

УДК 624.042.7

DOI: 10.24160/1993-6982-2017-4-28-35

Обобщение линейно-спектрального метода для общего случая пространственного интегрального сейсмического воздействия

Е.В. Позняк, О.В. Новикова

Линейно-спектральный метод — один из самых распространенных инженерных методов расчета конструкций на сейсмостойкость. Однако в специализированной литературе чаще всего приводится его описание для расчетных схем с диагональной матрицей масс и для горизонтального движения грунта. Цель статьи — показать возможность применения линейно-спектрального метода к самому общему случаю пространственного интегрального движения грунта, включающего три поступательные и три ротационные компоненты, и для произвольных расчетных схем. Интегральное сейсмическое воздействие задается в виде шести-компонентного вектора осредненного движения объема грунта под конструкцией. Интенсивность сейсмического воздействия вводится как максимальное значение модуля вектора сейсмического воздействия. Приведена теория спектрального метода, заключающаяся в решении уравнений относительного движения в пространстве главных координат; применении квазистатического метода и введении спектральных коэффициентов динамичности; определении направлений сейсмических сил из условия максимума динамической реакции по каждой собственной форме колебаний; выводе компактных матричных выражений для модальных внутренних усилий (при этом предполагается, что матрица инерции не обязательно диагональная).

Показан пример расчета динамической реакции простой пространственной модели линейно-спектральным методом. Рассмотрена жесткая плита на четырех стойках различной жесткости под двухкомпонентным сейсмическим воздействием. С учетом опасных направлений сейсмического воздействия получены модальные и полные расчетные усилия по каждой обобщенной координате.

Ключевые слова: линейно-спектральный метод, сейсмическое движение грунта, пространственное интегральное сейсмическое воздействие, сейсмические ротации, модальная динамическая реакция.

Для цитирования: Позняк Е.В., Новикова О.В. Обобщение линейно-спектрального метода для общего случая пространственного интегрального сейсмического воздействия // Вестник МЭИ. 2017. № 4. С. 28—35. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-4-28-35.

Extending the Response Spectrum Method for the General Case of Spatial Integrated Seismic Load

E.V. Poznyak, O.V. Novikova

The response spectrum method (RSM) is the most commonly used technique for seismic design of structures. However, the description of this method that is given in dedicated literature applies in the majority of cases to analysis arrangements involving a diagonal matrix of masses and for horizontal seismic ground motions. The aim of this article is to show the possibility of applying the RSM to the most general case of spatial integrated ground motion, which includes three translational and three rotational components, and for arbitrary analysis structures. The integrated seismic load is specified in the form of a six-component vector of ground motion averaged over the ground volume under the structure. The seismic load intensity is defined as the maximum value of the seismic load vector modulus. The article presents the spectral method theory, the essence of which lies in the following. The equations of relative motion written in the space of main coordinates are solved; a quasistatic approach is used taking into account spectral dynamic amplification factors; the seismic force directions are determined from the condition of maximum dynamic response corresponding to each natural vibration mode; and expressions for the modal internal forces written in compact matrix form are derived (in so doing, it is assumed that the inertia matrix is not necessarily a diagonal one).

An example of calculating the dynamic response for a simple spatial model using the RSM is given. A rigid plate resting on four columns having different stiffness values and subjected to a two-component seismic load is considered. The modal and full calculated forces along each generalized coordinate are obtained taking into account the dangerous directions of seismic ground motion.

Key words: response spectrum method, seismic ground motion, spatial integrated seismic load, seismic rotations, modal dynamic response.

For citation: Poznyak E.V., Novikova O.V. Extending the Response Spectrum Method for the General Case of Spatial Integrated Seismic Load. MPEI Vestnik. 2017; 4: 28—35. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-4-28-35.

Введение

Линейно-спектральный метод (ЛСМ) до сих пор остается самым распространенным методом решения линейных задач теории сейсмостойкости. Предложенный М.А. Био в 1932 г. [1, 2], ЛСМ стал базовым методом динамической теории сейсмостойкости, интенсивно развивавшейся в нашей стране в 30—50-е гг. XX в. благодаря трудам К.С. Завриева [3], А.Г. Назарова [4], И.Л. Корчинского [5] и многих других ученых. Однако с середины прошлого века спектральный метод мало изменился и по-прежнему применяется в инженерной практике в основном для простых регулярных моделей и поступательного сейсмического движения. В настоящей работе показано, как можно обобщить ЛСМ на пространственное интегральное движение грунта, и приведены компактные формулы в матричном виде для внутренних модальных усилий.

Интегральная модель предполагает согласованное движение грунта в некоторой области земной поверхности. Объем грунта под зданием движется как абсолютно твердое тело с шестью степенями свободы — тремя поступательными и тремя угловыми (или ротационными). Область осреднения сейсмического движения должна быть соизмерима с длинами доминирующих волн спектра сейсмического воздействия, несущих основную энергию воздействия [6]. В пользу применения интегральной модели говорят следующие признаки объекта: твердые породы в основании, для которых характерны большие скорости распространения сейсмических волн, наличие жесткого фундамента с компактными размерами в плане.

