УДК 517.95

Особенности построения регулярного асимптотического решения сингуляроно возмущенной системы Вольтерра 2-го рода

А. Г. Елисеев, Д. А. Шапошникова*, И. Ф. Бывшева

Исследована предельная система уравнений Вольтерра 2-го рода сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы. Решена проблема построения регуляризованной по ε составляющей решения.
Ключевые слова: сингулярное возмущение, предельная система уравнения Вольтерра 2-го рода.

Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущенную интегральную систему Вольтерра 2-го рода:

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_0^t K(t,s)u(s,\varepsilon)ds=h(t). \qquad (1)$$

При изучении асимптотического решения (1), как правило, переходят к эквивалентной сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системе:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\dot{u}(t,\varepsilon)+A(t)u(t,\varepsilon)+\\&+\int_0^t B(t,s)u(s,\varepsilon)ds=\dot{h}(t);\\&u(0,\varepsilon)=\frac{h(0)}{\varepsilon}.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здесь $A(t)=K(t,t)$; $B(t,s)=K(t,s)$.

Изучению сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем и построению регуляризованной [1] асимптотики посвящено большое число работ. Среди них следует выделить работы В. Ф. Сафонова [2, 3] и его учеников. В изучаемых задачах предполагалось, что матрица $A(t)$ невырождена. Основная проблема при построении решения состояла в построении регуляризирующих функций описывающих сингулярную по ε часть решения (2). Вопрос построения регулярной по ε составляющей решения, как правило, не вызывал особых затруднений. В случае вырожденной или прямоугольной матрицы $A(t)$ это уже не так. Данная статья посвящена построению решения предельной системы уравнения Вольтерра 2-го рода сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы (2). Это позволяет понять основные проблемы построения регулярной по $\varepsilon\to 0$ составляющей решения сингулярно возмущенной системы (2).

При ε = 0 система (2) переходит в систему Вольтерра 2-го рода:

$$A(t)u(t)+\int_0^t B(t,s)u(s)ds=\dot{h}(t). \qquad (3)$$

Пусть выполнены условия:

1) $A(t)$, $B(t,s)$ имеют размеры $m\times n$;
2) $r(A(t))\le\min(m,n)$ тождественно по $t\in[0,T]$;
3) $A(t)$, $f(t)\in C^\infty[0,T]$;
4) $B(t,s)\in C^\infty[0\le s\le t\le T]$.

Следует отметить обширные исследования [4 — 7] в области дифференциальных систем вида:

$$A(t)\dot{x}(t)=B(t)x(t)+f(t),$$

где $A(t)$ — вырожденная матрица.

* shaposhnikovda@mail.ru

Данные работы носят фундаментальный характер, что помогло разобраться в проблеме построения решения системы Вольтерра 2-го рода с вырожденной или прямоугольной матрицей$A(t)$.

Некоторые сведения из линейной алгебры

Для независимости изложения приведем некоторые сведения из линейной алгебры.

Лемма 1. Пусть матрица размерности $m\times n$ $A(t)\in C[0, T]$. Тогда существует $[t_0, t_1]\subseteq [0, T]$, что $r(A(t)) = r_0 = \text{const}$, если $t\in [t_0, t_1]$.

Так как $r(A(t)) \le \min(m, n)$, то в силу непрерывности $A(t)$ и ее миноров существует t_0, такое что $r(A(t_0)) = \max\limits_{t\in[0,1]} r(A(t)) = r_0$, то есть существует минор $A_1(t_0)$, что $|A_1(t_0)|\ne 0$ и имеет размерность $r_0\times r_0$. Следовательно, существует окрестность $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, такая что для любых $t\in(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ $|A_1(t)|\ne 0$. Отсюда на любом отрезке $[t_0, t_1]\subset(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ в силу целочисленности ранга выполнено постоянство ранга $A(t)$.

Лемма 2. Пусть

1) $A(t)\in C^1 [0, T]$;

2) $r(A(t)) = r_0$ при $t\in[0, T]$.

