УДК 534.26
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-4-129-134

Применение потенциалов Дебая для расчета первичного поля в изотропной упругой среде, возбуждаемой вертикальным источником

В.В. Бодров, А.А. Комаров, Е.С. Малевич

Предложено аналитическое решение задачи возбуждения изотропной упругой среды вертикальным точечным источником. Эта задача является модельной и, кроме того, входит в решение других модельных задач типа возбуждения волн в плоскослоистой среде. Решение основано на применении метода потенциалов Дебая, который широко используется при решении различных задач электродинамики, таких как: излучение антенны достаточно произвольного вида над плоскослоистой диэлектрической средой, учет влияния сложного обтекателя летательного аппарата на работу антенной системы радиолокационной станции (влияние на диаграмму направленности антенны и пеленгационные характеристики системы в целом), проектирование щелевых излучателей с запитывающим резонатором, излучение рупорных и волноводных антенн в магнитодиэлектрическое полупространство. Во многих случаях удается получить аналитическое решение задачи, если же оно недоступно, то численные методы, разработанные с использованием потенциалов Дебая, оказываются эффективными с вычислительной точки зрения. Значимость аналитического решения заключается в простоте и наглядности трактовки и понимании процессов распространения волн в отличие от численного решения. Однако принципиальное отличие задач возбуждения упругих тел от электродинамических состоит в распространении двух типов волн в упругих средах: поперечных и продольных. Эта особенность существенным образом усложняет как аналитическое решение, так и сам процесс распространения упругих волн по сравнению с электромагнитными волнами.
С учетом данной особенности предложена методика расчета возбуждения изотропной упругой среды с использованием аппарата потенциалов Дебая. Показано, что поле смещений изотропной упругой среды при ее возбуждении вертикальным источником представляется в виде суммы полей продольной и поперечной волн и симметрично в плоскости, перпендикулярной оси источника. Получены простые аналитические выражения для расчета поля смещения в произвольной точке пространства. Проведено сравнение результатов расчетов по аналитическим формулам с данными численного моделирования в программе COMSOL Multiphysics 3.5a. Так как программа предназначена для расчета структур конечных размеров, была разработана оригинальная модель неограниченной упругой среды в виде сферы большого радиуса (≈ 20 длин волн) с радиально-симметричным поглощением.

Ключевые слова: упругая среда, потенциалы Дебая, продольная и поперечная волны, интеграл Фурье, точечный источник, численное моделирование.

Для цитирования: Бодров В.В., Комаров А.А., Малевич Е.С. Применение потенциалов Дебая для расчета первичного поля в изотропной упругой среде, возбуждаемой вертикальным источником // Вестник МЭИ. 2017. № 4. С. 129—134. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-4-129-134.

Using the Debye Potentials to Calculate the Primary Field in an Isotropic Elastic Medium Excited by a Vertical Source

V.V. Bodrov, A.A. Komarov, E.S. Malevich

An analytical solution of the problem of exciting an isotropic elastic medium by a vertical point source is proposed. This problem is a model one and is also a part of the solution of other model problems such as wave excitation in a plane-layered medium. The solution is based on the method of Debye potentials, which is widely used in solving various problems of electrodynamics. The range of these problems includes radiation from an antenna of a fairly arbitrary kind over a plane-layered dielectric medium, consideration of the effect an intricate fairing of an aircraft has on the operation of the radar station antenna system (the effect on the antenna pattern and the direction-finding characteristics of the system as a whole), designing slit radiators with a feeding resonator, and radiation from horn and waveguide antennas into a magnetodielectric semi-space. In many

