УДК 511.8

О целых функциях, принимающих вместе со своей производной целые рациональные значения в точках двумерной решетки

В. А. Подкопаева*, А. Я. Янченко

Изучен класс целых функций, растущих не быстрее $\exp\{\gamma|z|^{6/5}(\ln|z|)^{-1}\}$ и принимающих вместе со своими первыми производными целые рациональные значения в точках положительной части двумерной решетки общего вида. Показано, что любая подобная функция – либо является многочленом с рациональными коэффициентами, либо представляется в виде многочлена с рациональными коэффициентами от функции $e^{z/q}$ при некотором натуральном q.

Ключевые слова: арифметические свойства целых функций, двумерная решетка.

1. Введение. Формулировка результатов

Исследование целых функций, принимающих целые рациональные значения в точках некоторого дискретного множества, является традиционной задачей теории чисел.

Основным считается результат А. О. Гельфонда [1], который затем уточнялся и улучшался в ряде работ (подробная библиография приведена в [2]). В них были исследованы целые функции, которые либо растут не быстрее экспоненты, либо принимают целые значения (на заданном дискретном множестве) вместе с большим числом своих производных.

В настоящей работе исследован класс целых функций, принимающих целые значения в точках двумерной решетки общего вида вместе со своей первой производной. При этом каждая такая функция может расти существенно быстрее экспоненты.

Обозначим через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел.

Положим $\mathbb{Z}+=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\Gamma^+=\{l_1v_1+l_2v_2,\ l_1,l_2\in\mathbb{Z}^+\}$ — часть некоторой фиксированной двумерной решетки ($v_1,v_2\in\mathbb{C};\ v_1/v_2\notin\mathbb{Q}$).

Обозначим через F класс функций, состоящий из целых функций $f(z)$ для каждой из которых найдется постоянная $\gamma_0>0$ (зависящая только от v_1, v_2 и функции $f(z)$) такая, что:

а) для всякого $R>1$:

$$\max_{|z|\le R}|f(z)|\le e^{\gamma_0 R^{6/5}(\ln R)^{-1}};$$

б) для всякой точки $z_0\in\Gamma^+$, $z_0=l_1v_1+l_2v_2$ числа $f(z_0)$, $f'(z_0)$ — целые рациональные.

Справедливы утверждения.

Теорема 1. *Для любой функции* $f(z)\in F$ *найдется многочлен* $P\in\mathbb{Z}[\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3]$, $P\neq 0$ *такой, что* $P(f(z), f'(z_0), f''(z_0))\equiv 0$ *в* $\mathbb{C}$.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)\in F$. *Тогда найдутся многочлен* $P\in Q[\omega]$ *и число* $q\in\mathbb{N}$ *такие, что либо* $f(z)=P(z)$, *либо* $f(z)=P(e^{(1/q)z})$.

Фиксируем произвольную функцию $f(z)$ из класса F. В дальнейшем будем обозначать через γ_1, γ_2, ... положительные постоянные, зависящие только от v_1, v_2 и функции $f(z)$.

Для доказательства теорем 1, 2 потребуется ряд вспомогательных утверждений.

* vapodk@yandex.ru

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть* $\eta_1 = h_1(z)$, $\eta_2 = h_2(z)$, $\theta_0 = g_0(z)$, $\theta_1 = g_1(z)$, $\theta_2 = g_2(z)$ *— целые функции. Пусть многочлены* T_0, T_1, $B\in Q[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$, $T_2\in Q[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]$, *причем* T_0 *— ненулевой многочлен и* $B(\eta_1, \eta_2, \theta_0)$ *в* $\mathbb{C}$. *Пусть при любом* $z\in\mathbb{C}$ *справедливы равенства:*

$$\begin{cases} T_0(\eta_1,\eta_2,\theta_0)=0;\\ T_1(\eta_1,\eta_2,\theta_0)+B(\eta_1,\eta_2,\theta_0)\theta_1=0;\\ T_2(\eta_1,\eta_2,\theta_0,\theta_1)+B(\eta_1,\eta_2,\theta_0)\theta_2=0.\end{cases}$$

Тогда найдется ненулевой многочлен $R\in Q[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ *такой, что* $R(\theta_0, \theta_1, \theta_2)\equiv 0$ *в* $\mathbb{C}$.

