УДК 517.956.4
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-166-171

Оценки вероятностей уклонений сумм независимых случайных величин Бернулли

А.Н. Архангельский, И.Н. Дорофеева, С.Ф. Кудин, Г.М. Пиголкин

Во многих задачах теории вероятностей и математической статистики возникает необходимость анализа суммы независимых бернуллиевских случайных величин. Если исходные величины одинаково распределены, то сумма будет биномиальной величиной. Рассмотрен случай суммы разнораспределенных бернуллиевских случайных величин. С помощью метода сопряженных распределений выведены двусторонние оценки вероятностей отклонения среднеарифметического из независимых бернуллиевских случайных величин от среднеарифметического из вероятностей успеха.

Ключевые слова: бернуллиевские, независимые и сопряженные случайные величины, интеграл Лебега — Стильтьеса.

Для цитирования: Архангельский М.Н., Дорофеева И.Н., Кудин С.Ф., Пиголкин Г.М. Оценки вероятностей уклонений сумм независимых случайных величин Бернулли // Вестник МЭИ. 2017. № 6. С. 166—171. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-166-171.

Estimates of the Deviation Probabilities for the Sums of Independent Bernoulli Random Variables

A.N. Arkhangelsky, I.N. Dorofeeva, S.F. Kudin, G.M. Pigolkin

A need to analyze the sum of independent Bernoulli random variables is encountered in many problems considered in the probability theory and mathematical statistics. As is known, if the initial quantities have the same distribution, their sum will be a binomial quantity.
The case of the sum of non-identically distributed Bernoulli random variables is considered. Bilateral estimates of the deviation probability for the arithmetic mean of independent Bernoulli random variables from the arithmetic mean of success probabilities have been derived using the conjugate distributions method.

Key words: Bernoulli random variables, independent random variables, conjugate random variables, Lebegue-Stieltjes integral.

For citation: Arkhangelsky A.N., Dorofeeva I.N., Kudin S F., Pigolkin G.M. Estimates of the Deviation Probabilities for the Sums of Independent Bernoulli Random Variables. MPEI Vestnik. 2017;6: 166—171. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-166-171.

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые бернуллиевские случайные величины, принимающие значение единицы с вероятностью p_i и нуля с вероятностью $q_i = 1 - p_i$ для ξ_i, $i = 1, 2, ..., n$, соответственно.

Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,;\ \bar{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\,,\ \ p_{(1)} = \min_{1\le i\le n} p_i\,;$$
$$p_{(n)} = \max_{1\le i\le n} p_i\,;\ \ \vec{p} = \left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right).$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_1 > 1$ *— произвольная постоянная, а* $\alpha_2 > 1$ *выбирается так, чтобы* $1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 = 1$. *Тогда если выполнены два условия:*

(i) $0 < \varepsilon < \theta_1\left(1 - \bar{p}_n\right)$, где $\theta_1 = \min\left(0{,}5, \dfrac{p_{(1)}}{2{,}8\alpha_1 + p_{(1)}}\right)$;

(ii) $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i} \ge 1{,}58\alpha_2 \sqrt{\left(1 + p_{(1)}\right)/p_{(1)}}$,

будут справедливы оценки

$$P\left(\frac{S_n}{n} - \bar{p}_n \ge \varepsilon\right) \ge \gamma_1\left(\vec{p}, \varepsilon\right);$$
$$P\left(\frac{S_n}{n} - \bar{p}_n \le -\varepsilon\right) \ge \gamma_1\left(\vec{p}, \varepsilon\right), \tag{1}$$

где

$$\gamma_1\left(\bar{p}, \varepsilon\right) = \left(\frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{\varepsilon^2\Lambda_1 + 2\pi} + \left(\pi - 1\right)\sqrt{\Lambda_1}\,\varepsilon} - \frac{1{,}1166}{\sqrt{\Lambda_2}}\right) \times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{p_i\varepsilon}{p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{-\varepsilon n\overline{p}_n}{p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\left(1+\frac{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n\right)\varepsilon}{p_{(1)}\overline{p}_n\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\right)\right\};$$

$$\Lambda_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_iq_i\left(p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)+\varepsilon\right)}{p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)\left(p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)+p_i\varepsilon\right)^2};\quad(2)$$

$$\Lambda_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_{(1)}p_iq_i\left(p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)+\varepsilon\right)\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}{\left(p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)+p_i\varepsilon\right)^2}.\quad(3)$$