Уравнения движения записываются в относительных координатах, при этом в правой части появляются переносные силы инерции, линейно зависящие от компонент ускорения грунта. Применение ЛСМ представляет собой сочетание модального анализа и квазистатического подхода, когда приведенные к собственным формам переносные сейсмические силы заменяются на постоянные статические. Переносные силы зависят от ускорений, которые задают в виде произведения постоянной сейсмической интенсивности на спектральный коэффициент динамичности. Рассмотрим простой пример применения ЛСМ к интегральной и дифференцированной сейсмическим нагрузкам. Это расчет внутренних усилий для бетонной плиты со смещенным центром жесткости на 4 колоннах под двухкомпонентным сейсмическим воздействием.

Параметры интегрального сейсмического воздействия

Интегральное воздействие является результатом осреднения поля сейсмических перемещений под зданием и представляет собой вектор сейсмического воздействия, состоящий в общем случае из трех поступательных и трех ротационных компонент. В этом случае

движение основания описывается трехкомпонентными векторами поступательного и углового (ротационного) перемещений \mathbf{X}_0 , \mathbf{a}_0 , скоростей $\dot{\mathbf{X}}_0$, $\dot{\mathbf{a}}_0$ и ускорений $\ddot{\mathbf{X}}_0$, $\ddot{\mathbf{a}}_0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_0(t) &= (X_{10} \ X_{20} \ X_{30})^T; & \mathbf{a}_0(t) &= (\alpha_{10} \ \alpha_{20} \ \alpha_{30})^T; \\ \dot{\mathbf{X}}_0(t) &= (\dot{X}_{10} \ \dot{X}_{20} \ \dot{X}_{30})^T; & \dot{\mathbf{a}}_0(t) &= (\dot{\alpha}_{10} \ \dot{\alpha}_{20} \ \dot{\alpha}_{30})^T; \\ \ddot{\mathbf{X}}_0(t) &= (\ddot{X}_{10} \ \ddot{X}_{20} \ \ddot{X}_{30})^T; & \ddot{\mathbf{a}}_0(t) &= (\ddot{\alpha}_{10} \ \ddot{\alpha}_{20} \ \ddot{\alpha}_{30})^T\end{aligned}$$

или шестикомпонентными векторами

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_0(t) &= (\mathbf{X}_0 \ \mathbf{a}_0)^T = (X_{10} \ X_{20} \ X_{30} \ \alpha_{10} \ \alpha_{20} \ \alpha_{30})^T; \\ \dot{\mathbf{q}}_0(t) &= (\dot{\mathbf{X}}_0 \ \dot{\mathbf{a}}_0)^T = (\dot{X}_{10} \ \dot{X}_{20} \ \dot{X}_{30} \ \dot{\alpha}_{10} \ \dot{\alpha}_{20} \ \dot{\alpha}_{30})^T; \\ \ddot{\mathbf{q}}_0(t) &= (\ddot{\mathbf{X}}_0 \ \ddot{\mathbf{a}}_0)^T = (\ddot{X}_{10} \ \ddot{X}_{20} \ \ddot{X}_{30} \ \ddot{\alpha}_{10} \ \ddot{\alpha}_{20} \ \ddot{\alpha}_{30})^T.\end{aligned}\quad (1)$$

Нуль в индексации означает, что векторы имеют начало в центре приведения вектора сейсмической нагрузки. Для определенности совместим эту точку с началом координат основных (глобальных) осей конструкции.

Каждую координату вектора $\ddot{\mathbf{q}}_0$ можно представить в виде произведения модуля вектора поступательного или ротационного движения на соответствующие направляющие косинусы. Модули векторов поступательного и углового движения рассчитывают по формулам

$$\begin{aligned}|\ddot{\mathbf{X}}_0| &= \sqrt{\ddot{X}_{10}^2 + \ddot{X}_{20}^2 + \ddot{X}_{30}^2}; \\ |\ddot{\mathbf{a}}_0| &= \sqrt{\ddot{\alpha}_{10}^2 + \ddot{\alpha}_{20}^2 + \ddot{\alpha}_{30}^2}.\end{aligned}$$

Направляющие косинусы векторов $\ddot{\mathbf{X}}_0$, $\ddot{\mathbf{a}}_0$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_X(t) &= (v_{1X} \ v_{2X} \ v_{3X})^T; \\ \mathbf{v}_a(t) &= (v_{1a} \ v_{2a} \ v_{3a})^T\end{aligned}$$

имеют координаты

$$\begin{aligned}v_{1X} &= \frac{\ddot{X}_{10}}{|\ddot{\mathbf{X}}_0|}; & v_{2X} &= \frac{\ddot{X}_{20}}{|\ddot{\mathbf{X}}_0|}; & v_{3X} &= \frac{\ddot{X}_{30}}{|\ddot{\mathbf{X}}_0|}; \\ v_{1a} &= \frac{\ddot{\alpha}_{10}}{|\ddot{\mathbf{a}}_0|}; & v_{2a} &= \frac{\ddot{\alpha}_{20}}{|\ddot{\mathbf{a}}_0|}; & v_{3a} &= \frac{\ddot{\alpha}_{30}}{|\ddot{\mathbf{a}}_0|}\end{aligned}$$

и связаны условиями нормировки

$$\begin{aligned}v_{1X}^2 + v_{2X}^2 + v_{3X}^2 &= 1; \\ v_{1a}^2 + v_{2a}^2 + v_{3a}^2 &= 1.\end{aligned}$$

Введем относительную интенсивность углового ускорения $w = |\ddot{\mathbf{a}}_0|/|\ddot{\mathbf{X}}_0|$. Объединим векторы направляющих косинусов \mathbf{v}_X и \mathbf{v}_a в единый вектор направления сейсмического воздействия

