УДК 517.95

О характере сходимости итерационно-асимптотического метода решения обратной задачи для уравнения Гельмгольца

А. С. Барашков*, А. А. Небера

Описан метод решения обратных задач для уравнений в частных производных, применяемый в случае плавно изменяющихся коэффициентов и состоящий в построении последовательности, которая асимптотически сходится к искомому решению обратной задачи. Указаны случаи, в которых данная последовательность сходится равномерно. Получено доказательство единственности решения обратной задачи.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, обратная задача, асимптотическая и равномерная сходимости, единственность решения.

Введение

В различных прикладных задачах, таких как интерпретация результатов электрозондирования или задача неразрушающего контроля возникает необходимость в решении многомерной обратной задачи в неограниченных областях. Одним из подходов является использование так называемой одномерной интерпретации. Для его улучшения в работах [1 — 3] был разработан итерационно-асимптотический метод, использующий особенности решений дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Согласно ему, строится последовательность, которая асимптотически сходится к искомому решению обратной задачи, причем нулевой член этой последовательности совпадает с результатом одномерной интерпретации и является по сути совокупностью решений одномерных обратных задач.

Оказывается, существуют случаи, когда вышеуказанная последовательность сходится к результату не асимптотически, а равномерно, они и являются предметом данной работы. Также приведено доказательство единственности решения обратной задачи в линеаризованной постановке.

* Barashkovas@mpei.ru

Прямая и обратная задачи

Определим класс задач, которые будем рассматривать далее.

Это будет уравнение Гельмгольца с малым параметром $\varepsilon > 0$ в полосе $D = \{(\xi, y): -\infty < \xi < \infty \ 0 \le y \le 1\}$:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - A(\xi) u = 0. \qquad (1)$$

Его решение должно удовлетворять условиям:

$$u(\xi, y = 1, \varepsilon) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y}(\xi, y = 0, \varepsilon) = 1. \qquad (2)$$

Коэффициент $A(\xi)$ из (1) — это бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция, ограниченная вместе со своими производными:

$$A(\xi) \ge 0, |A^{(k)}(\xi)| \le B_k, \ k = 0,1,\ldots \qquad (3)$$

Решение задачи (1), (2) определим как бесконечно дифференцируемую функцию $u(\xi, y, \varepsilon)$, являющуюся ограниченной в полосе D, а также удовлетворяющую там условиям (1), (2). Согласно [2, 3], решение существует и единственно.

Теперь определим прямую и обратную задачи. Прямой задачей назовем определение функции:

$$\varphi(\xi,\varepsilon) = u(\xi, y=0,\varepsilon) \tag{4}$$

по известному коэффициенту $A(\xi)$. Обратная задача, соответственно — восстановление коэффициента $A(\xi)$ с помощью функции $\varphi(\xi, \varepsilon)$ (4).

В частности, при проведении упомянутой выше электроразведки, на поверхности исследуемого участка земли измеряются значения напряженностей электрического и магнитного полей. Затем на их основе вычисляются значения $u(\xi, y = 0, \varepsilon)$, $\partial u/\partial y(\xi, y = 0, \varepsilon)$. По этим данным требуется делать выводы о структуре земных слоев.

Итерационно-асимптотический метод решения обратной задачи

Итерационно-асимптотический метод основывается на использовании решения одномерной обратной задачи, поэтому сначала рассмотрим ее. Одномерным аналогом задачи (1), (2), является

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} - a\nu = 0,\ \nu(y=1)=0,\ \frac{\partial \nu}{\partial y}(y=0)=1. \tag{5}$$

Здесь a уже не функция от x, а просто число. Прямой задачей назовем, соответственно, поиск $\psi = \nu(1)$ при известном a, а обратной — восстановление коэффициента a с помощью ψ.

В одномерном случае решение прямой задачи можно выписать в явном виде:

$$\psi = \frac{-\mathrm{th}\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = f(a). \tag{6}$$

Здесь функция $f(a)$ является возрастающей, бесконечно дифференцируемой для $a\in[0, \infty)$, $f(0) = -1$ и принимает значения из $\psi\in[-1, 0)$. Обозначим обратную ей функцию, как Φ:

$$a = f^{-1}(\psi) = \Phi(\psi). \tag{7}$$

Полученная таким образом функция Φ является возрастающей и бесконечно дифференцируемой. С ее помощью и будет строиться решение в итерационно-асимптотическом методе.