Теорема 2. *Пусть произвольные постоянные* γ, μ_1, μ_2 *таковы, что* $0,5<\gamma<1;\ \mu_1>0;\ \mu_2>0;\ \mu_1+\mu_2=1$. *Тогда если выполняются условия*

$$\text{(j)}\quad 0<\varepsilon\le\theta_2\left(1-\overline{p}_n\right),$$

где

$$\theta_2=\min\left\{0,5,\quad\frac{\mu_1p_{(n)}\left(\gamma\sqrt{2\pi}-\sqrt{\pi/2}\right)}{2,2332+\mu_1\gamma\sqrt{2\pi}-\mu_1\sqrt{\pi/2}}\right\};$$

$$\text{(jj)}\quad\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_iq_i}\ge\frac{3,16}{\mu_2\left(2\gamma-1\right)},$$

то будут справедливы оценки

$$P\left(\frac{S_n}{n}-\overline{p}_n\ge\varepsilon\right)\le\gamma_2\left(\overline{p},\varepsilon\right);$$
$$P\left(\frac{S_n}{n}-\overline{p}_n\le-\varepsilon\right)\le\gamma_2\left(\overline{p},\varepsilon\right),$$

где

$$\gamma_2\left(\overline{p},\varepsilon\right)=\left(\frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{\left(\pi-2\right)^2\varepsilon^2\Lambda_3+2\pi+2\varepsilon\sqrt{\Lambda_3}}}+\frac{1,1166}{\sqrt{\Lambda_4}}\right)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{p_i\varepsilon}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{-\varepsilon\chi\left(\varepsilon\right)}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\left[n-n\left(1-\overline{p}_n\right)\left(1-p_{(1)}\frac{\varepsilon\chi\left(\varepsilon\right)}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\right)^{-1}\right]\right\};$$

$$\Lambda_3=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_iq_i\chi^2\left(\varepsilon\right)\left(\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)p_{(n)}+\varepsilon\right)}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)\left(p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)+p_i\varepsilon\right)^2};\quad(4)$$

$$\chi\left(\varepsilon\right)=1-\frac{\varepsilon}{2p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)};\quad(5)$$

$$\Lambda_4=\sum_{i=1}^{n}\frac{p_{(n)}p_iq_i\left(p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)+\varepsilon\right)\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}{\left(p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)+p_i\varepsilon\right)^2}.\quad(6)$$

Следствие. Если выполнены условия соответствующих теорем, то справедливы оценки

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\overline{p}_n\right|\ge\varepsilon\right)\ge2\gamma_1\left(\overline{p},\varepsilon\right);$$
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\overline{p}_n\right|\ge\varepsilon\right)\le2\gamma_2\left(\overline{p},\varepsilon\right).$$

Доказательство теорем 1, 2. Пусть $t>0$ — некоторый числовой параметр и $\eta_i=\xi_i-p_i$. Ясно, что $P(\eta_i=q_i)=p_i$, $P(\eta_i=-p_i)=q_i$ и математическое ожидание $E\eta_i=0$. Очевидно, $Ee^{t\eta_i}=e^{-tp_i}\left(p_ie^t+q_i\right)$.

Определим функции распределения сопряженных случайных величин $\tilde{\eta}_i$ следующими равенствами:

$$\tilde{F}_i\left(x\right)=\frac{e^{tp_i}}{p_ie^t+q_i}\int_{-\infty}^{x}e^{tu}dP\left(\eta_i<u\right),\quad i=1,\ldots,n.\quad(7)$$

В последнем равенстве имеется в виду интеграл Лебега – Стилтьеса, тогда из (7) получим

$$P\left(\eta_i<x\right)=\frac{p_ie^t+q_i}{e^{tp_i}}\int_{-\infty}^{x}e^{-tu}dP\left(\tilde{\eta}_i<u\right),\quad i=1,\ldots,n.$$

Легко проверить, что

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i<x\right)=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(p_ie^t+q_i\right)}{\exp\left(tn\overline{p}_n\right)}\int_{-\infty}^{x}e^{-tu}dP\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{\eta}_i<u\right),$$

