УДК 517.518.23

Новый подход к разрешимости задачи Дирихле для нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка

Г. С. Балашова*

Для разрешимости задачи Дирихле для нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка предложен дифференциальный оператор бесконечного порядка в виде суммы двух дифференциальных операторов бесконечного порядка, один из которых является главным, а другой – ему подчиненным. В основе их сравнения положено соотношение пространств Соболева.

Ключевые слова: разрешимость, нелинейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка.

Ранее разрешимость задачи Дирихле для дифференциального уравнения бесконечного порядка в ограниченной области была установлена с помощью предельного перехода при $m \to \infty$ решений уравнений конечного порядка $2m$, левая и правая части которых представлены частичными суммами правых и левых частей исходного уравнения (см. [1]).

В настоящей работе предложен новый подход, использующий представление дифференциального оператора бесконечного порядка в виде суммы двух операторов, один из которых главный, а другой ему подчиненный, в то время как оба оператора бесконечного порядка.

Итак, исследуем разрешимость задачи Дирихле для дифференциального уравнения бесконечного порядка в некоторой ограниченной области $G \subset R^r_\nu, \nu \ge 1, r$ с границей Γ, левая часть которого — эллиптический оператор L_1 с возмущением L_2.

$$L_1(u) + L_2(u) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, D^\gamma u) = h(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

$$D^\omega u(x)|_\Gamma = 0, \quad ,|\omega| = 0,1,\dots. \tag{2}$$

Так как оба оператора L_1 и L_2 имеют бесконечный порядок, потому в основу их сравнения положено сравнение пространств, являющихся областями определения данных операторов.

Определение

Дифференциальный оператор L_1 называется главным по сравнению с оператором L_2, в дальнейшем называемым подчиненным, если пространство

$$W^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)} \equiv \left\{ u(x) \in C^\infty(G) : \rho(u) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \| D^\alpha u \|_p^p < \infty \right\},$$

где $a_\alpha \ge 0$, $p > 1$ — некоторые действительные числа; $\| \cdot \|_p$ — норма в пространстве Лебега $\mathcal{L}_p(G)$, соответствующее оператору L_1, компактно вложено в пространство $W^\infty\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, соответствующее оператору L_2.

Теоремы вложения таких пространств получены автором в [2], [3]. Правая часть уравнения (1) принадлежит пространству

$$W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)} \equiv$$
$$\equiv \left\{ h(x) = \sum_{|\alpha=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha h_\alpha(x) : \rho'(h) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \| h_\alpha \|_{p'}^{p'} < \infty \right\},$$

* BalashovaGS@mpei.ru

здесь $p' = \dfrac{p}{p-1}$, $h_\alpha(x) \in \mathcal{L}_{p'}(G)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $A_\alpha(x, \xi_\gamma)$, $B_\alpha(x, \xi_\gamma)$ — *непрерывные функции аргументов* $x \in G$ *и всевозможных* ξ_γ, $|\gamma| \le |\alpha|$, *такие что для любых* $x \in G$, ξ_γ и η_α *справедливы неравенства:*

$$\left|\sum_{|\alpha|=0}^{m} A_\alpha(x,\xi_\gamma)\eta_\alpha\right| \le \delta_1 \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(|\xi_\alpha|^{p-1}+1)|\eta_\alpha|;$$

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} A_\alpha(x,\xi_\gamma)\xi_\alpha \ge \delta_2 \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha|\xi_\alpha|^p - K;$$

$$\left|\sum_{|\alpha|=0}^{m} B_\alpha(x,\xi_\gamma)\eta_\alpha\right| \le \delta_3 \sum_{|\alpha|=0}^{m} b_\alpha(|\xi_\alpha|^{p-1}+1)|\eta_\alpha|,$$

$$m = 0,1,\ldots,$$

где $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $a_\alpha \ge 0$, $b_\alpha \ge 0$ — *некоторые числовые последовательности;* δ_1, δ_2, δ_3, K — *положительные постоянные, не зависящие от m.*

2) *Пространство*

$\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)} \equiv \left\{u(x) \subset C_0^\infty, \rho(u) < \infty\right\}$ *нетривиально.*

3) *Пространство* $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ *компактно вложено в пространство* $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$.

4) *Для оператора* L_1 *существует непрерывный (относительно* $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$*) обратный оператор* L_1^{-1}.

5) *Для любых* $u_t(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$, *являющихся решением задач:*

$$L_1(u) + t(L_2(u) - h(x)) = 0, \quad 0 \le t \le 1;$$
$$D^\omega u(x)|_\Gamma = 0, \quad |\omega| = 0,1,\ldots,$$

имеет место априорная оценка

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \left\|D^\alpha u_t(x)\right\|_p^p < K_0. \tag{3}$$

Тогда при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$ *задача (1), (2) имеет по крайней мере одно обобщенное решение.*

Пример

$$L(u) = \sum_{n=0}^{\infty} D^{2n}\left(\frac{1}{2^{(2n)^2}}|D^{2n}u|^{p-2}\,D^{2n}u\right) + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n D^n\left(\frac{x-0,5}{2^{n^3}}|D^n u|^{p-2}\,D^n u\right) = h(x); \tag{4}$$

$$D^n u(0) = D^n u(1) = 0, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{5}$$

$p > 1$, $\lambda \in R$ — параметр.