cases, it is possible to obtain an analytical solution of the problem; if an analytical solution is not available, numerical methods developed using the Debye potentials are effective from the computational point of view. The significance of an analytical solution lies in the simplicity and clarity of the interpretation and understanding of the wave propagation processes in contrast to a numerical solution. However, the fundamental difference between the problems of exciting elastic bodies from electrodynamic ones is in that two types of waves, namely, transverse and longitudinal ones, propagate in elastic media. This feature substantially complicates both the analytical solution and the elastic wave propagation process in comparison with electromagnetic waves.
In view of this specific feature, a technique for calculating the excitation of an isotropic elastic medium using the apparatus of Debye potentials is proposed. It is shown that the displacement field of an isotropic elastic medium excited by a vertical source is represented as the sum of longitudinal and transverse wave fields, and symmetrically in the plane perpendicular to the source axis. Simple analytic expressions for calculating the displacement field at an arbitrary point in space are obtained. The results of calculations using analytical formulas are compared with the data of numerical modeling in the COMSOL Multiphysics 3.5a computer program. In view of the fact that the COMSOL Multiphysics 3.5a computer program is intended for calculating structures with finite dimensions, an original model of unlimited elastic medium in the form of a large-radius sphere (around 20 wavelengths) with radially-symmetrical absorption was developed.

Key words: elastic medium, Debye potentials, longitudinal wave, transverse wave, Fourier integral, point source, numerical simulation.

For citation: Bodrov V.V., Komarov A.A., Malevich E.S. Using the Debye Potentials to Calculate the Primary Field in an Isotropic Elastic Medium Excited by a Vertical Source. MPEI Vestnik. 2017; 4: 129—134. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-4-129-134.

Введение

Потенциалы Дебая широко используются при решении задач электродинамики [1, 2] и акустики [3]. Основное отличие задач возбуждения упругих тел от электродинамических состоит в наличии двух типов волн в упругих средах: поперечных и продольных. С учетом данной особенности предложена методика расчета возбуждения изотропной упругой среды с использованием аппарата потенциалов Дебая.

Постановка задачи

Изотропная твердая упругая среда характеризуется тремя параметрами: удельной плотностью ρ_s, модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. Состояние такой среды описывается вектором смещения $\mathbf{u}$, удовлетворяющим дифференциальному уравнению [4]

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = G\Delta\mathbf{u} + g\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{u}_0(x, y, z, t), \qquad (1)$$

где $G = \dfrac{E}{2(\nu+1)}$; $g = G + \bar{\lambda}$; $\bar{\lambda} = \dfrac{E\nu}{(\nu+1)(1-2\nu)}$;

$\mathbf{u}_0(x, y, z, t)$ — вектор первичного воздействия на среду. Геометрия поставленной задачи приведена на рис. 1.

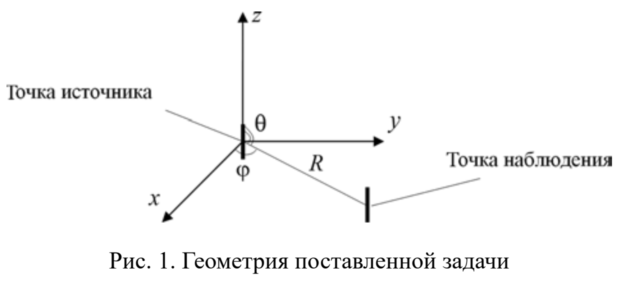


Рис. 1. Геометрия поставленной задачи

Рассмотрим гармонические колебания с временным множителем $e^{i\omega t}$. Уравнения колебаний в упругой среде с гармоническим вибратором, направленным по оси z, примут вид

$$\begin{aligned}
-\rho_s\omega^2 u_x &= G\Delta u_x + g\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right);\\
-\rho_s\omega^2 u_y &= G\Delta u_y + g\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right);\\
-\rho_s\omega^2 u_z &= G\Delta u_z + g\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) +\\
&+ A_z\delta(x-0)\delta(y-0)\delta(z-0).
\end{aligned} \qquad (2)$$

Левая и правая части этих уравнений имеют размерность силы, отнесенной к единице объема. Так как трехмерная дельта-функция имеет размерность м$^{-3}$, то размерность A_z — Н.