Тогда существует матрица $L(t)\in C^1 [0, T]$, что

а) $\det L(t)\ne 0$;

в) $L(t)A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, где число нулевых строк $m - r_0$.

Рассмотрим матрицу $A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix}$ на отрезке $[0, T]$. Будем предполагать, что $A_{11}(t)$ базисный минор. Если это не так, то с помощью матрицы перестановок строк и столбцов базисный минор переводим в верхний левый угол. Подействуем на $A(t)$ слева блочной матрицей размера $m\times n$:

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}(t) & 0 \\ -A_{21}(t)A_{11}^{-1}(t) & I_{m-r_0} \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} I_{r_0} & A_{11}^{-1}(t)A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) - A_{21}(t)A_{11}^{-1}(t)A_{12}(t) \end{pmatrix}$$

Так как ранг матрицы не меняется при действии невырожденной матрицы перестановок и элементарных преобразований, то $A_{22}(t) - A_{21}(t)A_{11}^{-1}(t)A_{12}(t)\equiv 0$.

Таким образом, $A(t) \sim \begin{pmatrix} I_{r_0} & A_{11}^{-1}(t)A_{12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Отсюда, если учесть матрицы перестановок строк и столбцов, получим:

$$QP_l A(t)P_r = \begin{pmatrix} I_{r_0} & A_{11}^{-1}(t)A_{12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначив $L(t) = Q(t)P_l$, получим

$$L(t)A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Лемма 3. Пусть дана система Вольтерра 2-го рода:

$$\bar{A}(t)x(t) + \int_0^t \bar{B}(t,s)x(s)ds = h(t), \tag{5}$$

где

1) $A(t), h(t)\in C^1 [0, T]$;

2) $r(A(t)) \equiv r_0$;

3) $\bar{B}(t,s) \in C^1[0 \le s \le t \le T]$.

Тогда система (5) методом Гаусса приводится к виду:

$$\begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} B_1(t,s) \\ B_2(t,s) \end{pmatrix} x(s)ds = f(t).$$

На основании леммы 2 подействуем на (5) матрицей $L(t)$. Тогда получим:

$$\begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} B_1(t,s) \\ B_2(t,s) \end{pmatrix} x(s)ds = f(t),\ f(t) = L(t)h(t).$$

Разрешимость системы Вольтерра 2-го рода с вырожденным или прямоугольным оператором *A*(*t*)

Как было показано в лемме 3 система (5) эквивалентна

$$\begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} B_1(t,s) \\ B_2(t,s) \end{pmatrix} x(s)ds = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &A_1(t)x(t) + \int_0^t B_1(t,s)x(s)ds = f_1(t);\\ &\int_0^t B_2(t,s)x(s)ds = f_2(t);\\ &f_2(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Возможны случаи:

А) $r(A(t)) \equiv n$. В этом случае

$$\exists\, A^{-1}(t) \text{ и } x(t) = T^{-1}(t)A_1^{-1}(t)f(t), \tag{8}$$

где $T(t) = I + \int_0^t A_1^{-1}(t)B_1(t,s)\bullet ds.$

Подставив найденное $x(t)$ во второе уравнение, получим условие разрешимости системы

$$f_2(t) = \int_0^t B_2(t,s)T^{-1}(s)A_1^{-1}(s)f_1(s)ds. \tag{9}$$

Продифференцируем второе уравнение системы (7):

$$\overline{B}_2(t)x(t)+\int_0^t \dot{B}_2(t,s)x(s)ds=\dot{f}_2(t),\ \text{здесь}\ \overline{B}_2(t)=\overline{B}_2(t,t).$$