откуда следует равенство

$$P\left(\frac{S_n}{n}-\overline{p}_n\ge\varepsilon\right)=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(p_ie^t+q_i\right)}{\exp\left[t\left(n\overline{p}_n+E\tilde{S}_n\right)\right]}\times$$
$$\times\int_{\frac{\varepsilon n-E\tilde{S}_n}{\sqrt{D\tilde{S}_n}}}^{+\infty}\exp\left(-t\sqrt{D\tilde{S}_n}\,v\right)d\tilde{F}_n\left(v\right),\quad(8)$$

где $\tilde{S}_n=\sum_{i=1}^{n}\tilde{\eta}_i$; $E\tilde{S}_n$, $D\tilde{S}_n$ — математическое ожидание и дисперсия $\tilde{S}_n$;

$$\tilde{F}_n\left(v\right)=P\left(\left(\tilde{S}_n-E\tilde{S}_n\right)/\sqrt{D\tilde{S}_n}<v\right).$$

Поскольку подынтегральное выражение в (8) неотрицательно, то выбираем $t>0$ таким, что выражение, стоящее в нижнем пределе интеграла в правой части (8), будет не больше нуля. Получим, что правая часть (8) оценивается для всех таких t снизу аналогичным выражением правой части (8) с нулевым нижним пределом интеграла. Аналогично, выбирая $t > 0$ таким, чтобы нижний предел интеграла был не меньше нуля, получим, что правая часть (8) оценивается сверху для всех таких t правой частью (8) с нижним нулевым пределом интеграла. Это основная идея получения нижних и верхних оценок.

Поскольку $p_i + q_i = 1$, то

$$E\tilde{\eta}_i = \frac{p_i q_i \left(e^t - 1\right)}{p_i e^t + q_i} = q_i \left(1 - \left(p_i e^t + q_i\right)^{-1}\right);$$

$$1 + p_{(1)}\left(e^t - 1\right) \le p_i e^t + q_i \le 1 + p_{(n)}\left(e^t - 1\right),$$

поэтому справедливы неравенства

$$1 - \left(1 + p_{(1)}\left(e^t - 1\right)\right)^{-1} \le$$
$$\le E\tilde{S}_n / \sum_{i=1}^{n} q_i \le 1 - \left(1 + p_{(n)}\left(e^t - 1\right)\right)^{-1}, \quad (9)$$

Выберем t_1 и t_2 такими, чтобы

$$\varepsilon n - \sum_{i=1}^{n} q_i \left(1 - \left(1 + p_{(1)}\left(e^{t_1} - 1\right)\right)^{-1}\right) = 0;$$

$$\varepsilon n - \sum_{i=1}^{n} q_i \left(1 - \left(1 + p_{(n)}\left(e^{t_2} - 1\right)\right)^{-1}\right) = 0.$$

Ясно, что

$$t_1 = \ln\left(\frac{1 + \varepsilon q_{(n)} / \left(p_{(1)}\left(1 - \bar{p}_n\right)\right)}{1 - \varepsilon / \left(1 - \bar{p}_n\right)}\right); \quad (10)$$

$$t_2 = \ln\left(\frac{1 + \varepsilon q_{(1)} / \left(p_{(n)}\left(1 - \bar{p}_n\right)\right)}{1 - \varepsilon / \left(1 - \bar{p}_n\right)}\right), \quad (11)$$

так как $\sum_{i=1}^{n} q_i = n\left(1 - \bar{p}_n\right)$.

Здесь $q_{(1)} = \min_{1 \le i \le n} q_i = 1 - p_{(n)}$; $q_{(n)} = \max_{1 \le i \le n} q_i = 1 - p_{(1)}$. Понятно, что $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, если $\varepsilon < 1 - \bar{p}_n$. Таким образом, из (8) и (9) получим

$$P\left(\frac{S_n}{n} - \bar{p}_n \ge \varepsilon\right) \ge \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(p_i e^{t_1} + q_i\right)}{\exp\left[t_1\left(n\bar{p}_n + E\tilde{S}_n\right)\right]} \times$$
$$\times \int_0^{+\infty} \exp\left(-t_1 v \sqrt{D\tilde{S}_n}\right) d\tilde{F}_n(v), \quad (12)$$

где t_1 определено в (10) и

$$P\left(\frac{S_n}{n} - \bar{p}_n \ge \varepsilon\right) \le \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(p_i e^{t_2} + q_i\right)}{\exp\left[t_2\left(n\bar{p}_n + E\tilde{S}_n\right)\right]} \times$$
$$\times \int_0^{+\infty} \exp\left(-t_2 v \sqrt{D\tilde{S}_n}\right) d\tilde{F}_n(v), \quad (13)$$

где t_2 определено в (11).