Лемма 2 [2]. *Пусть* n *— натуральное; действительные числа* r, R *таковы, что* $0 < r < R$. *Пусть* $B_{i,r} = \{z_i:|z_i| \le r\}$, $B_{i,R} = \{z_i:|z_i| \le R\}$ $(i = 1, ..., n)$; $A_1, ..., A_n$ *— конечные множества,* $A_i \subset B_{i,r}$ *при всех* $i = 1, ..., n$, *причем в каждом из* A_i *содержится не менее* t *элементов* $(t \ge 1)$. *Пусть функция* $H(\overline{z})\equiv H(z_1,\ldots,z_n)$ *голоморфна в прямом произведении* $B_{1,R}\times...\times B_{n,R}$ *и имеет в каждой точке из* $A_1\times...\times A_n$ *нуль кратности по меньшей мере* s $(s \ge 1)$. *Тогда справедлива оценка:*

$$\max_{\overline{z}\in B_{1,r}\times\ldots\times B_{n,r}}|H(\overline{z})|\le \max_{\overline{z}\in B_{1,R}\times\ldots\times B_{n,R}}|H(\overline{z})|\left(\frac{R-r}{2r}\right)^{-ts}.$$

Лемма 3. *Пусть* L *— достаточно большое натуральное,* $P\in\mathbb{Z}[\omega_1, ..., \omega_5]$ *— ненулевой многочлен, причем для степени и высоты* P *справедливы оценки:*

$$\deg_{\omega_i} P\le L^{4/5}(\ln\ln L)^2 \quad (i=1,\ldots,5), \qquad \ln H(P)\le L^2(\ln\ln L)^{-1}.$$

Пусть $L_1 \ge L$; *множества* $A_1, A_2 \subset \{l_1v_1 + l_2v_2; l_1l_2\in\mathbb{Z}^+\}$ *и в каждом из* A_1, A_2 *содержится по меньшей мере* $L_1^2/20$ *элементов.*

Пусть $\varphi(\overline{z}) = P(f(z_1), f'(z_1), f(z_2), f'(z_2), f(z_1+z_2))$ *и для любого элемента* $\bar{z}\in A_1\times A_2$ $\varphi(\bar{z}) = 0$. *Тогда:*

а) $$\max_{\substack{|z_1|\le L_1(\ln L_1)^{2/3}\\ |z_2|\le L_1(\ln L_1)^{2/3}}}|\varphi(z_1,z_2)|\le e^{-L_1^2/30};$$

б) при всех целых $0 \le l_1, l_2, m_1, m_2 \le L_1\ln^{19/30}L_1$ $\varphi(l_1v_1 + l_2v_2, m_1v_1 + m_2v_2) = 0$;

в) $\varphi(z_1z_2)\equiv 0$ *в* $\mathbb{C}$.

Лемма 4. *Пусть* $L\in\mathbb{N}$, L *достаточно велико,* $P\in\mathbb{Z}[\omega_1, ..., \omega_5]$; $\deg_{\omega_i} P\le L^{4/5}(\ln\ln L)^2$ $(i = 1, ..., 5)$; $\ln H(P)\le L^2(\ln\ln L)^{-1}$.

Пусть

$\varphi(\overline{z}) = P(f(z_1), f'(z_1), f(z_2), f'(z_2), f(z_1+z_2))\not\equiv 0$ *в* $\mathbb{C}^2$. *Пусть при всяком* $L_1>L$ G_{L_1} *— множество точек вида* $l_1v_1 + l_2v_2$ *с целыми* $0 \le l_1, l_2 \le L_1$, *для каждой из которых* $\varphi(l_1v_1 + l_2v_2, m_1v_1 + m_2v_2) = 0$ *при всех целых неотрицательных* $m_1, m_2 \le \max\{l_1, l_2\}$. *Тогда количество элементов во множестве* G_{L_1} *меньше, чем* $L_1^2/2$.

Лемма 5. *Пусть* $T\in Q[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]$; $T\not\equiv 0$ *и* $T(f(z_1), f'(z_1), f(z_2), f'(z_2))\equiv 0$ *в* $\mathbb{C}^2$. *Тогда найдется ненулевой многочлен* $B\in Z[\omega_1, \omega_2]$ *такой, что* $B(f(z), f'(z))\equiv 0$ *в* $\mathbb{C}$.