B) $r(\overline{B}_2(t))\equiv n$. В этом случае $\exists\ \overline{B}_2^{-1}(t)$ и

$$x(t)=T^{-1}(t)\overline{B}_2^{-1}(t)\dot{f}_2(t). \qquad (10).$$

Подставив (10) в первое уравнение (7), получим условие разрешимости системы:

$$\begin{cases} f_1(t)=A_1(t)T^{-1}(t)\overline{B}_2^{-1}(t)\dot{f}_2(t)+\int_0^t B_1(t,s)T^{-1}(s)\overline{B}_2^{-1}(s)\dot{f}_2(s)ds; \\ f_2(0)=0, \quad T(t)\equiv I+\int_0^t \overline{B}_2^{-1}(t)\dot{B}_2(t,s)\bullet ds. \end{cases} \qquad (11)$$

C) $r(A(t))\equiv m<n$. В этом случае имеем систему:

$$A(t)x(t)+\int_0^t B(t,s)x(s)ds=h(t). \qquad (12)$$

Не ограничивая общности будем считать, что компоненты вектор-решения $x_2(t)=\{x_{m+1}(t),\ldots,x_n(t)\}$ свободные. Тогда (12) можно переписать в виде:

$$A_1(t)x_1(t)+A_2(t)x_2(t)+\int_0^t B_1(t,s)x_1(s)ds+$$
$$+\int_0^t B_2(t,s)x_2(s)ds=h(t)$$

или

$$x_1(t)=T_1^{-1}(t)A_1^{-1}(t)h(t)-T_1^{-1}(t)T_2(t)x_2(t). \qquad (13)$$

Здесь

$$T_1(t)=I+\int_0^t A_1^{-1}(t)B_1(t,s)\bullet ds;$$
$$T_2(t)=A_1^{-1}(t)A_2(t)+\int_0^t A_1^{-1}(t)B_2(t,s)\bullet ds.$$

В этом случае решение интегральной системы Вольтерра 2-го рода неоднозначно, зависит от $n-m$ произвольных функций $x_2(t)=\{x_{m+1}(t),\ldots,x_n(t)\}\in C[0,T]$.

D) $r(A(t))\equiv r<\min(m,n)$;.
$r(\overline{B}_2(t))\equiv m-r$.

В этом случае систему (7) можно записать в виде:

$$\begin{cases} A_1(t)x(t)+\int_0^t B_1(t,s)x(s)ds=f_1(t); \\ \overline{B}_{22}(t)x_2(t)+\int_0^t \dot{B}_{22}(t,s)x_2(s)ds+ \\ \dfrac{d}{dt}\int_0^t B_{21}(t,s)x_1(s)ds=\dot{f}_2(t); \\ f_2(0)=0. \end{cases} \qquad (14)$$

Здесь
$r(\overline{B}_{22}(t))\equiv m-r$, $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$, $x_1(t)=\{x_1(t),\ldots,x_r(t)\}^T$, $x_2(t)=\{x_{r+1}(t),\ldots,x_n(t)\}^T$. Отсюда

$$\begin{aligned} x_2(t)&=T_2^{-1}(t)\overline{B}_{22}^{-1}(t)\dot{f}_2(t)- \\ &-T_2^{-1}(t)\overline{B}_{22}^{-1}(t)\frac{d}{dt}\int_0^t B_{21}(t,s)x_1(s)ds. \end{aligned} \qquad (15)$$

Подставив (15) в первое уравнение (14), получим:

$$A^{(1)}(t)x^{(1)}(t)+\int_0^t B^{(1)}(t,s)x^{(1)}(s)ds=f^{(1)}(t). \qquad (16)$$

Здесь

1) $x^{(1)}(t)=x_1(t)=\{x_1(t),\ldots,x_r(t)\}^T$;

2) $T_2(t)\equiv I+\int_0^t \overline{B}_{22}^{-1}(t)\dot{B}_{22}(t,s)\bullet ds$;;

3) $A^{(1)}(t)\equiv A_{11}(t)-T_2^{-1}(t)\overline{B}_{22}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\int_0^t B_{21}(t,s)\bullet ds$;

4) $B^{(1)}(t,s)\equiv B_{11}(t,s)-$
$-B_{12}(t,s)T_2^{-1}(s)\overline{B}_{22}^{-1}(s)\dfrac{d}{ds}\int_0^s B_{21}(s,s_1)\bullet ds_1$;

5) $f^{(1)}(t)\equiv f_1(t)-A_{12}(t)T_2^{-1}(t)\overline{B}_{22}^{-1}(t)\dot{f}_2(t)-$
$-\int_0^t B_{12}(t,s)T_2^{-1}(s)\overline{B}_{22}^{-1}(s)\dot{f}_2(s)ds$;

6) $r(A^{(1)}(t))=r_1\le r$.