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_X \\ w\mathbf{v}_a \end{pmatrix} = (v_{1X} \ v_{2X} \ v_{3X} \ wv_{1a} \ wv_{2a} \ wv_{3a})^T.$$

Тогда шестикомпонентный вектор сейсмического ускорения грунта

$$\ddot{\mathbf{q}}_0(t) = |\ddot{\mathbf{X}}_0| \mathbf{v}(t).$$

В квазистатической постановке вектор $\ddot{\mathbf{q}}^0$ не зависит от времени. Интенсивностью поступательного и ротационного движения грунта назовем скалярные величины

$$I_X = \max |\ddot{X}_0|; \quad I_\alpha = \max |\ddot{\alpha}_0|,$$

а отношение $w = I_\alpha/I_X$ — относительной интенсивностью углового ускорения. Методы оценки ротационных акселерограмм по записям поступательного движения описаны в [7—9]. При отсутствии данных о прогнозируемом землетрясении значение w можно принять равным $2 \cdot 10^{-2}$, $6 \cdot 10^{-2}$, $9 \cdot 10^{-2}$ м⁻¹ для грунта I ($c_2 \geq 500$ м/с), II ($c_2 = 200$ м/с) и III ($c_2 \leq 50$ м/с) категорий соответственно [6]. Эти оценки получены Ю.П. Назаровым после анализа ротационных акселерограмм движения, сгенерированных по природным записям с учетом различных грунтовых условий.

Вектор \mathbf{v} будем считать соответствующим известному заданному направлению. Тогда $\ddot{\mathbf{q}}_0 = I_X \mathbf{v}$.

Уравнения относительного движения для интегрального сейсмического воздействия

Уравнение относительного движения диссипативной системы с n степенями свободы имеет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{q}^{[n]}$ — вектор относительных обобщенных перемещений; $\mathbf{M}^{[n \times n]}$, $\mathbf{B}^{[n \times n]}$, $\mathbf{K}^{[n \times n]}$, $\mathbf{M}_s^{[n \times 6]}$ — матрицы инерции, демпфирования, жесткости и переносных инерционных коэффициентов; $\ddot{\mathbf{q}}_0^{[6]}$ — вектор ускорений (1); $-\mathbf{M}_s^{[n \times 6]; [6]}$ — вектор переносных сейсмических сил.

Пример. Получим уравнение движения абсолютно жесткой плиты на четырех стойках различной жесткости в направлениях $O1$, $O2$ k_{1i} , k_{2i} ($i = 1, \dots, 4$) (рис. 1). Сейсмическое воздействие задано вектором $\ddot{\mathbf{q}}_0 = (\ddot{X}_{10} \quad \ddot{X}_{20})^T$. Масса плиты и момент инерции относительно главной центральной оси $C3$ равны m и θ_{3C} . Демпфированием можно пренебречь.

Особенность этой модели в том, что центр масс плиты C и центр жесткости O не совпадают. Координаты центра жесткости O (x_{1C} x_{2C}) определяются относительно центральных осей $C123$ из уравнения равновесия (равнодействующая поперечных сил не создает момент относительно точки O)

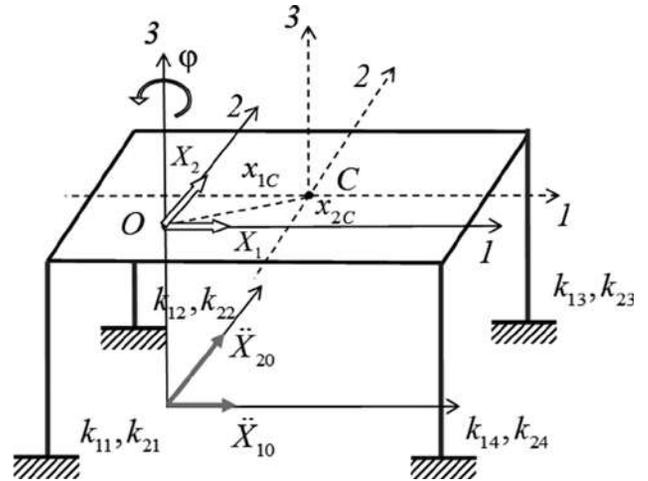


Рис. 1. Пространственная модель с несовпадающими центрами масс и жесткости

$$x_{1C} = \frac{\sum_{i=1}^4 k_{2i} x_{1i}}{\sum_{i=1}^4 k_{2i}}; \quad x_{2C} = \frac{\sum_{i=1}^4 k_{1i} x_{2i}}{\sum_{i=1}^4 k_{1i}}, \quad (3)$$

где x_{1i} , x_{2i} — координаты i -й стойки в центральных осях $CXYZ$.

Введем относительные обобщенные координаты (см. рис. 1), описывающие движение центра жесткости плиты O : линейные перемещения X_1 , X_2 вдоль осей $O1$, $O2$ и угловое φ в горизонтальной плоскости относительно точки O . Перемещения верхних торцов стоек $1 — 4$ вдоль осей $O1$, $O2$ при перемещениях X_1 , X_2 (рис. 2, а, б) и при повороте на малый угол φ показаны на рис. 2, в.