Вернемся к задаче (1), (2). Согласно итерационно-асимптотическому методу построим последовательность, сходящуюся к решению обратной задачи. Нулевым приближением будет являться

$$A_0(\xi,\varepsilon) = \Phi(\varphi(\xi,\varepsilon)), \tag{8}$$

где $\Phi(\psi)$ — решение одномерной обратной задачи (7). Далее, пусть известно приближение $A_n(\xi, \varepsilon)$. Тогда приближение $A_{n+1}(\xi, \varepsilon)$ получаем следующим образом. Для известного коэффициента $A_n(\xi, \varepsilon)$ необходимо решить прямую задачу:

$$\begin{gathered} \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - A_n(\xi,\varepsilon)w = 0; \\ w(\xi, y=1,\varepsilon)=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}(\xi, y=0,\varepsilon)=1; \\ \varphi_n(\xi,\varepsilon) = w(\xi, y=0,\varepsilon). \end{gathered} \tag{9}$$

С помощью ее решения — функции $\varphi_n(\xi, \varepsilon)$ — строим следующее приближение:

$$A_{n+1}(\xi,\varepsilon) = \Phi\left(-\frac{-\mathrm{th}\sqrt{A_n(\xi,\varepsilon)}}{\sqrt{A_n(\xi,\varepsilon)}} + \varphi(\xi,\varepsilon) - \varphi_n(\xi,\varepsilon)\right). \tag{10}$$

Асимптотическую сходимость обеспечивает

Теорема [2, 3, С. 95]. *Пусть коэффициент $A(\xi)$ из (1) — положительная, ограниченная вместе со своими производными функция $A(\xi) \ge b > 0, |A^{(k)}(\xi)| \le B_k, k = 0,1,\ldots$. Пусть $\varphi(\xi, \varepsilon)$ — решение прямой задачи для уравнения (1), определяемое по формуле (4). Тогда последовательность $A_n(\xi, \varepsilon)$, построенная по алгоритму (8) — (10) асимптотически сходятся к коэффициенту $A(\xi)$:*

$$A_n(\xi,\varepsilon) - A(\xi) = O(\varepsilon^{n+1}),\ \varepsilon \to 0, n = 0,1,\ldots \tag{11}$$

Уточним смысл оценки (11). Для любого отрезка $\varepsilon\in[0, \gamma]$, $\gamma > 0$ существуют числа C_n (C_n могут зависеть от γ, но не зависят от ε), для которых выполняются неравенства:

$$\sup_{-\infty<\xi<\infty} \left|A_n(\xi,\varepsilon) - A(\xi)\right| \le C_n\varepsilon^{n+1}.$$

Особенности численной реализации метода

При численной реализации итерационно-асимптотического метода решения обратной задачи положим $\varepsilon = 1$, $\xi = x$, $A(\xi) = \sigma(\xi)$. Исходное уравнение перейдет в следующее:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma(x)u = 0 \tag{12}$$

с граничными условиями:

$$u(x, y=1) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y=0) = 1. \tag{13}$$

Прямой задачей для уравнения (12) будет задача нахождения функции $\varphi(x) = u(x, y = 0)$, обратной — задача восстановления коэффициента $\sigma(x)$ по известной функции $\varphi(x)$.

Будем считать коэффициент $\sigma(x)$ периодической функцией. Этот выбор обусловлен тем, что решать уравнение (1) проще в прямоугольнике $-T \le x \le T$, $0 \le y \le 1$, чем в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \le y \le 1$. Так как объектом исследования является обратная задача, то можно на этом этапе исследования уйти от сложностей, возникающих при решении прямых задач в неограниченной области.

Случаи равномерной сходимости

Напомним определение равномерной сходимости. Пусть функция $\sigma(x)$ определена при $x\in(-\infty, \infty)$.

Определение. *Последовательность* $\sigma_n(x)$ *равномерно сходится к* $\sigma(x)$*, если для любого* $\delta \geq 0$ *найдется номер* $N(\delta)$ *такой, что для всех* $n > N$ *и для всех* $x\in(-\infty, \infty)$ *выполняется неравенство* $|\sigma_n(x) - \sigma(x)| < \delta$.