Пусть

$$r_n = \operatorname{Sup}_{y \in R} \left| r_n(y) \right|;$$

$$r_n(y) = \tilde{F}_n(y) - \Phi(y); \; \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-u^2/2} du.$$

Ясно, что

$$P\left(\tilde{\eta}_i - E\tilde{\eta}_i = -\frac{p_i e^t}{p_i e^t + q_i}\right) = \frac{q_i}{p_i e^t + q_i};$$

$$P\left(\tilde{\eta}_i - E\tilde{\eta}_i = \frac{q_i}{p_i e^t + q_i}\right) = \frac{p_i e^t}{p_i e^t + q_i},$$

поэтому

$$D\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i q_i e^t}{\left(p_i e^t + q_i\right)^2};$$

$$E\left|\tilde{\eta}_i - E\tilde{\eta}_i\right|^3 = \frac{p_i q_i e^t \left(p_i^2 e^{2t} + q_i^2\right)}{\left(p_i e^t + q_i\right)^2}.$$

Поскольку $p_i^2 e^{2t} + q_i^2 < \left(p_i e^t + q_i\right)^2$, то $\sum_{i=1}^{n} E\left|\tilde{\eta}_i - E\tilde{\eta}_i\right|^3 \le D\tilde{S}_n$.

Из неравенства Эссена следует, что

$$r_n \le A \sum_{i=1}^{n} E\left|\tilde{\eta}_i - E\tilde{\eta}_i\right|^3 / \left(D\tilde{S}_n\right)^{3/2} \le A\left(D\tilde{S}_n\right)^{-1/2}, \quad (14)$$

где $A = 0{,}5583$ [1, 2].

Оценим интеграл в (12):

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-t_1 \sqrt{D\tilde{S}_n} v\right) d\tilde{F}_n(v) =$$
$$= \int_0^{+\infty} \exp\left(-t_1 \sqrt{D\tilde{S}_n} v\right) d\left(\Phi(v) + r(v)\right) =$$
$$= (2\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-t_1 \sqrt{D\tilde{S}_n} v - v^2/2\right) dv +$$
$$+ \int_0^{+\infty} \exp\left(-t_1 \sqrt{D\tilde{S}_n} v\right) dr_n(v) \ge \quad (15)$$
$$\ge (2\pi)^{-1/2} \exp\left(t_1^2 D\tilde{S}_n / 2\right) \times$$
$$\times \int_{t_1\sqrt{D\tilde{S}_n}}^{+\infty} \exp\left(-v^2/2\right) dv - 2r_n \ge$$
$$\ge \sqrt{\pi/2}\left(\sqrt{t_1^2 D\tilde{S}_n + 2\pi} + (\pi - 1) t_1 \sqrt{D\tilde{S}_n}\right)^{-1} -$$
$$-2A\left(D\tilde{S}_n\right)^{-1/2}(t_1)$$

и, аналогично, интеграл в (13):

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-t_2 \sqrt{D\tilde{S}_n} v\right) d\tilde{F}_n(v) \le$$
$$\le \sqrt{\pi/2}\left(\sqrt{(\pi - 2)^2 t_2^2 D\tilde{S}_n + 2\pi}\right)^{-1} + 2A\left(D\tilde{S}_n\right)^{-1/2}(t_2). \quad (16)$$

В последних оценках использованы известные оценки отношения Милса [3, с. 144]. Поскольку интересны только малые положительные значения ε, то, пусть $0<\varepsilon\left(1-\overline{p}_n\right)/2$, тогда будут справедливы равенства

$$e^{t_1}-1=\frac{\varepsilon}{p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)};$$
$$e^{t_2}-1=\frac{\varepsilon}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}. \tag{17}$$

Поэтому

$$\prod_{i=1}^{n}\left(p_ie^{t_1}+q_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(p_i\left(e^{t_1}-1\right)+1\right)=$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{p_i\varepsilon}{p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\right). \tag{18}$$

Получим нижние оценки для вероятностей $P\left(\frac{S_n}{n}-\overline{p}_n\geq\varepsilon\right)$. Используем соотношения (10), (12), (15).