Методика решения

Искомое векторное поле смещений $\mathbf{u}$ представляется в виде интеграла Фурье:

$$u_\alpha(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_\alpha(\kappa_1, \kappa_2, z) e^{-i\kappa_1 x - i\kappa_2 y} d\kappa_1 d\kappa_2. \qquad (3)$$

Дельта-функцию также представим в виде интеграла Фурье [5]:

$$\begin{aligned}
&\delta(x-0)\delta(y-0)\delta(z-0) =\\
&= \delta(z-0)\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa_1 x - i\kappa_2 y} d\kappa_1 d\kappa_2.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Потенциал Дебая F [1] введем следующим образом:

$$\begin{aligned}
U_x(\kappa_1, \kappa_2, z) &= -i\kappa_1 F;\\
U_y(\kappa_1, \kappa_2, z) &= -i\kappa_2 F.
\end{aligned} \qquad (5)$$

Подставим (3) — (5) в (2), учтем, что производные $\partial/\partial x$; $\partial/\partial y$; $\partial^2/\partial x^2$; $\partial^2/\partial y^2$; $\partial^2/\partial x\partial y$ можно вычислить в явном виде под знаком интеграла Фурье, и используем фундаментальное свойство интеграла Фурье, которое гласит, что из равенства интегралов Фурье следует равенство спектров. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения F и $U_z(\kappa_1, \kappa_2, z)$:

$$\begin{aligned}
&\gamma_t^2 F - \frac{d^2F}{dz^2} - b\frac{dU_z(\kappa_1,\kappa_2,z)}{dz} = 0;\\
&\frac{\kappa^2 b}{1+b}\frac{dF}{dz} + \gamma_r{}^2 U_z(\kappa_1,\kappa_2,z) - \\
&-\frac{d^2U_z(\kappa_1,\kappa_2,z)}{dz^2} = B_z\delta(z-0),
\end{aligned} \qquad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
&k_1^2 = \frac{\rho_s\omega^2}{G};\;\; \kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2;\\
&b = \frac{g}{G} = 1 + \frac{\overline{\lambda}}{G}; B_z = \frac{A_z}{4\pi^2(1+b)G};
\end{aligned} \qquad (7)$$

$$\gamma_t^2 = \kappa^2(1+b) - k_1^2;\; \gamma_r^2 = \frac{\kappa^2 - k_1^2}{1+b}. \qquad (8)$$

Систему уравнений (6) решим с помощью методики, подробно изложенной в [6]:

$$F = -\frac{\pi B_z(1+b)}{2\pi k_1^2}\left(\mathrm{e}^{-\gamma 1 z} - \mathrm{e}^{-\gamma 2 z}\right); \qquad (9)$$

$$U_z = -\frac{\pi B_z(1+b)}{2\pi k_1^2}\left[-\frac{\kappa^2}{\gamma_1}\mathrm{e}^{-\gamma 1 z} + \gamma_2 \mathrm{e}^{-\gamma 2 z}\right]; \qquad (10)$$

$$\gamma_1^2 = \kappa^2 - k_1^2;\; \gamma_2^2 = \kappa^2 - k_2^2;\; k_2^2 = \frac{k_1^2}{1+b}. \qquad (11)$$

Подставив в (3) выражения (5), (10) с учетом (9), найдем, что поле смещений определяется выражениями

$$\begin{aligned}
&u_x(x,y,z) = A_0\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\kappa_1,\kappa_2,z)\mathrm{e}^{-i\kappa 1 x - i\kappa 2 y}d\kappa_1 d\kappa_2;\\
&u_y(x,y,z) = A_0\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\kappa_1,\kappa_2,z)\mathrm{e}^{-i\kappa 1 x - i\kappa 2 y}d\kappa_1 d\kappa_2;\\
&u_z(x,y,z) = A_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\kappa_1,\kappa_2,z)\mathrm{e}^{-i\kappa 1 x - i\kappa 2 y}d\kappa_1 d\kappa_2,
\end{aligned} \qquad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
&\Phi(\kappa_1,\kappa_2,z) = \mathrm{e}^{-\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2-k_1^2}\,z} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2-k_2^2}\,z};\\
&\Psi(\kappa_1,\kappa_2,z) = -\frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2-k_1^2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2-k_1^2}\,z} + \\
&+\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2-k_2^2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2-k_2^2}\,z};
\end{aligned}$$

$$A_0 = -\frac{\pi B_z(1+b)}{k_1^2 2\pi} = -\frac{B_z(1+b)}{2k_1^2} = \frac{-A_z}{8\pi^2 k_1^2 G}. \qquad (13)$$