Таким образом, задача свелась к случаям A) — D).

E) Общий случай.

$$r(A(t))\equiv r<\min(m,n);$$
$$r(\overline{B}_2(t))\equiv r_2<m-r.$$

Запишем систему (7):

$$\begin{cases} A_1(t)x(t)+\int_0^t B_1(t,s)x(s)ds=f_1(t); \\ \overline{B}_2(t)x(t)+\int_0^t \dot{B}_2(t,s)x(s)ds=\dot{f}_2(t); \\ f_2(0)=0. \end{cases} \qquad (17)$$

Так как $r(\overline{B}_2(t))\equiv r_2<m-r$, то действуя матрицей $L(t)$, согласно леммам 2, 3, получим:

$$\begin{pmatrix} B_1^{(1)}(t) \\ 0 \end{pmatrix}x(t)+\int_0^t \begin{pmatrix} C_1^{(1)}(t,s) \\ C_2^{(1)}(t,s) \end{pmatrix}x(s)ds=\begin{pmatrix} F_1^{(1)}(t) \\ F_2^{(2)}(t) \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Здесь

1) $\begin{pmatrix} B_1^{(1)}(t) \\ 0 \end{pmatrix}=L(t)\overline{B}_2(t)$ размера $m-r\times n$;

2) $C^{(1)}(t,s)=L(t)\dot{B}_2(t)$ размера $m-r\times n$;

3) $F^{(1)}(t)=L(t)\dot{f}_2(t)$;

4) $r(B_1^{(1)}(t))\equiv r_2$.

Интегральное уравнение (17) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} B_1^{(1)}(t)x(t)+\int\limits_0^t C_1^{(1)}(t,s)x(s)ds=F_1^{(1)}(t); \\ \int\limits_0^t C_2^{(1)}(t,s)x(s)ds=F_2^{(1)}(t); \\ F_2^{(1)}(0)=0; \end{cases} \qquad (19)$$

$$r(C_2^{(1)}(t,t))\equiv r_3\le m-r-r_2,$$

то есть имеем систему аналогичную (7), но меньшей размерности. Если в системе реализуется случай E), то (19) сведется к

$$\begin{cases} B_1^{(2)}(t)x(t)+\int\limits_0^t C_1^{(2)}(t,s)x(s)ds=F_1^{(2)}(t); \\ \int\limits_0^t C_2^{(2)}(t,s)x(s)ds=F_2^{(2)}(t); \\ F_2^{(2)}(0)=0; \end{cases}$$

$r(C_2^{(2)}(t,t))\equiv r_4\le m-r-r_2-r_3$, и так далее. В случае реализаций последовательно случаев E) $\exists k\ r(C_2^{(k)}(t,t))\equiv 0$.

Или имеем систему:

$$\begin{cases} B_1^{(k)}(t)x(t)+\int\limits_0^t C_1^{(k)}(t,s)x(s)ds=F_1^{(k)}(t); \\ \int\limits_0^t C_2^{(k)}(t,s)x(s)ds=F_2^{(k)}(t); \\ C_2^{(k)}(t,t)=0. \end{cases} \qquad (20)$$

Из последнего соотношения следуют два возможных случая

A) $C_2^{(k)}(t,s)\equiv 0 \quad F_2^{(k)}(t)\equiv 0.$

Разрешая первое уравнение системы в зависимости от случаев A) — D) будем получать либо решение в виде алгебраических соотношений с условиями на правые части уравнений, либо решение, содержащее произвольные функции.