Отметим, что оператор $L(u)$ таков, что из известных результатов [4] не следует разрешимость этой задачи. Условия 1) — 2) теоремы 1 достаточно легко проверяются. Выполнение условия 3) следует из условия компактного вложения пространства $W^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ в $W^\infty\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, полученного в [3]: $\sup\limits_n(b_n M_n^c) = 2|\lambda| < \infty$, где $\{M_n^s\}$ — выпуклая регуляризация посредством логарифмов [5] последовательности

$$\{M_n\} = \begin{cases}(a_n)^{-1}, \text{ если } a_n \ne 0;\\ \infty, \text{ если } a_n = 0.\end{cases}$$

Выполнение условия 4) следует из неравенства $\dfrac{\partial A_n}{\partial \xi_n} > (p-1)a_n|\xi_n|^{p-2}$ и результатов работы [4]. Для априорной оценки (2) должно быть выполнено неравенство $\delta_2 - \delta_3\delta_4 2^{p+1} > 0$, где в рассматриваемом примере $\delta_2 = \delta_3 = 1$, $\delta_4 = \sup\limits_n(b_n M_n^c)\cdot\sup\limits_i(n_{i+1} - n_i)$, $\{n_i\}$ — последовательность основных индексов при выпуклой регуляризации посредством логарифмов последовательности:

$$a_n = \begin{cases}2^{-n^2}, & n = 2k;\\ 0, & n = 2k+1,\end{cases}$$

$k = 0, 1, \ldots$, $\sup\limits_i(n_{i+1} - n_i) = 2$, т. е. $\delta_4 = 4|\lambda|$.

Поэтому при $|\lambda| < 2^{-(p+3)}$ задача (4), (5) имеет по крайней мере одно решение при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_n, p'\}_{(G)}$.

Для линейной задачи Дирихле с подчиненными членами

$$L_1(u) + \lambda L_2(u) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\left(A_\alpha(x)D^\alpha u\right) + n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\left(B_\alpha(x)D^\alpha u\right) = h(x), \quad x \in G; \tag{6}$$

$$D^\omega u(x)\Big|_\Gamma = 0, \quad |\omega| = 0,1,\ldots \tag{7}$$

установлена Фредгольмова разрешимость.

Теорема. 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. Существуют постоянные $0 < \delta_1 \le \delta_2$, $\delta_3 > 0$ *и последовательности* $a_0 > 0$, $a_\alpha \ge 0$, $b_0 > 0$, $b_\alpha \ge 0$, $|\alpha| = 1, 2, \ldots$, *такие, что для всех* $x \in G$ *и всех* α

$$a_\alpha\delta_1 \le A_\alpha(x) \le a_\alpha\delta_2, \quad |B_\alpha(x)| \le \delta_3 b_\alpha.$$

2. Пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$ *нетривиально и компактно вложено в пространство* $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, 2\}_{(G)}$.

Тогда задача (6), (7) имеет решение $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$ *при любой правой части* $h(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$, *удовлетворяющей условию:*

$$\int_G \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha(x) D^\alpha v_\lambda(x)\,dx = 0$$

для всех $v_\lambda(x)$, *являющихся решениями однородной задачи*

$$L_1(v) + \lambda L_2(v) = 0, \ \ x \in G, \quad D^\omega v(x)\Big|_\Gamma = 0, \ \ |\omega| = 0,1,\ldots \qquad (8)$$

Причем, если задача (8) имеет только нулевое решение, то задача (6), (7) имеет единственное решение при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$.

Показано, что при

$$|\lambda| < \delta_1 \delta_3^{-1} \|\mathcal{A}\|^{-1}, \qquad (9)$$

где $\|\mathcal{A}\|$ — норма оператора вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$ в пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, 2\}_{(G)}$, задача (8) имеет только нулевое решение. Таким образом, при выполнении условия (9) задача (6), (7) имеет единственное решение при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$.

Литература

1. **Балашова Г.С., Дубинский Ю.А.** Равномерная корректность семейства нелинейных краевых задач бесконечного порядка // Дифф. уравнения. 1994. Т. 30. № 4. С. 610 — 620.

2. **Балашова Г.С.** Теоремы вложения для банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций нескольких переменных // Математические заметки. 1990. Т. 47. № 6. С. 3 — 14.

3. **Балашова Г.С.** Об условиях продолжения следа и вложения для банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций // Математический сборник. 1993. Т. 184. № 1. С. 105 — 128.

4. **Дубинский Ю.А.** О нетривиальности некоторых классов функций и разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка // Дифф. уравнения. 1974. Т. 10. № 2. С. 231 — 240.

5. **Мандельбройт С.** Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1995.

Статья поступила в редакцию 23.10.2015