Покажем, что интегралы в (12) фактически зависят от переменной $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Введем замену переменных:

$$\begin{aligned}
&\kappa_2 = \kappa\cos\alpha;\; \kappa_1 = \kappa\sin\alpha;\; \kappa = \sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2};\; x = r\cos\varphi;\\
&y = r\sin\varphi; r = \sqrt{x^2+y^2};\; d\kappa_1 d\kappa_2 = \kappa d\kappa d\alpha.
\end{aligned} \qquad (14)$$

В таком случае интегралы в (12) примут вид

$$I(r) = \int_{\kappa=0}^{\infty}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\Phi(\kappa,z)\mathrm{e}^{-i\kappa r\cos(\alpha-\varphi)}\kappa d\kappa d\alpha.$$

Интеграл по переменной α вычисляем в явном виде [7]:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-i\kappa r\cos(\alpha-\varphi)}d\alpha = 2\pi J_0(\kappa r), \qquad (15)$$

где $J_0(\kappa r)$ — функция Бесселя нулевого индекса.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&u_x(x,y,z) = A_0\frac{\partial}{\partial x}I(r) = A_0\frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = A_0\frac{\partial I}{\partial r}\cos\varphi;\\
&u_y(x,y,z) = A_0\frac{\partial}{\partial y}I(r) = A_0\frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = A_0\frac{\partial I}{\partial r}\sin\varphi.
\end{aligned} \qquad (16)$$

Из рис. 2 следует

$$u_r(r,z) = u_x(x,y,z)\cos\varphi + u_y(x,y,z)\sin\varphi,$$

поэтому с учетом (16) получим, что

$$u_r(r,z) = A_0\frac{\partial I}{\partial r} = \overline{A}_0\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{\infty}\Phi(\kappa,z)J_0(\kappa r)\kappa d\kappa \qquad (17)$$

не зависит от угла φ, где

$$\overline{A}_0 = 2\pi A_0; \Phi(\kappa,z) = \mathrm{e}^{-\sqrt{\kappa^2-k_1^2}\,z} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\kappa^2-k_2^2}\,z}.$$

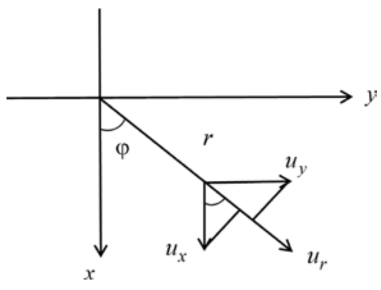


Рис. 2. Система координат для вычисления компоненты смещений в упругой среде

Аналогично для составляющей $u_z(r, z)$ имеем выражение

$$\begin{aligned}
&u_z(r,z) = \\
&= \overline{A}_0\int_0^{\infty}\left(\frac{-\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2-k_1^2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\kappa^2-k_1^2}\,z} + \sqrt{\kappa^2-k_2^2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\kappa^2-k_2^2}\,z}\right)J_0(\kappa r)\kappa d\kappa.
\end{aligned} \qquad (18)$$

Интегралы в (15), (16) можно выразить через известный интеграл [5]

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\kappa^2-k_{1,2}^2}\,z}}{\sqrt{\kappa^2-k_{1,2}^2}} J_0\left(\kappa r\right)\kappa d\kappa = \frac{\mathrm{e}^{-ik_{1,2}R}}{R},$$

где $R=\sqrt{r^2+z^2}$.