Предложение 1. *Пусть* $g_i(z)$ *— голоморфные в* $\mathbb{C}$ *функции, причем существует постоянная* $\delta_1 > 0$ *такая, что при любом* $R > 0$

$$\max_{|z|\le R}|g_i(z)|\le e^{\delta_1 R^{6/5}(\ln R)^{-1}} \quad (i=1,2,3).$$

Пусть при всяком натуральном M *множество* D_M *состоит из тех точек* $\overline{l}v$ *решетки* $\{l_1v_1 + l_2v_2, l_1l_2 \in \mathbb{Z}, 0\le l_1l_2\le M\}$, *для каждой из которых* $g(\overline{l}v)\in Q$ $(i=1,2,3)$, *причем для высот чисел справедливо неравенство:*

$$\ln H(g_i(\overline{lv}))\le\frac{(l_1+l_2+2)^{6/5}\ln\ln(l_1+l_2+2)}{\ln(l_1+l_2+2)}.$$

Лемма 6. *Пусть* $E \subset \mathbb{C}$ *— поле алгебраических чисел,* $P\subset\mathbb{C}[\omega]$ *— ненулевой многочлен и* P *— неприводим. Пусть* $\beta\in\mathbb{C}$ *и* $\beta \ne 0$, $\beta^n \ne 1$ *ни при каком* $n\in\mathbb{N}$. *Пусть найдется* $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *такое, что* $\beta^{-ml}P(\beta^l)\in E$ *при всяком* $l\in\mathbb{N}$. *Тогда* $P\in E[\omega]$ *и* $\beta^N\in E$ *при некотором* $N\in\mathbb{N}$.

Справедлива также

Лемма 6.1. Пусть $\beta\in\mathbb{C}$, $\beta \ne 0$ и β — не корень из единицы; $P[\omega]\in\mathbb{Q}[\omega]$; $P \ne 0$ и P — неприводим; m — целое неотрицательное. Пусть при всех целых неотрицательных l $\beta^{-ml}P(\beta^l)\in\mathbb{Z}$. Тогда при некотором целом d $\beta^d\in\mathbb{Z}$ и $m = 0$.

Лемма 6.2. *Пусть* $P\in\mathbb{C}$ $[\omega]$, $\partial P/\partial\omega\not\equiv 0$, $E\subset\mathbb{C}$ *— числовое поле. Пусть* $\beta\in\mathbb{C}$, $\beta \ne 0$ *и при любом натуральном* l $P(l\beta)\in E$, $P'(l\beta)\in E$. *Тогда* $P(\omega)\in E[\omega]$.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть натуральное L достаточно велико; $K = [L^{4/5}(\ln\ln L)] + 1$. Рассмотрим многочлен $P=\sum_{\overline{k}=0}^{K} C_{\overline{k}}\omega_1^{k_1}\omega_2^{k_2}\omega_3^{k_3}\omega_4^{k_4}\omega_5^{k_5}$ и функцию $\varphi(\overline{z})\equiv P(f(z_1), f'(z_1), f(z_2), f'(z_2), f(z_1+z_2))$. Справедлива

Лемма 7. *Существуют целые, не все равные нулю числа* $\{C_{\overline{k}}\equiv C_{k_1k_2k_3k_4k_5}\}$ *такие, что при любых целых* $0 \le l_1, l_2, m_1, m_2 \le L$ $\varphi(l_1v_1 + l_2v_2, m_1v_1 + m_2v_2) = 0$. *При этом при всех* $\bar{k}$ *справедлива оценка*

$$|C_{\overline{k}}|\le e^{L^2(\ln L)^{-1}}.$$

Пусть $\varphi(\overline{z})\equiv P(\overline{f})\equiv P(f(z_1), f'(z_1), f(z_2), f'(z_2), f(z_1+z_2))$ — функция, построенная в лемме 7. Применив к $\varphi(\bar{z})$ лемму 3, найдем, что $\varphi(\bar{z})\equiv 0$ в $\mathbb{C}^2$. Если $P(\overline{\omega}) = P_1^{i_1}(\overline{\omega})\ldots P_k^{i_k}(\overline{\omega})$ — разложение в произведение неприводимых, то из голоморфности $f(z)$ и того, что $P(\overline{f})\equiv 0$ в $\mathbb{C}^2$ следует, что найдется неприводимый $P_j(\overline{\omega})$ с условием $P_j(\overline{f}\,) \equiv 0$ в $\mathbb{C}^2$. Поэтому без ограничения общности P можно считать неприводимым.