Из (10) следует, что

$$t_1<\frac{\varepsilon}{p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}. \tag{19}$$

Из (9) и (19) заключим, что знаменатель дроби перед интегралом (12) оценивается сверху следующим образом:

$$\exp\left(t_1\left(n\overline{p}_n+E\tilde{S}_n\right)\right)\leq$$
$$\leq\exp\left[t_1\left\{n\overline{p}_n+n\left(1-\overline{p}_n\right)\left(1-\left\{1+p_{(n)}\left(e^{t_1}-1\right)\right\}^{-1}\right)\right\}\right]\leq$$
$$\leq\exp\left[t_1\left(n-n\left(1-\overline{p}_n\right)\left\{1-p_{(n)}\left(e^{t_1}-1\right)\right\}\right)\right]=$$
$$=\exp\left[t_1n\overline{p}_n\left(1+\left(1-\overline{p}_n\right)\frac{p_{(n)}}{\overline{p}_n}\right)\left(e^{t_1}-1\right)\right]\leq \tag{20}$$
$$\leq\exp\left[\frac{\varepsilon n\overline{p}_n}{p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\left\{1+\frac{\varepsilon p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n\right)}{p_{(1)}\overline{p}_n\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\right\}\right].$$

Очевидно, что правая часть неравенства (12) должна быть больше нуля (для нетривиальных оценок). Это условие будет выполнено, если правая часть неравенства (15) также будет положительной. Последнее выполняется, если

$$\sqrt{\pi}t_1+\sqrt{2\big/D\tilde{S}_n}\leq1\big/\left(\sqrt{8}A\right), \tag{21}$$

поскольку

$$\sqrt{t_1^2D\tilde{S}_n+2\pi}+\left(\pi-1\right)t_1\sqrt{DS_n}<\sqrt{2\pi}+\pi t_1\sqrt{D\tilde{S}_n}.$$

Из условия $0<\varepsilon\leq\left(1-\overline{p}_n\right)/2$ получаем $\frac{\varepsilon}{1-\overline{p}_n-\varepsilon}\leq1$ и из (17) $p_ie^{t_i}+q_i\leq e^{t_1}\leq\frac{p_i+p_{(1)}}{p_{(1)}}$. Поэтому

$$D\tilde{S}_n\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{p_iq_i}{p_ie^{t_1}+q_i}\geq DS_n\frac{p_{(1)}}{1+p_{(1)}}.$$

Используя (19) и последнюю оценку, получим, что (21) заведомо выполняется, если

$$\frac{\sqrt{\pi}\varepsilon}{p_{(1)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}+\sqrt{\frac{1+p_{(1)}}{p_{(1)}DS_n}}\leq\frac{1}{2\sqrt{2}A}.$$

Последнее неравенство справедливо, если ε достаточно мало, а дисперсия DS_n достаточно велика. Например, $\varepsilon<\theta_1\left(1-\overline{p}_n\right)$, где

$$\theta_1=\min\left\{\frac{1}{2},\quad\frac{p_{(1)}}{2\sqrt{2\pi}A\alpha_1+p_{(1)}}\right\};$$
$$\sqrt{DS_n}\geq2\sqrt{2}A\sqrt{\left(1+p_{(1)}\right)\big/p_{(1)}}\,\alpha_2,$$

а постоянные $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$ такие, что $1/\alpha_1+1/\alpha_2=1$.

Очевидно, что последние неравенства справедливы, если выполняются условия (i) и (ii) теоремы 1. Воспользуемся (14), (15), (17), (19) для получения точной нижней оценки интеграла в (12). Поскольку $t_1^2D\tilde{S}_n\left(t_1\right)\leq\varepsilon^2\Lambda_1$ и $D\tilde{S}_n\left(t_1\right)\geq\Lambda_2$, ($\Lambda_1$, Λ_2 определены в (2), (3)), получим

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-t_1\sqrt{D\tilde{S}_n}v\right)d\tilde{F}_n\left(v\right)\geq$$
$$\geq\frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{\varepsilon^2\Lambda_1+2\pi}+\left(\pi-1\right)\varepsilon\sqrt{\Lambda_1}}-\frac{2A}{\sqrt{\Lambda_2}}. \tag{22}$$

Собрав воедино оценки (18), (20), (22) из (12), получим оценку (1).