Тогда выражения (17), (18) запишем в виде суммы продольной и поперечной составляющих:

$$u_r\left(r,z\right)=u_{r2}\left(r,z\right)+u_{r1}\left(r,z\right),$$

где

$$\begin{aligned} u_{r2}\left(r,z\right) &= \overline{A}_0\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\frac{\mathrm{e}^{-ik_2R}}{R} = \\ &= \overline{A}_0\frac{z}{R}\frac{r}{R}\left(\frac{3}{R^2}+\frac{3ik_2}{R}-k_2^2\right)\frac{\mathrm{e}^{-ik_2R}}{R}; \\ u_{r1}\left(r,z\right) &= -\overline{A}_0\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\frac{\mathrm{e}^{-ik_1R}}{R} = \\ &= -\overline{A}_0\frac{z}{R}\frac{r}{R}\left(\frac{3}{R^2}+\frac{3ik_1}{R}-k_1^2\right)\frac{\mathrm{e}^{-ik_1R}}{R}; \end{aligned} \tag{19}$$

$$u_z\left(r,z\right)=u_{z2}\left(r,z\right)+u_{z1}\left(r,z\right),$$

где

$$\begin{aligned} u_{z2}\left(r,z\right) &= \overline{A}_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\mathrm{e}^{-ik_2R}}{R} = \\ &= \overline{A}_0\left[\frac{z^2}{R^2}\left(\frac{3}{R^2}+\frac{3ik_2}{R}-k_2^2\right)-\frac{1}{R^2}-\frac{ik_2}{R}\right]\frac{\mathrm{e}^{-ik_2R}}{R}; \\ u_{z1}\left(r,z\right) &= -\overline{A}_0\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\mathrm{e}^{-ik_1R}}{R}+k_1^2\frac{\mathrm{e}^{-ik_1R}}{R}\right) = \\ &= -\overline{A}_0\left[\frac{z^2}{R^2}\left(\frac{3}{R^2}+\frac{3ik_1}{R}-k_1^2\right)-\frac{1}{R^2}-\frac{ik_1}{R}+k_1^2\right]\frac{\mathrm{e}^{-ik_1R}}{R}. \end{aligned} \tag{20}$$

Верификация полученных результатов

Для проверки работоспособности предложенной методики была проведена верификация полученных выражений сравнением с результатами численного моделирования в программе COMSOL Multiphysics 3.5a [8]. Поскольку программа предназначена для расчета структур конечных размеров, то для моделирования бесконечных структур в модель необходимо вводить поглощение. В качестве модели безграничной среды используем сферу большого радиуса (≈ 20 длин волн) с поглощением (рис. 3).

В программе можно использовать тела вращения, поэтому на рис. 3, *а* представлена только образующая. В начале системы координат расположен точечный источник, направленный по оси *OZ* и действующей с силой в 1 Н. Поглощение внутри сферы изменяется вдоль радиуса по кусочно-линейному закону (см. рис. 3, *б*).

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: модуль Юнга E = 3,5·10^{10} Н/м^2; модуль сдвига G = 1,3·10^{10} Н/м^2; плотность упругой среды ρ_s = 2450 кг/м^3; f = 10 кГц. На рис. 4 представлены зависимости модуля компонент смещения u_r и u_z от расстояния r при z = 0,1 м.

На рис. 5 изображена зависимости модуля компонент смещения u_r и u_z от расстояния r при z = 1 м.