Возможны несколько случаев.

1) $\partial P/\partial\omega_5 \equiv 0$ Тогда $P \equiv P_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ — ненулевой многочлен и $P(f(z_1), f'(z_1), f(z_2), f'(z_2)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$. По лемме 5 найдется ненулевой многочлен $B\in Z[\omega_1, \omega_2]$ такой, что $B(f(z), f'(z)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

2) $\partial P/\partial\omega_5 \not\equiv 0$,

$\partial P/\partial\omega_5(\overline{f}) \equiv \partial P/\partial\omega_5(f(z_1), f'(z_1), f(z_2), f'(z_2), f(z_1+z_2)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}^2$.

Тогда (в силу неприводимости P) многочлен $T = \mathrm{Res}_{\omega_5}(P, \partial P/\partial\omega_5)$ удовлетворяет условиям леммы 5. Поэтому найдется ненулевой многочлен $B\in Z[\omega_1, \omega_2]$ такой, что $B(f(z), f'(z)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

3) $\partial P/\partial\omega_5(\overline{f}) \not\equiv 0$, $\partial P/\partial\omega_4(\overline{f}) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$. Дифференцируя дважды равенство $P(\overline{z}) \equiv 0$ по переменной z_2, получим

$$\begin{cases} P(\overline{f}) = 0; \\ \partial P/\partial\omega_5(\overline{f})f'(z_1+z_2) + \partial P/\partial\omega_3(\overline{f})f'(z_2) = 0 \\ \partial P/\partial\omega_5(\overline{f})f''(z_1+z_2) + A \equiv 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

(где A — многочлен с целыми коэффициентами относительно $\{f(z_1), f'(z_1), f(z_2), f'(z_2), f''(z_2), f(z_1+z_2), f'(z_1+z_2)\}$).

Если $P(\omega_1,\ldots,\omega_5) = \sum\limits_{k_1,k_2,k_5} Q_{\overline{k}}(\omega_3,\omega_4)\omega_1^{k_1}\omega_2^{k_2}\omega_5^{k_5}$, то найдется $Q_{\overline{k}^0}(\omega_1,\omega_2)$ такой, что $Q_{\overline{k}^0}(f(z_2), f'(z_2)) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}$ (в противном случае $\partial P/\partial\omega_5(\overline{f}) \equiv 0$).

Рассмотрим функцию

$$h(\overline{z}) = Q_{\overline{k}^0}(f(z_2), f'(z_2))\frac{\partial P}{\partial\omega_5}(f(z_1), f'(z_1), f(z_2), f'(z_2), f(z_1+z_2)).$$

Тогда (в силу аналитичности $f(z)$) $h(\overline{z}) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}^2$. Поэтому найдется точка $(z_1^0, z_2^0) \equiv (l_1v_1 + l_2v_2, m_1v_1 + m_2v_2)$ (с целыми неотрицательными l_1, l_2, m_1, m_2) такая, что $h(z_1^0, z_2^0) \neq 0$ (в противном случае применение леммы 3 дало бы $h(\overline{z}) \equiv 0$).

Подставив в (3.1) $z_2 = z_2^0$ придем к системе вида

$$\begin{cases} T_0(\eta_1,\eta_2,\theta_0) = 0; \\ T_1(\eta_1,\eta_2,\theta_0) + B(\eta_1,\eta_2,\theta_0)\theta_1 = 0; \\ T_2(\eta_1,\eta_2,\theta_0,\theta_1) + B(\eta_1,\eta_2,\theta_0)\theta_2 = 0, \end{cases}$$

(где $\eta_1 = f(z_1)$, $\eta_1 = f'(z_1)$, $\theta_0 = f(z_1 + z_2^0)$, $\theta_1 = \theta_0'$, $\theta_2 = \theta_0''$), которая удовлетворяет условиям леммы 1.