Поэтому, в случае равномерной сходимости невязка $|\sigma_n - \sigma\| \to 0$ при $n \to \infty$. Асимптотически сходящаяся последовательность (формула (11)) при любом фиксированном ε (в том числе и для $\varepsilon = 1$), ведет себя иначе. Невязка $|\sigma_n - \sigma\|$ уменьшается лишь до некоторого $n = N$, а дальше либо стабилизируется, т.е. колеблется в пределах $0 < \delta_1 \leq |\sigma_n - \sigma\| \leq \delta_1$, либо начинает расти.

Опишем наблюдавшиеся случаи равномерной сходимости приближений $\sigma_n(x)$, построенных в соответствии с описанным выше итерационно-асимптотическим методом. Сначала выбиралась какая-то конкретная функция $\sigma(x)$ и для нее решалась прямая задача с помощью численного метода второго порядка аппроксимации на сетке $M\times K$ в прямоугольнике $\{-T \leq x \leq T, 0 \leq y \leq 1\}$ Полученная функция $\varphi(x)$ (ее разностная аппроксимация) использовалась уже для решения обратной задачи. Согласно шагам алгоритма строились приближения $\sigma_n(x)$ вернее их разностные аппроксимации — векторы $(\sigma_n^{(1)},\ldots\sigma_n^{(M)})$). При этом выяснилось, что если вычислять невязку $|\sigma_n - \sigma\|$, то она будет уменьшаться с ростом n до величины машинного нуля (порядка 10^{-16}) Из чего можно сделать вывод об равномерной сходимости $\sigma_n(x)$ к $\sigma(x)$ (точнее $(\sigma_n^{(1)},\ldots\sigma_n^{(M)})$ к $(\sigma^{(1)},\ldots\sigma^{(M)})$).

Теоретическое обоснование равномерной сходимости осуществляется следующим образом. Рассмотрим $\Delta_n(x) = \sigma_n(x) - \sigma(x)$. Итерационно-асимптотический метод позволяет поставить в соответствие функции $\Delta_n(x)$ функцию $\Delta_{n+1}(x)$; тем самым задан оператор $\mathcal{A} : \mathcal{A}(\Delta_n(x)) = \Delta_{n+1}(x)$. Равномерное стремление $\Delta_n(x) \to 0$ связано с главной линейной частью оператора $\mathcal{A}$ [5, С. 410]. Для разностной аппроксимации задачи главная линейная часть оператора $\mathcal{A}$ выражается матрицей $\mathcal{A}_0$ размера $M\times M$. Эти матрицы были найдены и исследованы на предмет собственных значений. В каждом из рассмотренных случаев было выполнено условие $|\lambda_{\max}| < 1$. Поэтому [5, С. 339] для дискретного аналога уравнения Гельмгольца выполнено $\|\sigma_n(x) - \sigma(x)\| \to 0$ при $n \to \infty$.

В уравнении (12) зададим коэффициент σ по формуле:

$$\sigma(x) = 8 + 4\cos(x) - 3\sin(3x) + \sin(10x). \qquad (14)$$

По этой функции с полупериодом $T = \pi$ найдем $\varphi(x)$ и к ней будем применять итерационно-асимптотический метод. На рис. 1 изображены графики коэффициентов σ, σ_0 и $\sigma_{10}(x)$, выбранная сетка — $M\times N = 100\times100$. Напомним, что $\sigma_0(x)$ — результат одномерной интерпретации. Можно заметить, что $\sigma_0(x)$ не улавливает экстремумов функции $\sigma(x)$, тогда как часто определение экстремумов является целью интерпретации. Например, месторождения углеводородов приурочены к так называемым куполам.

Уже на пятой итерации приближение становится лучше, а на десятой — почти совпадает с $\sigma(x)$ (см. рис. 1). Матрицы $\mathcal{A}_0$ вычислялись для $M = 5, 10, 20, 40; 60, 80, 100; 120$; $N = 100$. Соответствующие максимальные по модулю собственные значения удовлетворяли соотношению $|\lambda_{\max}| < 1$. Была замечена закономерность: чем больше M, тем ближе $|\lambda_{\max}|$ к 1. В частности $\lambda_{\max}$ (120) = 0,9972. Похоже, что справедлива оценка (рис. 2): $\lambda_{max}(M) = 1 - C / M^2 + o(M^{-2})$, $M \to \infty$, $C \approx 5$.