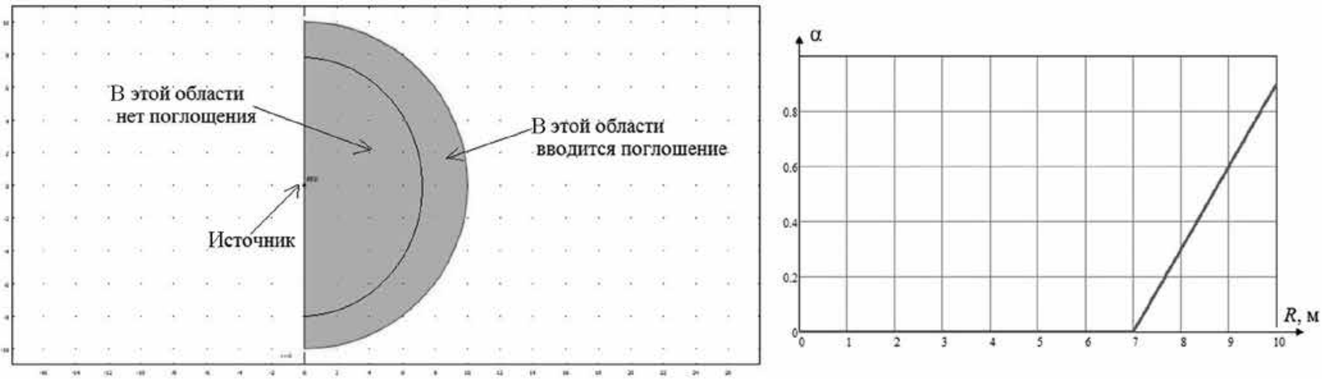
Из данных, представленных на рис.4, 5, видно, что результаты расчета по формулам (17), (18) согласуются с результатами численного моделирования.

Заключение

Предложена методика расчета первичного поля в изотропной упругой среде, возбуждаемой вертикальным источником, на основе применения потенциалов Дебая.

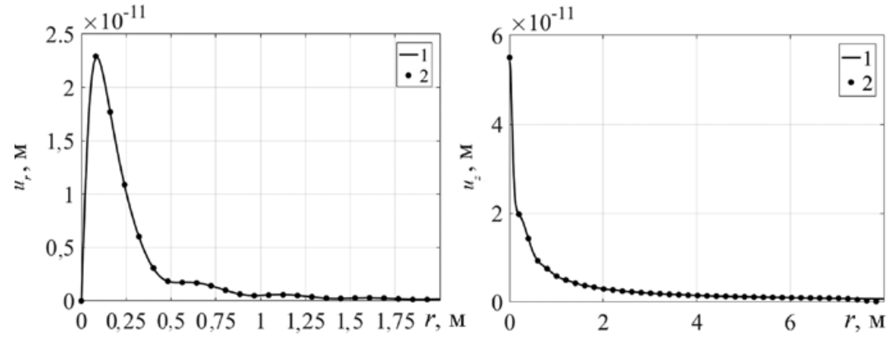
Показано, что при возбуждении упругой среды сосредоточенной силой, имеющей только z-составляющую, поле смещения — сумма продольной и поперечной волн — в полярной системе координат не зависит от угла φ и характеризуется смещениями $u_r(r, z)$, $u_z(r, z)$.

Проведена верификация полученных результатов путем сравнения с данными численного моделирования в программе COMSOL Multiphysics 3.5a.



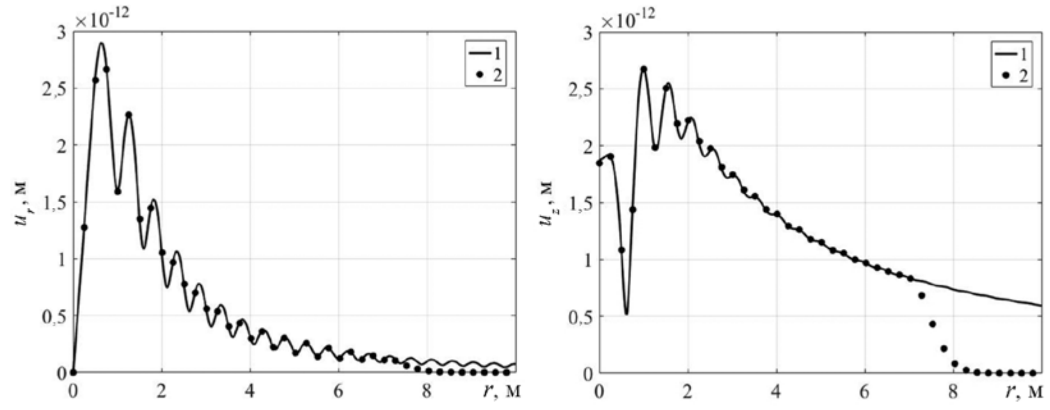
а *б*

Рис. 3. Модель упругой безграничной среды в Comsol 3.5a (*а*) и зависимость коэффициента поглощения α от радиуса сферы (*б*)