Тогда найдется ненулевой многочлен $R \in Q[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ такой, что $R(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ в $\mathbb{C}$ следовательно и $R(f(z), f'(z), f''(z)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

4) $\partial P/\partial\omega_5(\overline{f}) \not\equiv 0$, $\partial P/\partial\omega_4(\overline{f}) \not\equiv 0$ в $\mathbb{C}^2$. Дифференцируя равенство $P(\overline{f}(\overline{z})) \equiv 0$ по переменной z_2, найдем:

$$\frac{\partial P}{\partial\omega_3}(\overline{f})f'(z_2) + \frac{\partial P}{\partial\omega_4}(\overline{f})f''(z_2) + \frac{\partial P}{\partial\omega_5}(\overline{f})f'(z_1+z_2) = 0. \tag{3.2}$$

Положим $h(z) = \partial P/\partial\omega_4(\overline{f})$. Пусть при любом $L_1 > L$ H_{L_1} — множество точек $\overline{lv} \equiv l_1v_1 + l_2v_2$ с целыми $0 \le l_1, l_2 \le L_1$ для каждой из которых найдется точка $\overline{mv} \equiv m_1v_1 + m_2v_2$ с целыми m_1, m_2 такими, что $0 \le m_1, m_2 \le \max\{l_1, l_2\}$ и $h(\overline{mv}, \overline{lv}) \neq 0$.

Из равенства (3.2) выразим $f''(z_2)$:

$$f''(z_2) = -\frac{\partial P/\partial\omega_3(\overline{f})f'(z_2) - \partial P/\partial\omega_5(\overline{f})f'(z_1+z_2)}{\partial P/\partial\omega_4(\overline{f})}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим любую точку $\overline{lv} \in H_{L_1}$ (и соответствующую ей точку $\overline{mv}$). Тогда, подставив в (3.3) $z_1 = \overline{mv}$, $z_2 = \overline{lv}$, найдем, что $f''(\overline{lv}) \in \mathbb{Q}$, причем для высоты данного рационального числа справедлива оценка:

$$\ln H(f''(\overline{lv})) \le \gamma_4(l_1 + l_2 + 2)^{6/5}(\ln(l_1 + l_2 + 2))^{-1}.$$

Согласно лемме 4, количество элементов в H_{L_1} больше, чем $L_1^2/2$. Применив предложение 1 ($g_1(z) = f(z)$, $g_2(z) = f'(z)$, $g_3(z) = f''(z)$), получим, что и в этом случае найдется ненулевой многочлен $P\in\mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ такой, что $P(f(z), f'(z), f''(z)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

Таким образом, теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть $P\in\mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ — многочлен, полученный по теореме 1, такой, что $R(f(z), f'(z), f''(z)) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$. Без ограничения общности можно считать R неприводимым многочленом (если R приводим, $R = R_1^{t_1}\ldots R_m^{t_m}$ — разложение в произведение степеней неприводимых, то из голоморфности функции $f(z)$ следует, что найдется R_i такой, что $R_i(\overline{f}\,) \equiv 0$).

Если $\partial R/\partial\omega_3 \equiv 0$ то $R \equiv R_1(\omega_1, \omega_2)$ и $R_1(f, f') \equiv 0$. Если $\partial R/\partial\omega_3 \not\equiv 0$ и $\partial R/\partial\omega_3(\overline{f}) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, то, рассмотрев $R_1 = \mathrm{Res}_{\omega_3}(R, \partial R/\partial\omega_3)$, найдем, что $R_1(f, f') \equiv 0$ в $\mathbb{C}$.

Пусть теперь $\partial R/\partial\omega_3(\overline{f}) \neq 0$.

Продифференцируем равенство $R(f(z), f'(z), f''(z)) \equiv 0$. Получим

$$\frac{\partial R}{\partial\omega_1}(\overline{f})f'(z) + \frac{\partial R}{\partial\omega_2}(\overline{f})f''(z) + \frac{\partial R}{\partial\omega_3}(\overline{f})f'''(z) \equiv 0.$$

Обозначим

$$Q(\overline{\omega}) = \frac{\partial R}{\partial\omega_3}, \qquad A(\overline{\omega}) = -\frac{\partial R}{\partial\omega_1}\omega_2 - \frac{\partial R}{\partial\omega_2}\omega_3.$$

Тогда $f'''(z) = A(f)/Q(f)$. Для степени и высоты многочленов A, Q справедливы оценки: $\deg A$, $\deg Q \le \deg R$, $\ln H(Q)$, $\ln H(A) \le 1 + \ln H(R) + \ln\deg(R)$ или (положив $t(R) = \deg R + \ln H(R)$):

$$\begin{cases}\ln H(Q), \ln H(A) \le t(R);\\ \deg Q, \deg A \le t(R).\end{cases}$$