Перемещения i -й стойки при повороте на малый угол φ и перемещениях в направлениях $O1$, $O2$ равны $X_{1i} = X_1 - \varphi x_{2i}$ и $X_{2i} = X_2 + \varphi x_{1i}$, здесь x_{1i} , x_{2i} — координаты i -й стойки относительно точки O (на рис. 2, в перемещения $x_{1i}\varphi$, $x_{2i}\varphi$ показаны с учетом знаков координат x_{1i} , x_{2i}). Суммарные поперечные силы в стойках при их перемещениях X_{1i} , X_{2i} составляют

$$Q_1 = \sum_{i=1}^4 Q_{1i} = \sum_{i=1}^4 X_{1i} k_{1i} = \sum_{i=1}^4 X_1 k_{1i} - \sum_{i=1}^4 k_{1i} x_{2i} \varphi = K_1 X_1 + K_{13} \varphi;$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^4 Q_{2i} = \sum_{i=1}^4 X_{2i} k_{2i} = \sum_{i=1}^4 X_2 k_{2i} + \sum_{i=1}^4 k_{2i} x_{1i} \varphi = K_2 X_2 + K_{23} \varphi,$$

где

$$K_1 = \sum_{i=1}^4 k_{1i}; \quad K_2 = \sum_{i=1}^4 k_{2i};$$

$$K_{13} = -\sum_{i=1}^4 k_{1i} x_{2i}; \quad K_{23} = \sum_{i=1}^4 k_{2i} x_{1i}.$$

Момент от поперечных сил относительно оси $O3$

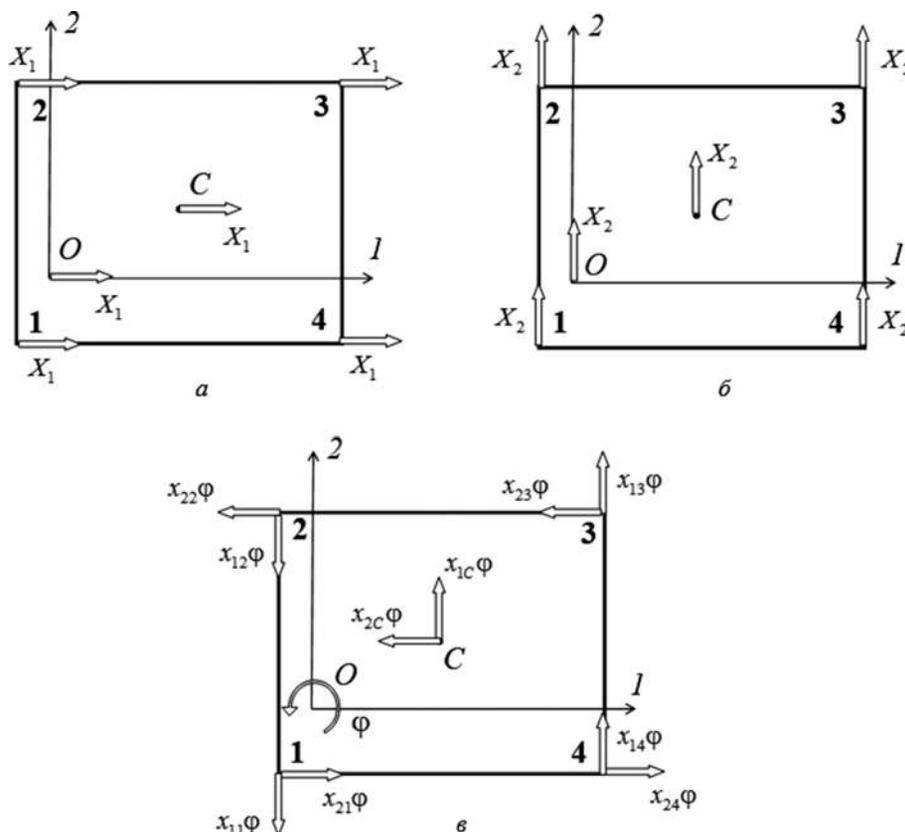


Рис. 2. Перемещения стоек и центра тяжести

$$\begin{aligned}
 L_3 &= \sum_{i=1}^4 (Q_{2i}x_{1i} - Q_{1i}x_{2i}) = \sum_{i=1}^4 k_{2i}x_{1i}X_{2i} - \\
 &- \sum_{i=1}^4 k_{1i}x_{2i}X_{1i} = \sum_{i=1}^4 k_{2i}x_{1i}(X_2 + \varphi x_{1i}) - \\
 &- \sum_{i=1}^4 k_{1i}x_{2i}(X_1 - \varphi x_{2i}) = X_2 \sum_{i=1}^4 k_{2i}x_{1i} + \\
 &+ \varphi \sum_{i=1}^4 k_{2i}x_{1i}^2 - X_1 \sum_{i=1}^4 k_{1i}x_{2i} + \varphi \sum_{i=1}^4 k_{1i}x_{2i}^2 = \\
 &= X_1 K_{31} + X_2 K_{32} + \varphi K_3; \\
 K_{31} &= -\sum_{i=1}^4 k_{1i}x_{2i}; \quad K_{32} = \sum_{i=1}^4 k_{2i}x_{1i}; \\
 K_3 &= \sum_{i=1}^4 (k_{1i}x_{12i}^2 + k_{2i}x_{1i}^2).
 \end{aligned}$$

Так как координаты центра жесткости в осях $O123$ равны нулю, из (3) следует, что $K_{13} = K_{23} = K_{31} = K_{32} = 0$.