а *б*

Рис. 4. Зависимость u_r (*а*) и u_z (*б*) компонент смещения от расстояния r при z = 0,1 м:
1 — расчет по формулам (17), (18); *2* — расчет в COMSOL Multiphysics 3.5a



а - *б*

Рис. 5. Зависимость u_r (*а*) и u_z (*б*) компонент смещения от расстояния r при z = 1 м:
1, *2* — те же, что на рис. 5

Литература

1. **Бодров В.В., Сурков В.И.** Математическое моделирование устройств СВЧ и антенн. М.: Изд-во МЭИ, 1994.

2. **Фок В.А.** Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.

3. **Клещев А.А.** Потенциалы Дебая и «типа Дебая» в задачах дифракции, излучения и распространения упругих волн // Акустический журнал. 2012. Т. 58. № 3. С. 338—341.

4. **Стрэттон Дж.А.** Теория электромагнетизма. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.

5. **Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.** Возбуждение электромагнитных волн. М.–Л.: Энергия, 1967.

6. **Бодров В.В., Сурков В.И., Суркова И.В.** Волновые процессы. М.: Изд-во МЭИ, 2002.

7. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1962.

8. **Красников Г.Е., Нагорнов О.В., Старостин Н.В.** Моделирование физических процессов с использованием пакета Comsol Multiphysics. М.: НИЯУ МИФИ, 2012.

References

1. **Bodrov V.V., Surkov V.I.** Matematicheskoe Modelirovanie Ustroystv SVCH i Antenn. M.: Izd-vo MPEI, 1994. (in Russian).

2. **Fok V.A.** Problemy Difraktsii i Rasprostraneniya Elektromagnitnyh Voln. M.: Sov. radio, 1970. (in Russian).

3. **Kleshchev A.A.** Potentsialy Debaya i «Tipa Debaya» v Zadachah Difraktsii, Izlucheniya i Rasprostraneniya Uprugih Voln. Akusticheskiy Zhurnal. 2012;58;3:338—341. (in Russian).

4. **Stretton Dzh.A.** Teoriya Elektromagnetizma. M.–L.: GITTL, 1948. (in Russian).

5. **Markov G.T., Chaplin A.F.** Vozbuzhdenie Elektromagnitnyh Voln. M.–L.: Energiya, 1967. (in Russian).

6. **Bodrov V.V., Surkov V.I., Surkova I.V.** Volnovye Protsessy. M.: Izd-vo MPEI, 2002. (in Russian).

7. **Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.** Tablitsy Integralov, Summ, Ryadov i Proizvedeniy. M.: Nauka, 1962. (in Russian).

8. **Krasnikov G.E., Nagornov O.V., Starostin N.V.** Modelirovanie Fizicheskih Protsessov s Ispol'zovaniem Paketa Comsol Multiphysics. M.: NIYAU MIFI, 2012. (in Russian).

Сведения об авторах

Бодров Вадим Викентьевич — кандидат технических наук, доцент кафедры радиотехнических приборов и антенных систем НИУ «МЭИ»
Комаров Алексей Александрович — кандидат технических наук, ассистент кафедры радиотехнических приборов и антенных систем НИУ «МЭИ», e-mail: alex_alex_komarov@mail.ru
Малевич Елена Сергеевна — аспирант кафедры радиотехнических приборов и антенных систем НИУ «МЭИ», e-mail: malevichmpei@gmail.com

Information about authors

Bodrov Vadim V. — Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of Radio Devices and Antenna Systems Dept., NRU MPEI
Komarov Aleksey A. — Ph.D. (Techn.), Assistant of Radio Devices and Antenna Systems Dept., NRU MPEI, e-mail: alex_alex_komarov@mail.ru
Malevich Elena S. — Ph.D.-student of Radio Devices and Antenna Systems Dept., NRU MPEI, e-mail: malevichmpei@gmail.com

Статья поступила в редакцию 02.02.2017