Перейдем к доказательству верхних оценок той же вероятности. Воспользуемся неравенством (13). Из (11) имеем:

$$e^{t_2}=1+\frac{\varepsilon}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}; \tag{23}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(p_ie^{t_2}+q_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon p_i}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\leq$$
$$\leq\prod_{i=1}^{n}\left\{1+\frac{\varepsilon p_i}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\right\}. \tag{24}$$

Ясно, что

$$\frac{\varepsilon\chi\left(\varepsilon\right)}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\leq t_2\leq\frac{\varepsilon}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}, \tag{25}$$

где $\chi(\varepsilon)$ определено в (5), поэтому

$$\exp\left(t_2\left(n\overline{p}_n + E\tilde{S}_n\right)\right) \geq$$
$$\geq \exp\left[t_2\left\{n\overline{p}_n + n\left(1-\overline{p}_n\right)\left(1-\left\{1+p_{(1)}\right\}\right)\right\}\right] \geq$$
$$\geq \exp\left[t_2\left\{n\overline{p}_n + n\left(1-\overline{p}_n\right)\left(1-\left\{1+p_{(1)}\left(e^{t_2}-1\right)\right\}^{-1}\right)\right\}\right] \geq$$
$$\geq \exp\left[t_2\left\{n - n\left(1-\overline{p}_n\right)\left(1+p_{(1)}t_2\right)^{-1}\right\}\right] \geq \qquad (26)$$
$$\geq \exp\left[\frac{\varepsilon\chi(\varepsilon)}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\left\{n \quad - n\left(1-\overline{p}_n\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(1+p_{(1)}\frac{\varepsilon\chi(\varepsilon)}{p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)}\right)^{-1}\right\}\right].$$

Для того чтобы получить нетривиальные верхние оценки, найдем условия, при которых

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-t_2\sqrt{D\tilde{S}_n}\,v\right)d\tilde{F}_n(v) \leq \gamma. \qquad (27)$$

где γ — постоянная из условия теоремы 2.

Из (16) следует, что для выполнения (27) достаточно, чтобы

$$\frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{(\pi-2)^2 t_2^2 D\tilde{S}_n + 2\pi} + 2t_2\sqrt{D\tilde{S}_n}} + \frac{2A}{\sqrt{DS_n}} \leq \gamma.$$

Наконец, для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы

$$\frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{2\pi} + 2t_2\sqrt{D\tilde{S}_n}} + \frac{2A}{\sqrt{DS_n}} \leq \gamma;$$
$$\frac{\sqrt{8\pi}A}{\sqrt{DS_n}} + 4At_2 \leq \gamma\sqrt{2\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (28)$$

Правая часть (28) должна быть неотрицательной, что действует для $0{,}5 < \gamma < 1$ (из условия теоремы 2). Заметим, что (28) выполняется, если оба слагаемых в левой части достаточно малы. Если $\varepsilon < \left(1-\overline{p}_n\right)/2$, то

$$D\tilde{S}_n \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i q_i}{p_i e^{t_2} + q_i} \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i q_i}{\left(p_{(n)}e^{t_2} + q_{(1)}\right)^2} \geq DS_n/2,$$

поскольку

$$p_{(n)}e^{t_2} + q_{(1)} = p_{(n)}\frac{\varepsilon q_{(1)}\Big/\left(p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n\right)\right) + \varepsilon/\left(1-\overline{p}_n\right)}{1-\varepsilon/\left(1-\overline{p}_n\right)} + 1 \leq$$
$$\leq p_{(n)}\frac{0{,}5q_{(1)}\big/p_{(n)} + 0{,}5}{0.5} + 1 = 2.$$

Исходя из последней оценки и правой части (25), сделаем вывод, что (28) выполняется, если

$$4A\varepsilon\Big/\left(p_{(n)}\left(1-\overline{p}_n-\varepsilon\right)\right) \leq \mu_1\left(\gamma\sqrt{2\pi} - \sqrt{\pi/2}\right);$$
$$4\sqrt{\pi}A\Big/\sqrt{DS_n} \leq \mu_2\left(\gamma\sqrt{2\pi} - \sqrt{\pi/2}\right),$$

где μ_1, μ_2 определены в условии теоремы 2. Последние неравенства будут справедливы, если выполняются условия (j), (jj) теоремы 2.