Абсолютные ускорения центра масс C в двух направлениях равны $\ddot{X}_{10} + \ddot{X}_1 - \ddot{\varphi}x_{2C}$, $\ddot{X}_{20} + \ddot{X}_2 + \ddot{\varphi}x_{1C}$, им соответствуют силы инерции $m(\ddot{X}_{10} + \ddot{X}_1 - \ddot{\varphi}x_{2C})$, $m(\ddot{X}_{20} + \ddot{X}_2 + \ddot{\varphi}x_{1C})$. Момент от сил инерции относительно центра жесткости O

$$\theta_{3O}\ddot{\varphi} - x_{2C}m(\ddot{X}_{10} + \ddot{X}_1 - \ddot{\varphi}x_{2C}) + x_{1C}m(\ddot{X}_{20} + \ddot{X}_2 + \ddot{\varphi}x_{1C}).$$

Записывая уравнения равновесия в относительных координатах по принципу Даламбера как сумму всех

сил вдоль осей O_1 и O_2 и сумму моментов относительно O_3 , получим уравнения движения:

$$\begin{cases}
 m\ddot{X}_1 - mx_{2C}\ddot{\varphi} + K_1X_1 = -m\ddot{X}_{10}; \\
 m\ddot{X}_2 + mx_{1C}\ddot{\varphi} + K_2X_2 = -m\ddot{X}_{20}; \\
 \theta_{3O}\ddot{\varphi} - mx_{2C}\ddot{X}_1 + mx_{1C}\ddot{X}_2 + K_3\varphi = -m(-\ddot{X}_{10}x_{2C} + \ddot{X}_{20}x_{1C}),
 \end{cases}$$

где $\theta_{3O} = \theta_{3C} + m(x_{1C}^2 + x_{2C}^2)$.

Запишем уравнения движения в матричном виде относительно вектора обобщенных координат $\mathbf{q} = (X_1 \ X_2 \ \varphi)^T$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0,$$

где \mathbf{K} — матрица жесткости; \mathbf{M} , \mathbf{M}_s — матрицы инерции и переносных инерционных коэффициентов; $\ddot{\mathbf{q}}_0 = (\ddot{X}_{10} \ \ddot{X}_{20})^T$ — вектор сейсмического воздействия,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} m & 0 & -mx_{2C} \\ 0 & m & mx_{1C} \\ -mx_{2C} & mx_{1C} & \theta_{3O} \end{pmatrix}; \\
 \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{pmatrix}; \\
 \mathbf{M}_s &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \\ -mx_{2C} & mx_{1C} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Линейно-спектральный метод для интегрального сейсмического воздействия

Модальный анализ и квазистатическое решение

Для решения уравнений (2) применим метод разложения по собственным формам. Будем считать известными матрицу собственных векторов $\mathbf{V}^{[n \times n]}$ системы (2) и диагональную матрицу квадратов собственных частот $\mathbf{\Omega}^2$. Осуществим переход к главным координатам с помощью ортогонального преобразования $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{n}$. В пространстве главных координат система уравнений (2) превращается в набор не связанных между собой дифференциальных уравнений второго порядка, каждое из которых соответствует движению одномассового осциллятора. Пусть демпфирование в системе мало.

С учетом свойств матрицы собственных форм $\mathbf{KV} = \mathbf{MV}\mathbf{\Omega}^2$, $\mathbf{V}^T\mathbf{MV} = \mathbf{M}_{\text{mod}}$ и при малом демпфировании система уравнений (2) примет вид

$$\ddot{\mathbf{u}} + 2\mathbf{\varepsilon}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{u} = \mathbf{Q}, \quad (5)$$

где $\mathbf{u}^{[n]}$ — вектор главных координат; $\mathbf{Q}^{[n]} = -\mathbf{M}_{\text{mod}}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0$ — вектор переносных сейсмических сил, приведенный к главным координатам.

При малой диссипации матрица демпфирования $\mathbf{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mathbf{M}_{\text{mod}}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{BV}$ может считаться диагональной: $\mathbf{\varepsilon} = \text{diag}(\varepsilon_k)$, где ε_k — модальный коэффициент демпфирования по k -й собственной форме. Уравнение (5) в покомпонентном виде выглядит как

$$\ddot{u}_k + 2\varepsilon_k\dot{u}_k + \Omega_k^2 u_k = Q_k, \quad (6)$$

где $Q_k = -\frac{1}{M_{\text{mod},k}}\mathbf{v}_k^T\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}_0$.

Найдем квазистатическое решение уравнения (6). В квазистатической постановке вектор сейсмической нагрузки становится вектором с постоянными коэффициентами $\ddot{\mathbf{q}}_0 = I_X\mathbf{v} = \text{const}$, тогда $Q_k = -\frac{I_X}{M_{\text{mod},k}}\mathbf{v}_k^T\mathbf{M}_s\mathbf{v}$.

Смысл постоянных во времени направляющих косинусов оставим неопределенным; он прояснится позже, когда вектор \mathbf{v} будет трактоваться либо как вектор опасных направлений сейсмического воздействия, либо как известное заданное направление.