Второй пример построен следующим образом. Для $M = 40$ и коэффициента (14) была решена прямая задача. На эти данные был наложен шум на уровне Далее для этих зашумленных данных решалась обратная задача. Эта обратная задача была решена с точностью до машинного нуля (10^{-16}) по исходной информации $\varphi(x)$ (на этот раз решение обратной задачи — коэффициент

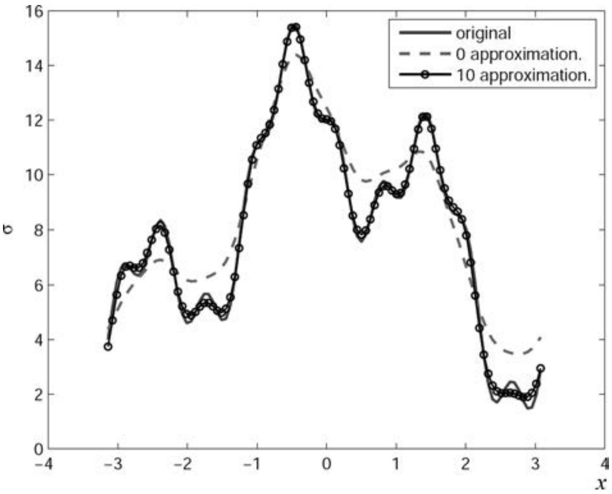

Рис. 1. Искомая σ, нулевое и десятое приближения

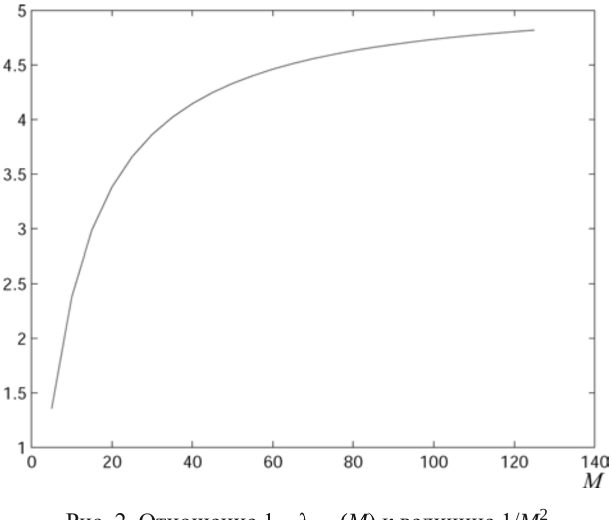

Рис. 2. Отношение $1 - \lambda_{\max}(M)$ к величине $1/M^2$

$\sigma(x)$ нам неизвестен.) С помощью линейной аппроксимации коэффициент $\sigma(x)$ был продолжен с 40 точек на весь отрезок $[-\pi, \pi]$. По этому коэффициенту находились решения прямых и обратных задач для $M = 10$, 20, 40, 80, 160. На рис. 3 показаны исходная $\sigma(x)$, нулевое и тридцатое приближения (для $M = 160$). Соотношение $|\lambda_{max}$ (для $M)| < 1$. выполнено и для этого случая, т.е. равномерная сходимость $\sigma_n(x)$ к $\sigma(x)$ есть и в этом случае. Сформулируем установленный факт.

Утверждение. *Для коэффициента* $\sigma(x)$ *из (14) последовательность* $\sigma_n(x)$, *построенная по формулам (8) — (10) для разностной аппроксимации задачи (12) — (13) на сетках M×N, где M = 5, 10, 20, 40, 60, 80, 100; N = 100, равномерно сходится к решению обратной задачи* $\sigma(x)$*:*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[-\pi,\pi]} |\sigma_n(x)-\sigma(x)| = 0,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le m\le M} |\sigma_n^{(m)}-\sigma^{(m)}| = 0.$$

Обнаруженная равномерная сходимость метода выдвигает новую проблему. Асимптотическая сходимость (формула (11)) доказана без использования теоремы единственности решения обратной задачи. Если функции $\varphi(\xi, \varepsilon)$ соответствует несколько коэффициентов $A(\xi)$, то это не противоречит оценке (11).

Для равномерно сходящейся последовательности это не так: одна и та же последовательность $\sigma_n(x)$ не может равномерно сходиться к нескольким функциям $\sigma(x)$. Поэтому, если не доказана единственность решения обратной задачи, то правомерно сомнение: к тому ли решению обратной задачи сходится последовательность $\sigma_n(x)$?

