор коэффициента редукции по углу  $\alpha$  ( $n_\alpha = 1100$ )Рис. 5. Выбор коэффициента редукции по координате  $s$  ( $n_s = 30$ )

## Литература

1. Мартыненко Ю.Г., Орлов И.В. Алгоритмы управления мобильным манипулятором: Материалы научной школы-конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы». М., 2002. С. 142—155.
2. Орлов И.В. Моделирование механической системы в среде символьных вычислений Mathematica: Труды МНПК «Информатизация инженерного образования». М., 2016. С. 382—385.

## References

1. Martynenko Ju.G., Orlov I.V. Algoritmy Upravlenija Mobil'nym Manipuljatorom: Materialy Nauchnoj Shkoly-Konferencii «Mobil'nye Roboty i Mehatronnye Sistemy». M., 2002:142—155. (in Russian).
2. Orlov I.V. Modelirovanie Mehanicheskoy Sistemy v Srede Simvol'nyh Vychislenij Mathematica: Trudy MNPK «Informatizacija Inzhenerного Obrazovanija». M., 2016:382—385. (in Russian).

Статья поступила в редакцию 15.07.2016