УДК 511.8
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-158-160

Целые функции с определенными арифметическими свойствами

С.Ф. Кудин, В.А. Подкопаева, Т.А. Сальникова, А.Я. Янченко

Исследованы целые функции, значения которых в точках некоторого дискретного множества обладают определенными арифметическими свойствами. При всяком неотрицательном числе p определен класс $F(p)$, состоящий из всех целых функций, обладающих следующими свойствами:
логарифм максимума модуля каждой из функций на круге радиуса R не превосходит R в степени p (при достаточно больших R);
для каждой функции из $F(p)$ существует сектор с центром в нуле, внутри которого функция не обращается в нуль ни в одной точке;
в точках некоторой двумерной комплексной решетки (общего вида) функция из $F(p)$ примет значение из кольца целых некоторого поля алгебраических чисел K, являющегося конечным расширением поля рациональных чисел, причем логарифмы высот значений функции в точках решетки, лежащих внутри круга радиусом R (с центром в нуле), не превосходят R в степени p (при достаточно больших R).
Описана структура классов $F(p)$ при p, лежащем в отрезке с концами из единицы и квадратного корня из двух.
Показано, что любая функция из такого класса является либо многочленом, либо представляет собой рациональную функцию специального вида (отношение многочлена и монома) от одной или двух экспонент с коэффициентами, принадлежащими некоторому полю, — конечному расширению поля K.
Для получения функциональных уравнений использован классический метод Гельфонда. При нахождении целых решений полученных функциональных уравнений использована созданная авторами новая техника сравнения близких значений целых функций конечного порядка.

Ключевые слова: целые функции, поле алгебраических чисел, двумерные решетки.

Для цитирования: Кудин С.Ф., Подкопаева В.А., Сальникова Т.А., Янченко А.Я. Целые функции с определенными арифметическими свойствами // Вестник МЭИ. 2017. № 6. С. 158—160. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-158-160.

The Integer Functions with Certain Arithmetic Properties

S.F. Kudin, V.A. Podkopayeva, T.A. Sal'nikova, A.Ya. Yanchenko

Integer functions the values of which have certain arithmetic properties at the points of a discrete set are studied. Given any nonnegative number p, we define the class $F(p)$ consisting of all integer functions having the following properties:
(a) The logarithm of the maximum modulus of each of the functions on a circle of radius R does not exceed R to power p (for sufficiently large values of R).
(b) For each function of the class $F(p)$ there is a sector with the center at zero, inside of which the function does not become zero at any point.
(c) At the points of a complex two-dimensional lattice (of the general form), a function from the class $F(p)$ takes a value from the ring of integers in a certain field of algebraic numbers K that is a finite extension of the field of rational numbers, and the logarithms of the heights of the function values at the lattice points lying inside the circle of radius R (centered at zero) do not exceed R to power p (for sufficiently large values of R).
The structure of the classes $F(p)$ with p lying in the interval with the ends equal to unity and the square root of two is described.
It is shown that any function from this class is either a polynomial or is a rational function of a special form (the ratio of a polynomial to a monomial) from one or two exponentials with coefficients belonging to a certain field that is a finite extension of the field K.
For obtaining the functional equations, Gelfond's classical method was used. In finding the integer solutions of the obtained functional equations, the authors used their newly developed technique of comparing close values of finite-order integer functions.

Key words: integer functions, field of algebraic numbers, two-dimensional lattices.

For citation: Kudin S.F., Podkopayeva V.A., Sal'nikova T.A., Yanchenko A.Ya. The Integer Functions with Certain Arithmetic Properties. MPEI Vestnik. 2017; 6:158—160. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-158-160.

Вопросы исследования классов целых функций, принимающих на заданном дискретном множестве значения из другого дискретного множества, лежат на пересечении теорий чисел и интерполяции целых функций.

Одной из первых работ в этом направлении была статья Д. Пойа [1], затем А.О.Гельфонд исследовал класс целых функций, которые в точках двумерной решетки гауссова поля принимали целые значения и расли не быстрее экспоненты [2]. В дальнейшем ряд математиков получили различные результаты в этом направлении [3], [4].

Тем не менее, классы целых функций, которые могут расти быстрее экспоненты и принимают целые рациональные значения (или значения из кольца целых фиксированного алгебраического поля) в точках двумерной решетки общего вида, не были исследованы. Одной из первых работ в этом направлении была [5].

Обозначим через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел; $M[t]$ — кольцо многочленов над полем или кольцом M.

Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ такие, что $v_1/v_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$; Γ — решетка, $\Gamma = \{l_1 v_1 + l_2 v_2;\ l_1, l_2 \in \mathbb{Z}\}$. При всяком положительном $\rho \in \mathbb{R}$ определим класс F_ρ, а именно $f(z) \in F_\rho \Leftrightarrow$

• $f(z)$ — целая функция, $f(0) = 1$, причем существует сектор $\Pi_f = \{z : \varphi < \arg z < \psi\}$, где $\varphi < \psi$ такой, что внутри Π_f нет нулей функции $f(z)$;

• для $M_f(R) \equiv \max\limits_{|z|\le R} |f(z)|$ при всяком достаточно большом $R > 0$ справедлива оценка $\ln M_f(R) \le R^\rho$;

• существует поле алгебраических чисел $K[K : \mathbb{Q}] < +\infty$, такое, что при всех $\omega \in \Gamma \cap \Pi_f$ $f(\omega) \in I_K$ (I_K — кольцо целых поля K), причем существует постоянная $\gamma_0 > 0$, такая, что для высот алгебраических чисел $f(\omega)$ при всех $\omega \in \Gamma \cap \Pi_f$ справедлива оценка

$$\ln \mathrm{H}(f(\omega)) \le \gamma_0 \left(\left| \ln |f(\omega)| \right| + 1 \right).$$

Отметим, что при $0 \le \rho \le 1$ класс F_ρ описан в [2].