Единственность решения обратной задачи в линеаризованной постановке

Покажем, что задача имеет единственное решение в линеаризованной постановке. Решения уравнения:

Рис. 3. Искомая σ, нулевое и тридцатое приближения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\tilde\sigma(x)u=0;\quad u(x,y=H)=0;\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y=0)=d \tag{15}$$

будем искать в виде:

$$\tilde\sigma(x)=\sigma_0+\gamma\sigma(x);\ u(x,y)=u_0(y)+\gamma v(x,y);\quad u_0(y=H)=0;\ \frac{du_0}{dy}(y=0)=d, \tag{16}$$

здесь γ — некоторый малый параметр; σ_0 — константа; $\sigma(x)$ — периодическая функция с периодом $2T$. Подставляя в исходное уравнение и отбрасывая члены второго порядка по γ получаем систему:

$$\begin{cases}\Delta u_0-\sigma_0 u_0=0;\\ \Delta v-\sigma_0 v=\sigma(x)u_0(y)\end{cases} \tag{17}$$

с краевыми условиями

$$u_0(y=H)=0,\ \frac{\partial u_0}{\partial y}(y=0)=d,\ v(x,y=H)=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y=0)=0.$$

Первое уравнение можно решить аналитически:

$$u_0=\frac{d\cdot\sinh[\sqrt{\sigma_0}(y-H)]}{\sqrt{\sigma_0}\cosh[\sqrt{\sigma_0}H]}.$$

Напомним, что обратная задача заключается в восстановлении коэффициента $\tilde\sigma(x)$ с помощью функции $\tilde\varphi(x) = u(x, y = 0)$. Ее можно записать следующим образом:

$$\tilde\varphi(x)=u(x,y=0)=u_0(0)+\gamma v(x,y=0)=\tilde C+\gamma\varphi(x),$$

где $\tilde C = u_0(0)$. То есть нам также известна функция $\varphi(x) = v(x, y = 0)$. Разложим $\sigma(x)$ как периодическую функцию в ряд Фурье:

$$\sigma(x)=a_0/2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{\pi}{T}kx\right)+b_k\sin\left(\frac{\pi}{T}kx\right)\right) \tag{18}$$

и решим для каждого k уравнения, получающиеся при подстановке этого разложения во второе уравнение системы (17):

$$\Delta w_0-\sigma_0 w_0=\frac{a_0}{2}\frac{d\cdot\sinh[\sqrt{\sigma_0}(y-H)]}{\sqrt{\sigma_0}\cosh[\sqrt{\sigma_0}H]};$$

$$\Delta w_k-\sigma_0 w_k=a_k\cos\left(\frac{\pi}{T}kx\right)\frac{d\cdot\sinh[\sqrt{\sigma_0}(y-H)]}{\sqrt{\sigma_0}\cosh[\sqrt{\sigma_0}H]},\ k=1,2,\ldots;$$

$$\Delta\overline{w_k}-\sigma_0\overline{w_k}=b_k\sin\left(\frac{\pi}{T}kx\right)\frac{d\cdot\sinh[\sqrt{\sigma_0}(y-H)]}{\sqrt{\sigma_0}\cosh[\sqrt{\sigma_0}H]},\ k=1,2,\ldots$$

Уравнение для w_0 является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением по переменной y. Решим его, используя в качестве частного решения

$$w_0^p = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{d \cdot y \cdot \cosh[\sqrt{\sigma_0}(y-H)]}{2\sigma_0 \cosh[\sqrt{\sigma_0}H]}.$$

Получим значение w_0 в нуле:

$$w_0(0) = a_0 \cdot \frac{-Me^{-\alpha H}(4H\alpha e^{2\alpha H} - e^{4\alpha H} + 1)}{4\alpha^2(e^{2\alpha H} + 1)} = a_0 r_0.$$

Здесь

$$\alpha = \sqrt{\sigma_0} \neq 0,\ M = \frac{d}{2\sqrt{\sigma_0}\mathrm{ch}[\sqrt{\sigma_0}H]} \neq 0.$$