Получим верхнюю оценку интеграла. Из (24), (25) следует, что $t_2^2 D\tilde{S}_n(t_2) \geq \varepsilon^2\Lambda_3$ и $D\tilde{S}_n(t_2) \geq \Lambda_4$, ($\Lambda_3$, Λ_4 определены в (4), (6)). Из последних неравенств и (16) очевидно, что

$$\int_0^{+\infty}\exp\left(-t_1\sqrt{D\tilde{S}_n}\,v\right)d\tilde{F}_n(v) \leq$$
$$\leq \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{(\pi-2)^2\varepsilon^2\Lambda_3 + 2\pi} + 2\varepsilon\sqrt{\Lambda_3}} + \frac{2A}{\sqrt{\Lambda_4}}.$$

Таким образом, из неравенства (13), используя последнее неравенство, а также (23), (25), (26), можно вывести первое утверждение теоремы 2.

Для того чтобы доказать вторые утверждения теорем 1 и 2, следует вместо сопряженных функций распределения (7) взять другие функции распределения

$$\tilde{F}_i(x) = \frac{e^{-tp_i}}{p_i e^{-t} + q_i}\int_{-\infty}^{x} e^{-tu}\,dP\left(\eta_i < u\right),\ \ t > 0,\ i = 1,\dots,n,$$

откуда вместо (8) получим

$$P\left(\frac{S_n}{n} - \overline{p}_n \leq -\varepsilon\right) =$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(p_i e^{-t} + q_i\right)}{\exp\left[-t\left(n\overline{p}_n + E\tilde{S}_n\right)\right]}\int_{-\infty}^{\frac{-\varepsilon n - E\tilde{S}_n}{\sqrt{D\tilde{S}_n}}}\exp\left(t\sqrt{D\tilde{S}_n}\,v\right)d\tilde{F}_n(v).$$

Учитывая, что $E\tilde{S}_n<0$, выбирая $t > 0$ так, чтобы и верхний предел интеграла в последнем равенстве был больше нуля, заменив для таких t верхний предел на нуль, найдем нижнюю оценку нужной вероятности. И, наоборот, выбрав $t > 0$ так, чтобы верхний предел интеграла был меньше нуля, заменив для таких t верхний предел нулем, вычислим верхнюю оценку той же вероятности. Проведя выкладки, почти дословно повторяющие приведенное доказательство, перейдем к утверждению о справедливости вторых частей теорем 1, 2.

Заметив, что справедливо очевидное равенство

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \overline{p}_n\right| \geq \varepsilon\right) =$$
$$= P\left(\frac{S_n}{n} - \overline{p}_n \leq -\varepsilon\right) + P\left(\frac{S_n}{n} - \overline{p}_n \geq \varepsilon\right),$$

придем к заключению о справедливости следствия.

Литература

1. **Архангельский А.Н., Кириченко П.В., Пиголкин Г.М.** Оценки вероятностей уклонений сумм для случайных величин Бернулли // Вестник МЭИ. 2016. № 1. С. 50—52.
2. **Шевцова И.Г.** О точности нормальной аппроксимации для сумм независимых случайных величин // ДАН. 2012. Т. 443. № 5. С. 555—560.
3. **Люк Ю.** Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.

References

1. **Arhangel'skiy A.N., Kirichenko P.V., Pigolkin G.M.** Otsenki Veroyatnostey Ukloneniy Summ dlya Sluchaynyh Velichin Bernulli. Vestnik MPEI. 2016;1: 50—52. (in Russian).
2. **Shevtsova I.G.** O Tochnosti Normal'noy Approksimatsii dlya Summ Nezavisimyh Sluchaynyh Velichin // DAN. 2012;443;5:555—560. (in Russian).
3. **Lyuk YU.** Spetsial'nye Matematicheskie Funktsii i Ih Approksimatsii. M.: Mir, 1980. (in Russian).

Сведения об авторах

Архангельский Алексей Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: arkhang@gmail.com

Дорофеева Ирина Николаевна — старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ «МЭИ»

Кудин Сергей Федорович — кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ»

Пиголкин Генрих Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ»

Information about authors

Arkhangelsky Aleksey N. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: arkhang@gmail.com

Dorofeeva Irina N. — Senior Lecturer of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI

Kudin Sergey F. — Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI

Pigolkin Genrikh M. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI

Статья поступила в редакцию 09.01.2017