Цель данной работы заключается в описании класса F_ρ при $1 \le \rho < \sqrt{2}$.

Теорема. *Пусть* $f \in F_\rho$ *при некотором* $0 \le \rho < \sqrt{2}$. *Тогда для любой из функций* $g(z) \in \{f(v_1 z); f(v_2 z)\}$ *справедливо утверждение, что существует поле* K_1, $[K_1 : \mathbb{Q}] < +\infty$, *такое, что:*

либо $g(z) = P(z) \in K_1[z]$;

либо $g(z) = \mathrm{e}^{-N(\ln\alpha)z} P\left(\mathrm{e}^{(\ln\alpha)z}\right)$, *где* $\alpha \in K_1 \backslash \{0;\ 1\}$; $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $P(t) \in K_1[t]$;

либо $g(z) = \mathrm{e}^{-(N_1 \ln\alpha_1 + N_2 \ln\alpha_2)z} P\left(\mathrm{e}^{(\ln\alpha_1)z}, \mathrm{e}^{(\ln\alpha_2)z}\right)$, *где* $N_1, N_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\alpha_1, \alpha_2 \in K_1 \backslash \{0,1\}$; $\{\ln\alpha_1, \ln\alpha_2\}$ — *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$; $P(t_1, t_2) \in K_1[t_1, t_2]$.

При доказательстве теоремы использованы следующие утверждения (приведены без доказательств).

Предложение 1. Пусть $f(z) \in F_\rho$, $1 \le \rho < \sqrt{2}$ и при всяком $R > 0$

$$C_R = \left\{ z : R \le |z| \le 3R;\ \left| \arg z - \frac{\varphi + \psi}{2} \right| \le \frac{1}{3}(\psi - \varphi) \right\}.$$

Тогда существует постоянная $\gamma_1 > 0$, зависящая только от $f(z)$, v_1, v_2, такая, что при всех $z \in C_R$ и любом $\omega \in \mathbb{C}$ с условием $|\omega| < R$ справедлива оценка

$$\ln |f(z + \omega)| \le \ln |f(z)| + \gamma_1 |\omega| R^{\rho - 1} \ln R.$$

Предложение 2. Пусть $f(z) \in F_\rho$, $\rho < \sqrt{2}$, тогда при всяком натуральном d существует конечный набор целых чисел $\{C_{k_1,k_2}\}$, не все из которых равны нулю, такой, что

$$\sum_{k_1,k_2} C_{k_1,k_2} \left(f(z)\right)^{dk_1} f(z + k_2 v_1) \equiv 0 \text{ в } \mathbb{C}.$$

Лемма. $f(z) \in F_\rho$, $\rho < \sqrt{2}$, тогда существует конечный набор целых чисел $\{D_k\}$, не все из которых равны нулю, такой, что

$$\sum_k D_k f(z + k v_1) \equiv 0 \text{ в } \mathbb{C}.$$

Следствие [2]. При выполнении условий леммы $f(v_1 z) = \sum P_k(z) \alpha_k^z$, где при всех k $P_k \in \mathbb{C}[z]$, все α_k лежат в некотором поле K_1, таком, что $[K_1 : \mathbb{Q}] < +\infty$.

Литература

1. **Polya G.** Uber Ganzwertig Ganze Funktionen // Rend. Cicc. Mat. Palermo, 1915. V. 40. No. 1. Pp. 1—16.
2. **Гельфонд А.О.** Трансцендентные и алгебраические числа. М.: ГИТТЛ, 1952.
3. **Welter M.** Sur un Theoreme de Gelfond-Selberg et Une Conjecture de Bundschuh-Shiokawa // Acta Arith. 2005. V. 116. No. 4. Pp. 363—385.
4. **Рочев И.П.** Обощение теорем Гельфонда и Вальдшмита о целозначных целых функциях // Математический сборник. 2011. Т. 202. № 8. С. 117—138.
5. **Подкопаева В.А., Янченко А.Я.** О целых функциях, принимающих вместе со своей производной целые рациональные значения в точках двумерной решетки // Вестник МЭИ. 2016. № 1. С. 53—58.

References

1. **Polya G.** Uber Ganzwertig Ganze Funktionen. Rend. Cicc. Mat. Palermo. 1915;40;1:1—16.
2. **Gel'fond A.O.** Transtsendentnye i Algebraicheskie Chisla. M.: GITTL, 1952. (in Russian).

3. **Welter M.** Sur un Theoreme de Gelfond-Selberg et Une Conjecture de Bundschuh-Shiokawa. Acta Arith. 2005;116;4:363—385.

4. **Rochev I.P.** Oboshchenie Teorem Gel'fonda i Val'dshmita o Tseloznachnyh Tselyh Funktsiyah. Matematicheskiy Cbornik. 2011;202;8:117—138. (in Russian).

5. **Podkopaeva V.A., Yanchenko A.Ya.** O Tselyh Funktsiyah, Prinimayushchih Vmeste so Svoey Proizvodnoy Tselye Ratsional'nye Znacheniya v Tochkah Dvumernoy Reshetki. Vestnik MPEI. 2016;1:53—58. (in Russian).

Сведения об авторах

Кудин Сергей Федорович — кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ»

Подкопаева Виктория Александровна — старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: vapodk@yandex.ru.

Сальникова Татьяна Анатольевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ»

Янченко Александр Яковлевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ»

Information about authors

Kudin Sergey F. — Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI

Podkopayeva Viktoriya A. — Senior Lecturer of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: vapodk@yandex.ru.

Sal'nikova Tatyana A. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI

Yanchenko Aleksandr Ya. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI

Статья поступила в редакцию 09.01.2017