Модальное перемещение от статической нагрузки

$$u_k^{\text{ст}} = -\frac{I_X}{M_{\text{mod},k}\Omega_k^2}\mathbf{v}_k^T\mathbf{M}_s\mathbf{v}^{[6]}.$$

Динамические перемещения получим, умножив статические $u_k^{\text{ст}}$ на модальный коэффициент динамичности:

$$u_k = \beta_k u_k^{\text{ст}} = -\frac{\beta_k I_X}{M_{\text{mod},k}\Omega_k^2}\mathbf{v}_k^T\mathbf{M}_s\mathbf{v}^{[6]}. \quad (7)$$

Вектор обобщенных координат \mathbf{q} разложим по собственным формам \mathbf{v}_k :

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n u_k \mathbf{v}_k.$$

Принимая во внимание, что $\mathbf{KV} = \mathbf{MV}\mathbf{\Omega}^2$, получим вектор отклика системы на сейсмическое воздействие \mathbf{S} в виде суммы векторов модальных откликов \mathbf{S}_k :

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}\mathbf{q} = \sum_{k=1}^n u_k \mathbf{K}\mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n u_k \mathbf{\Omega}_k^2 \mathbf{M}\mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{S}_k,$$

здесь $\mathbf{S}_k = u_k \mathbf{\Omega}_k^2 \mathbf{M}\mathbf{v}_k$ — вектор модальных усилий по k -й форме; u_k — модальное перемещение (7) в главных координатах по этой форме.

Представим i -ю строку матрицы инерции \mathbf{M} (матрица \mathbf{M} не обязательно диагональная) в виде вектора-строки \mathbf{m}_i^T , $i = 1, \dots, n$. Такое представление дает возможность записать вектор \mathbf{S}_k в покомпонентной форме:

$$S_{ik} = \Omega_k^2 \mathbf{m}_i^T \mathbf{v}_k u_k, \quad (8)$$

здесь S_{ik} — модальное внутреннее усилие по k -й собственной форме, действующее в направлении i -й обобщенной координаты.

По формуле (8) с учетом (7) получим величину модального внутреннего усилия S_{ik} (модальное усилие по k -й собственной форме, действующее в направлении i -й обобщенной координаты). Опуская минус, получим

$$S_{ik} = \beta_k I_X \mathbf{m}_i^T \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{v}^{[6]}. \quad (9)$$

Формула (9) применяется для расчета модальных откликов конструкции по различным формам колебаний. Наиболее вероятное значение полного расчетного усилия вычисляется по формуле среднеквадратического осреднения (правило ККСК: квадратный корень из суммы квадратов модальных откликов)

$$S_{i\Sigma} = \sqrt{\sum_{k=1}^N S_{ki}^2},$$

где N — число учитываемых форм колебаний.

Направления сейсмического воздействия

В квазистатической постановке в (9) переменное во времени сейсмическое воздействие заменяется на статическое с постоянной ориентацией в пространстве. Таким образом, следует задать вектор направляющих косинусов \mathbf{v} . Поскольку в этом вопросе существует неопределенность, применяют метод, отражающий один из принципов инженерного подхода: расчетные нагрузки задаются так, чтобы конструкция находилась в наиболее неблагоприятных условиях. Поэтому для каждой формы колебаний с номером k вводится свое индивидуальное опасное направление \mathbf{v}_k , обеспечивающее максимум динамической реакции при движении по этой форме.

Представим матрицу $\mathbf{M}_s^{[n \times 6]}$ в виде шести n -мерных столбцов:

$$\mathbf{M}_s^{[n \times 6]} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{s,1X}^{[n]} & \mathbf{m}_{s,2X}^{[n]} & \mathbf{m}_{s,3X}^{[n]} & \mathbf{m}_{s,1\alpha}^{[n]} & \mathbf{m}_{s,2\alpha}^{[n]} & \mathbf{m}_{s,3\alpha}^{[n]} \end{pmatrix},$$

тогда опасные направления сейсмического воздействия по k -й собственной форме определяются векторами [6]:

для поступательного движения

$$\mathbf{v}_{k,X} = k_1 \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1X} & \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2X} & \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3X} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $k_1 = -\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1X})^2 + (\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2X})^2 + (\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3X})^2}}$;

для ротационного движения

$$\mathbf{v}_{k,\alpha} = k_2 \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1\alpha} & \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2\alpha} & \mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3\alpha} \end{pmatrix},$$

где $k_2 = -\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,1\alpha})^2 + (\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,2\alpha})^2 + (\mathbf{v}_k^T \mathbf{m}_{s,3\alpha})^2}}$.

Добавим, что если имеются сейсмологические данные о наиболее вероятном направлении сейсмического движения, проводят дополнительный расчет и на эти направления.

Пример расчета усилий для интегрального движения грунта

Рассчитаем опасные направления сейсмического воздействия и найдем расчетные усилия. Рассмотрим квадратную бетонную плиту размером в плане 6×6 м толщиной 0,3 м на четырех стальных колоннах кольцевого сечения (внешний диаметр 0,3 м, внутренний — 0,28 м) высотой 3 м. Одна из колонн имеет пониженную по сравнению с остальными жесткость с коэффициентом 0,8. Коэффициенты жесткости $k_{11} = k_{12} = k_{14} = k_{21} = k_{22} = k_{24} = 8,524 \cdot 10^6$ Н/м; $k_{13} = k_{23} = 6,81 \cdot 10^6$ Н/м.

Уравнения движения конструкции представлены ранее.