Нетрудно видеть, что r_0 отличен от нуля тогда же, когда и выражение $(4H\alpha e^{2\alpha H} - e^{4\alpha H} + 1)$. Трехкратным дифференцированием можно показать, что это выражение отлично от нуля при условии $\alpha H \neq 0$ что в нашем случае верно. Итак,

$$w_0(0) = a_0 r_0,\ r_0 \neq 0.$$

Решения остальных w_k будем искать в виде, соответственно:

$$w_k = a_k \cos\left(\frac{\pi}{T}kx\right)\xi(y),\ \overline{w_k} = b_k \sin\left(\frac{\pi}{T}kx\right)\xi(y).$$

При подстановке получаем в обоих случаях одинаковое уравнение для ξ:

$$\begin{cases} \xi'' - \left(\dfrac{\pi k}{T}\right)^2 \xi - \sigma_0\xi = \dfrac{d \cdot \sinh[\sqrt{\sigma_0}(y-H)]}{\sqrt{\sigma_0}\cosh[\sqrt{\sigma_0}H]}; \\ \xi(y=H) = 0; \\ \xi'(y=0) = 0. \end{cases}$$

Заменим переменные для краткости:

$$M = \frac{d}{\sqrt{\sigma_0}\cosh[\sqrt{\sigma_0}H]},\ P^2 = \left(\frac{\pi k}{T}\right)^2 + \sigma_0,\ \sqrt{\sigma_0} = \alpha.$$

Ищем частное решение в виде $A\sinh(\alpha y - \alpha H)$, в результате находим

$$\xi(y) = \frac{\alpha M \cosh(\alpha H)\sinh(Py - PH)}{P(P^2-\alpha^2)\cosh(PH)} - \frac{M}{P^2-\alpha^2}\sinh(\alpha y - \alpha H).$$

Тогда

$$r_k = \xi(0) = \frac{M}{P(P^2-\alpha^2)\cosh(PH)} \cdot [-\alpha\cosh(\alpha H)\sinh(PH) +$$
$$+P\sinh(\alpha H)\cosh(PH)] = \frac{M}{P(P^2-\alpha^2)\cosh(PH)} \cdot Q.$$

Это выражение не равно нулю, когда Q не равно нулю, а Q не равно нулю, тогда же, когда и выражение:

$$\frac{\tanh(\alpha H)}{\alpha} - \frac{\tanh(PH)}{P} = f(\alpha) - f(P),\ \ f(x) = \frac{\tanh(Hx)}{x}.$$

Исследуя производные функции $f(x)$ нетрудно показать, что $f(x)$ строго монотонна при $x > 0$, поэтому $Q \neq 0$. и соответственно, $r_k \neq 0$, $k = 1, 2, ...$

Возвращаясь к уравнению для v, можно записать:

$$v = w_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(w_k + \overline{w_k}),$$

в нуле получаем

$$v(x, y=0) = \varphi(x) = w_0 +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{\pi}{T}kx\right)\xi(0) + b_k \sin\left(\frac{\pi}{T}kx\right)\xi(0)\right),$$

но тогда если разложить $\varphi(x)$ в ряд Фурье, получим:

$$\varphi(x) = A_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\left(\frac{\pi}{T}kx\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi}{T}kx\right)\right) =$$
$$= a_0 r_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{\pi}{T}kx\right)r_k + b_k \sin\left(\frac{\pi}{T}kx\right)r_k\right).$$

Для всех коэффициентов Фурье разложения $\sigma(x)$ (18) мы получили значения:

$$a_0 = A_0/(2r_0),\ a_k = A_k/r_k,\ b_k = B_k/r_k,\ k = 1, 2, \ldots,$$

поэтому $\sigma(x)$ определяется единственным образом, следовательно и для определения $\tilde{\sigma}(x)$ из (16) справедлива теорема единственности.

Литература

1. **Барашков А.С., Дмитриев В.И.** Об обратной задаче глубинного магнитотеллурического зондирования // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 1. С. 83 — 86

2. **Барашков А.С.** Асимптотические представления решения обратной задачи для уравнения Гельмгольца // Вычислительная математика и математическая физика. 1988. Т. 28. № 12. С. 1823 — 1831.

3. **Barashkov A.S.** Small parameter Method in Multidimensional Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1998.

4. **Бердичевский М.Н., Дмитриев В.Н.** Модели и методы магнитотеллургии. М.: Научный мир, 2009.

5. **Бахвалов Н.С.** Численные методы. М.: Наука, 1973.

Статья поступила в редакцию 19.11.2015