Справедлива

Лемма 8. *Пусть* $P\in\mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$, $\varphi(z) = P(f(z), f'(z), f''(z))$. *Тогда при любом целом неотрицательном s*

$$f^{(s)}(z) = \frac{T_s(f)}{(Q(f))^{2s}},$$

где $T_s\in\mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$; $T_s(f)$, $Q(f)$ — *результат подстановки в многочлены* T_s, Q $\omega_1 = f(z)$, $\omega_2 = f'(z)$, $\omega_3 = f''(z)$. *При этом* $\deg T_s \le \deg P + 2st(R)$,

$$\ln H(T_s) \le \ln H(P) + 9s\cdot t(R) + 13s\ln(\deg P + 2s\cdot t(R)).$$

Пусть теперь $\gamma_5 > 0$ — постоянная, такая, что при всех $R > 1$

$$\max_{|z|\le R} |Q(f)| \equiv \max_{|z|\le R} |Q(f(z), f'(z), f''(z)| \le e^{\gamma_5 R^{6/5}(\ln R)^{-1}}.$$

В силу оценки между максимумом модуля и числом нулей целой функции на круге найдем тогда, что существует постоянная $\gamma_6 > 0$ такая, что число нулей функции $Q(f)$ на круге радиуса R не превосходит $\gamma_6 R^{6/5}(\ln R)^{-1}$.

Будем обозначать через D множество точек из решетки $\{l_1v_1 + l_2v_2,\ l_1,\ l_2\in\mathbb{Z}^+\}$ для которых $Q(f)(l_1v_1 + l_2v_2) \ne 0$. При каждом натуральном L положим $D_L = D\cap\{l_1v_1 + l_2v_2,\ l_1, l_2\in\mathbb{Z},\ 0\le l_1, l_2\le L\}$. Тогда количество точек во множестве D_L не менее, чем $L^2 - \gamma_6((|v_1|+|v_2|)L)^{6/5}(\ln((|v_1|+|v_2|)L))^{-1}$. Тогда найдется постоянная $\gamma_7 > 0$ такая, что при всех $L > \gamma_7$ число элементов во множестве D_L не менее, чем $L^2/2$. При всяком $\overline{lv} \equiv l_1v_1 + l_2v_2$ определим поле $E_{\overline{l}} = Q(f''(\overline{lv}))$. Тогда $E_{\overline{l}}$ — поле алгебраических чисел и $[E_{\overline{l}} : \mathrm{Q}] \le \deg R < +\infty$. Согласно лемме 8 $f(s)(\overline{lv}) \in Q$ при всех $\overline{lv}\in D$.

Пусть теперь L достаточно велико. Справедлива

Лемма 9. *Пусть* $K = [L^2\ln L] + 1$, $S = L^2$. *Тогда найдутся целые, не все равные нулю числа* $\{C_{k_1k_2}\}$ $(0 \le k_1, k_2 \le K)$ *такие, что для функции*

$$h(z) \equiv \sum_{k_1,k_2=0}^{K} C_{k_1k_2} f^{k_1}(z)(f'(z))^{k_2}$$

справедливы равенства $h^{(t)}(l_1v_1 + l_2v_2) = 0$ *при всех* $t = 0, 1, ..., S$ *и любых* $l_1v_1 + l_2v_2\in D_L$. *При этом* $|C_{k_1k_2}| \le e^{L^{16/5}}$.

Справедлива

Лемма 10. *Пусть* $L_1 \ge L$ *и при всех* $l_1v_1 + l_2v_2\in D_L$ *и всех целых неотрицательных* $s \le L_1^2$ $h^{(s)}(l_1v_1 + l_2v_2) = 0$. *Тогда:*

а) $\max_{|z|\le L_1^{3/2}\ln L_1} |h(z)| \le e^{-L_1^4/3}$;

б) при всех $l_1v_1 + l_2v_2\in D_{L_1^{3/2}}$ *и при всех целых неотрицательных* $s \le L_1^2$ $h^{(s)}(l_1v_1 + l_2v_2) = 0$.\

Применяя несколько раз лемму 10 (на первом шаге $L_1 = L$), найдем, что на любом фиксированном круге $|z| \le R$ $(R > 0)$ $\max_{|z|\le R}|h(z)|$ может быть сделан сколь угодно малым. Поэтому $h(z)\equiv P(f, f')\equiv 0$ в $\mathbb{C}$ (где $P = \sum_{k_1,k_2} C_{k_1k_2}\omega_1^{k_1}\omega_2^{k_2}$ — ненулевой многочлен, построенный в лемме 9). Выделяя, если нужно, неприводимую компоненту, считаем далее P — неприводимым.