B) $C_2^{(k)}(t,s)=(t-s)^p D(t,s).$

Условие разрешимости напишем в виде:

$$\int\limits_0^t (t-s)^p D(t,s)x(s)ds=F_2^{(k)}(t).$$

Продифференцируем это условие $p+1$ раз:

$$D(t,t)x(t)+\int\limits_0^t (C_2^{(k)}(t,s))^{(p+1)}x(s)ds=\frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}}F_2^{(k)}(t);$$
$$r(D(t,t))\le m-r_0-\ldots-r_k.$$

Снова приходим к уравнению типа первого уравнения системы (20), но меньшей размерности. Если процесс не стабилизируется, то придем к скалярному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода, которое решается, например с помощью резольвенты. Получив решение и совершив обратный ход, получим решение исходной системы интегральных уравнений.

Пример 1.

Матричное интегральное уравнение

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}x(t)+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}1&1\\t-s+1&t-s+1\end{pmatrix}x(s)ds=\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{pmatrix}$$

эквивалентно системе:

$$\begin{cases} x_1(t)+\int\limits_0^t (x_1(t)+x_2(s))ds=f_1(t); \\ \int\limits_0^t (t-s+1)(x_1(t)+x_2(s))ds=f_2(t); \\ f_2(0)=0. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x_1(t)=f_1(t)-f_2(t)+e^{-t}\int\limits_0^t e^s f_2(s)ds; \\ x_2(t)=\dot f_2(t)-f_1(t). \end{cases}$$

Пример 2.

Матричное интегральное уравнение

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}x(t)+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}1&1&1\\t-s&t-s&t-s\\\frac{(t-s)^2}{2}&\frac{(t-s)^2}{2}&\frac{(t-s)^2}{2}\end{pmatrix}x(s)ds=\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\f_3(t)\end{pmatrix}$$

эквивалентно системе

$$\begin{cases} x_1(t)+\int\limits_0^t (x_1(s)+x_2(s)+x_3(s))ds=f_1(t); \\ \int\limits_0^t\begin{pmatrix}t-s&t-s&t-s\\\frac{(t-s)^2}{2}&\frac{(t-s)^2}{2}&\frac{(t-s)^2}{2}\end{pmatrix}x(s)ds=\begin{pmatrix}f_2(t)\\f_3(t)\end{pmatrix}; \\ f_2(0)=f_3(0)=0. \end{cases}$$

Условие разрешимости. Первый шаг:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}x(t)+\int\limits_0^t\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}x(s)ds=\begin{pmatrix}\ddot f_2(t)\\\ddot f_3(t)\end{pmatrix}; \\ \ddot f_3(0)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)=\ddot f_2(t); \\ \int\limits_0^t (x_1(s)+x_2(s)+x_3(s))ds=\ddot f_3(t). \end{cases}$$

Условие разрешимости. Второй шаг:

$$x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)=\dddot f_2(t).$$

Решение:

$$\begin{cases} x_1(t) = f_1(t) - \ddot{f}_3(t); \\ x_2(t) - \text{произвольная непрерывная функция;} \\ x_3(t) = \ddot{f}_2(t) - f_1(t) + \ddot{f}_3(t) - x_2(t); \\ \ddot{f}_2(t) \equiv \ddot{f}_3(t); \\ f_2(0) = f_3(0) = \ddot{f}_3(0) = \dot{f}_2(0) = \dot{f}_3(0) = 0. \end{cases}$$

Литература

1. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

2. **Сафонов В.Ф.** Метод регуляризации для сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1979. Т. 43. № 3. С. 628 — 653.

3. **Сафонов В.Ф.** Регуляризованные асимптотические решения сингулярно возмущенных задач в критическом случае // Изв. высших учебных заведений. Сер. Математика. 1994. № 5. С. 41 — 48.

4. **Бояринцев Ю.Е.** Вырожденные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1982.

5. **Бояринцев Ю.Е.** Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.// Новосибирск, Наука,1980 г., 212 с.

6. **Бояринцев Ю.Е., Орлова И.В.** Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2006.

7. **Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.** Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.

Статья поступила в редакцию 23.10.2015