Координаты центра жесткости, вычисленные по (3), $x_{1C} = x_{2C} = -0,1579$ м. Матрицы инерции, жесткости и переходных инерционных коэффициентов (4):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2,7 \cdot 10^4 \text{ кг} & 0 & 4,3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \\ 0 & 2,7 \cdot 10^4 \text{ кг} & -4,3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \\ 4,3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 & -4,3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 & 1,6 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 32,398 \cdot 10^6 \text{ Н/м} & 0 & 0 \\ 0 & 32,398 \cdot 10^6 \text{ Н/м} & 0 \\ 0 & 0 & 581,392 \cdot 10^6 \text{ Нм} \end{pmatrix};$$

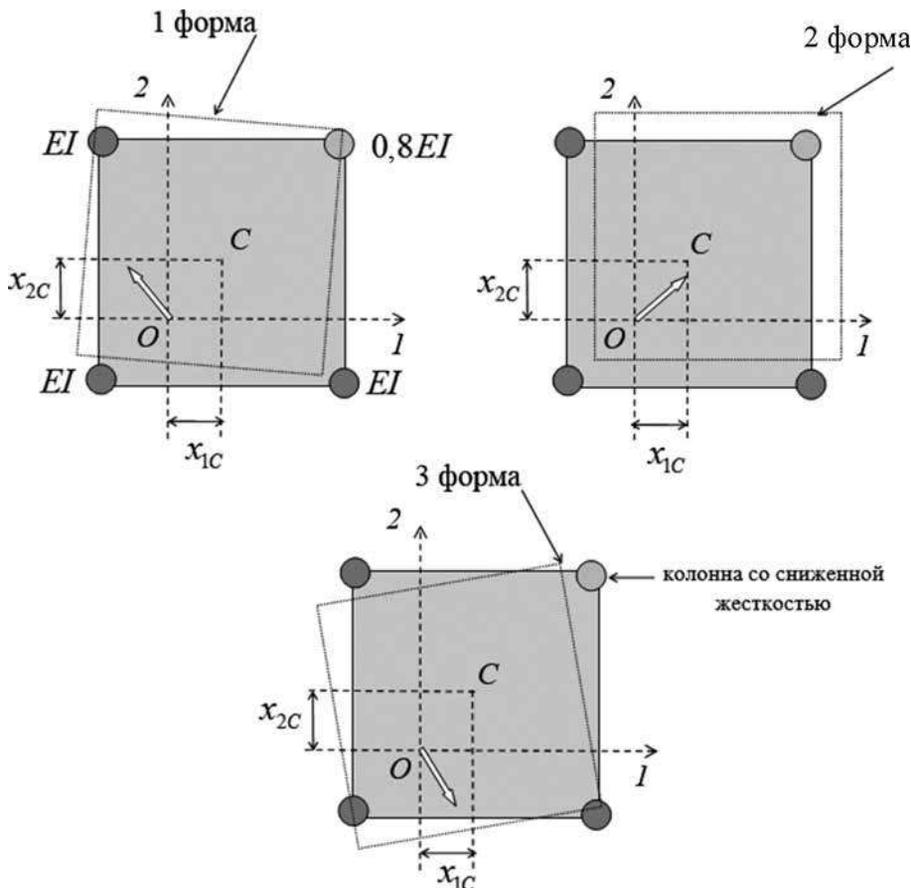


Рис. 3. Опасные направления, соответствующие формам колебаний (показаны белыми стрелками)

$$M_s = \begin{pmatrix} 2,7 \cdot 10^4 \text{ кг} & 0 \\ 0 & 2,7 \cdot 10^4 \text{ кг} \\ 4,3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м} & -4,3 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м} \end{pmatrix}.$$

Собственные частоты $\Omega_1 = 34,56$ рад/с, $\Omega_2 = 34,64$ рад/с, $\Omega_3 = 60,03$ рад/с, матрица форм колебаний

$$V = \begin{pmatrix} -0,0043 & 0,0043 & -5,8743 \cdot 10^{-4} \\ 0,0043 & 0,0043 & 5,8743 \cdot 10^{-4} \\ -1,1289 \cdot 10^{-4} & 0 & 0,0025 \end{pmatrix}.$$

По формуле (10) найдем направляющие косинусы опасных направлений воздействия для каждой из трех форм колебаний:

$$v_1 = (-0,7053 \ 0,7089)^T; v_2 = (0,7204 \ 0,6935)^T; \\ v_3 = (0,5800 \ -0,8146)^T.$$

Формы колебаний (плита — вид сверху) и соответствующие им опасные направления, обозначенные белыми стрелками, показаны на рис. 3. Пусть максимальные ускорения грунта вдоль горизонтальных осей равны 1 м/с^2 , интенсивность $I = 1,41 \text{ м/с}^2$. Для простоты примем коэффициент динамичности $\beta = 2,5$ для всех трех форм (спектральное ускорение $I\beta = \text{м/с}^2$). Модальные усилия по трем формам рассчитаем по формуле (9):

$$S_{\text{int}} = \begin{pmatrix} -68,709 \text{ кН} & 67,338 \text{ кН} & -0,242 \text{ кН} \\ 68,709 \text{ кН} & 67,338 \text{ кН} & 0,242 \text{ кН} \\ -32,524 \text{ кНм} & 0 & 18,387 \text{ кНм} \end{pmatrix}.$$

1 форма 2 форма 3 форма

В столбцах матрицы S_{int} расположены значения модальных усилий по каждой из трех форм колебаний, соответствующие интегральному сейсмическому движению грунта. Полные расчетные усилия по каждой обобщенной координате в соответствии с (10):

$$S_{1\Sigma} = S_{2\Sigma} = \sqrt{68,709^2 + 67,338^2 + 0,242^2} = 96,204 \text{ кН}; \\ S_{3\Sigma} = \sqrt{32,524^2 + 18,387^2} = 37,362 \text{ кНм}.$$

Заключение

Современный инженерный расчет на сейсмостойкость, особенно для протяженных конструкций, не симметричных в плане, при малых скоростях сейсмических волн должен учитывать многокомпонентное движение грунта, включая угловое. В данной работе показано, что ЛСМ можно применять для анализа динамической реакции при общем шестикомпонентном пространственном движении грунта и для недиагональной матрицы инерции, причем выражения для внутренних усилий получаются в компактной форме. Такой подход может быть использован для изложения расчетной методики в нормативных документах по сейсмическим расчетам [10, 11].