Если кривая, определяемая многочленом P, рода больше, чем 1, то по теореме Фальтингса ([4]) число решений из поля Q уравнения $P(\omega_1, \omega_2) = 0$ конечно, отсюда при некоторых целых неотрицательных l_1^0, l_2^0 число нулей функции $\varphi(z) = f(z) - f(l_1^0v_1 + l_2^0v_2)$ на любом круге $|z|\le R$ не менее, чем $\gamma_{14}R^2$, что при достаточно больших $R > 0$ противоречит оценке (из условия теоремы 2)

$$\max_{|z|\le R} \ln|f(z)| \le \gamma_0 R^{6/5}(\ln R)^{-1}.$$

Поэтому род кривой, определяемой многочленом P, может быть только 0 или 1. Но тогда по теореме Эрмита ([5]) $f(z)$ может быть только рациональной функцией либо от z, либо от $e^{\alpha z}$ ($\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\ne 0$), либо от эллиптической функции. Учитывая, что $f(z)$ — целая функция, найдем, что либо $f(z) = P(z)$, либо $f(z) = e^{-m\alpha z}P(e^{\alpha z})$ при некоторых $P\in\mathbb{C}[\omega]$, $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Если $f(z) = P(z)$ и $f(z)$ — не константа, то по лемме 6.2 ($\beta = v_1$) $P\in\mathbb{C}[\omega]$.

Пусть $f(z) = e^{-m\alpha z}P(e^{\alpha z})$. Положим $\beta_1 = e^{\alpha v_1}$, $\beta_2 = e^{\alpha v_2}$. Если бы оба этих числа были корнями из единицы ($\beta_1^{k_1} = 1, \beta_2^{k_2} = 1$, k_1, $k_2\in\mathbb{N}$), то при некоторых d_1, $d_2\in\mathbb{Z}$

$$\begin{cases}k_1\alpha v_1 = 2\pi i d_1;\\ k_2\alpha v_2 = 2\pi i d_2,\end{cases}$$

откуда $v_1/v_2\in\mathbb{Q}$, что противоречит условию теоремы 2. Поэтому, например, β_1 не является корнем из единицы.

Применив теперь лемму 6.1 к многочлену P (с $\beta = \beta_1$), найдем, что $P\in\mathbb{Q}[\omega]$. Далее, так как

$$f'(\overline{lv}) \equiv f'(l_1v_1 + l_2v_2) = (\partial P/\partial\omega(e^{\alpha z})\alpha e^{\alpha z})\Big|_{z=\overline{lv}} \in\mathbb{Q}$$

при всех $\overline{lv}$ (с целыми неотрицательными l_1, l_2), то, применяя лемму 6.1 (к многочлену $\alpha\cdot\partial P/\partial\omega\cdot\omega$), найдем, что $\alpha\cdot\partial P/\partial\omega\cdot\omega\in\mathbb{Q}[\omega]$. Отсюда $\alpha = p/q$.

Для завершения доказательства теоремы 2 теперь достаточно применить лемму 6.2.

Литература

1. **Гельфонд А.О.** О целочисленности аналитических функций // Доклады АН СССР. 1951. Т. 81. С. 341–344.

2. **Waldshmidt M.** Transcendental numbers and functions of several variables. Shahrood, 2003.

3. **Гельфонд А.О.** Трансцендентные и алгебраические числа. М.: ГИТТЛ, 1952.

4. **Faltings G.** Die Vermutungen von Tate und Mordell Jahresber. Deutsch // Math.-Verein. 1984. V. 86. N 1. С. 1 — 13.

5. **Голубев В.В.** Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1950.

6. Welter M. Sur un theoreme de Gelfond-Selberg et une conjecture de Bundschuh-Shiokawa // Acta Arith. 2005. V. 116. N 4. P. 363 — 385.

7. **Рочев И.П.** Обобщение теорем Гельфонда и Вальдшмидта о целозначных целых функциях // Матем. сборник. 2011. Т. 202. № 8. 2011. С. 117 — 138.

Статья поступила в редакцию 23.10.2015