Литература

1. **Trifunac M.D.** Brief History Of Computation Of Earthquake Response Spectra // Soil Dynamics and Earthquake Eng. 2006. V. 26. Iss. 6—7. Pp. 501—508.
2. **Trifunac M.D.** Biot Response Spectrum // Ibid. Pp. 491—500.
3. **Завриев К.С.** Динамика сооружений. Тбилиси: Трансжелдориздат, 1946.
4. **Назаров А.Г.** Метод инженерного анализа сейсмических сил. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1959.
5. **Корчинский И.Л.** Колебания высотных зданий. М.: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1953.
6. **Назаров Ю.П.** Аналитические основы расчета сооружений на сейсмические воздействия. М.: Наука, 2010.
7. **Nazarov Y.P., Poznyak E.V., Filimonov A.V.** Seismic Data Analysis in Odyssey Software // Int. J. of Emerging Technologies in Computational and Appl. Sci. 2014. V. 7. No. 4. Pp. 114—115.
8. **Назаров Ю.П., Позняк Е.В.** Оценка ротационных компонент сейсмического движения грунта // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2015. № 6. С. 22—26.
9. **Nazarov Yu.P., Poznyak E.V., Filimonov A.V.** A Brief Theory and Computing of Seismic Ground Rotations for Structural Analyses // Soil Dynamics and Earthquake Eng. 2015. V. 71. Pp. 31—41.
10. **Назаров Ю.П., Позняк Е.В.** Определение коэффициента динамичности в расчетах на сейсмостойкость [Электронный ресурс]. <http://www.nso-journal.ru> (дата обращения 25.04.2016).
11. **Назаров Ю.П., Позняк Е.В.** О пространственной изменчивости сейсмических движений грунта при расчете сооружений // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2014. № 5. С. 17—20.

References

1. **Trifunac M.D.** Brief history Of Computation Of Earthquake Response Spectra. Soil Dynamics and Earthquake Eng. 2006;26;6—7:501—508.
2. **Trifunac M.D.** Biot Response Spectrum. Ibid:491—500.
3. **Zavriev K.S.** Dinamika Sooruzhenii. Tbilisi: Transzheldorizdat, 1946. (in Russian).
4. **Nazarov A.G.** Metod Inzhenernogo Analiza Seismicheskikh Sil. Erevan: Izd-vo AN Arm SSR, 1959. (in Russian).
5. **Korchinskii I.L.** Kolebaniia Vysotnykh Zdanii. M.: Gos. Izd-Vo Literatury po Stroitelstvu i Arkhitekture, 1953. (in Russian).
6. **Nazarov Yu.P.** Analiticheskie Osnovy Rascheta Sooruzhenii na Seismicheskie Vozdeistviia. M.: Nauka, 2010. (in Russian).

7. **Nazarov Y.P., Poznyak E.V., Filimonov A.V.** Seismic Data Analysis in Odyssey Software. *Int. J. of Emerging Technologies in Computational and Appl. Sci.* 2014;7;4:114—115.

8. **Nazarov Iu.P., Pozniak E.V.** Otsenka Rotatsionnykh Komponent Seismicheskogo Dvizheniia Grunta. *Osnovaniia, Fundamenty i Mekhanika Gruntov.* 2015;6:22—26. (in Russian).

9. **Nazarov Yu.P., Poznyak E.V., Filimonov A.V.** A Brief Theory and Computing of Seismic Ground Rotations for Structural Analyses. *Soil Dynamics and Earthquake Eng.* 2015;71:31—41.

10. **Nazarov Iu.P., Pozniak E.V.** Opredelenie Koeffitsienta Dinamichnosti v Raschetakh na Seismostoikost [Elektron. Resurs] <http://www.nso-journal.ru>. (Data Obrashcheniia 25.04.2016). (in Russian).

11. **Nazarov Iu.P., Pozniak E.V.** O Prostranstvennoi Izmenchivosti Seismicheskikh Dvizhenii Grunta pri Raschete Sooruzhenii. *Osnovaniia, Fundamenty i Mekhanika gruntov.* 2014;5:17—20. (in Russian).

Сведения об авторах

Позняк Елена Викторовна — кандидат технических наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин НИУ «МЭИ», e-mail: PozniakYV@mpei.ru

Новикова Ольга Валерьевна — кандидат технических наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин НИУ «МЭИ», e-mail: NovikovaOV@mpei.ru

Information about authors

Poznyak Elena V. — Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines Dept., NRU MPEI, e-mail: PozniakYV@mpei.ru

Novikova Olga V. — Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines Dept., NRU MPEI, e-mail: NovikovaOV@mpei.ru

Статья поступила в редакцию 24.12.2016