УДК 517.955.4
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-172-177

Аналитическая задача Коши в классе функций с интегральной метрикой по пространственной и временной переменным

А.М. Бирюков

Представлена комплексная задача Коши для общих систем линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах Лебега с весом аналитических функций с интегральными метриками. Функции из пространств решений могут допускать особенности степенного характера в интегральном смысле при подходе к боковой границе конуса. Получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых поставленная задача Коши является локально корректной в заданной шкале функциональных пространств. Оказывается, что эти условия на порядки дифференциальных операторов в случае распространения особенностей у решений по боковой границе конуса в точности совпадают с условиями Лере – Волевича, а для случая одного уравнения с неравенствами Ковалевской являются менее ограничительными, чем в случае распространения особенностей у решения по боковой поверхности цилиндра. Таким образом, неравенства дают либо точное описание структуры систем линейных дифференциальных уравнений, для которых задача Коши будет локально корректной в заданном классе, либо описание шкалы функциональных пространств, в которой локально корректна заданная задача Коши. В процессе доказательства основной теоремы получены новые леммы об интегральных свойствах аналитических функций, которые, возможно, имеют самостоятельный интерес для теории функции комплексного переменного. Данные леммы показывают оценку нормы производной аналитической функции через норму самой функции, а оценку нормы интеграла с параметром от аналитической функции — через норму исходной функции и другие свойства.

Ключевые слова: задача Коши, аналитическая функция, интегральная метрика, коническая поверхность.

Для цитирования: Бирюков А.М. Аналитическая задача Коши в классе функций с интегральной метрикой по пространственной и временной переменным // Вестник МЭИ. 2017. № 6. С. 172—177. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-172-177.

An Analytic Cauchy Problem in the Class of Functions with an Integral Metric in Spatial and Temporal Variables

A.M. Biryukov

The article considers the complex Cauchy problem for general systems of linear differential equations in Lebesgue's Banach spaces with the weight of analytic functions with integral metrics. The functions from the solution spaces can admit power law-type singularities in integral sense when approaching the cone lateral boundary. The necessary and sufficient conditions under which the stated Cauchy problem is a locally well-posed one in the specified scale of functional spaces are derived. It turns out that these conditions for the orders of differential operators in case of extended singularities of solutions over the cone lateral boundary are identical with the Leray-Volevich conditions. In case of one equation containing the Kovalevskaya inequalities, these conditions are less restrictive than they are in the case of extended singularities of the solution over the cylinder lateral surface. Thus, the inequalities either exactly describe the structure of systems of linear differential equations for which the Cauchy problem is locally well-posed in the specified class, or they describe the scale of functional spaces in which the specified Cauchy problem is locally a well-posed one. In the course of proving the main theorem, new lemmas about the integral properties of analytic functions have been obtained, which may be of interest for the theory of functions of complex variable. These lemmas show an estimate for the norm of derivative from an analytic function through the norm of the function itself; they also show an estimate of the norm of integral with a parameter from the analytic function through the norm of the initial function, as well as other properties.

Key words: Cauchy problem, analytic function, integral metric, conical surface.

For citation: Biryukov A.M. An Analytic Cauchy Problem in the Class of Functions with an Integral Metric in Spatial and Temporal Variables. MPEI Vestnik. 2017;6: 172—177. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-172-177.

Исследован вопрос о локальной корректности задачи Коши для системы комплексных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u' - A(t, z, D)u = h(t, z); \\ u(t_0, z) = \varphi(z) \end{cases}$$

в пространствах аналитических функций с интегральной метрикой типа пространства L_1 с весом. Функции из указанных пространств могут допускать особенности «степенного» характера в интегральном смысле при подходе к границе «конуса». Более того, точно описана структура систем, для которых задача Коши будет локально корректна в заданном классе. Ранее в [1] изучены подобные задачи в нормах поточечных оценок функций и получены необходимые и достаточные условия для разрешимости в соответствующей шкале. Оказывается, что в случае интегральных пространств условия для локальной корректности совпадают с условиями в случае норм поточечных оценок. В [2] также затронут вопрос о необходимых и достаточных условиях корректности поставленной задачи Коши в пространствах с интегральной метрикой как по временной t, так и по пространственной z переменным, но особенности аналитических функций распространялись по боковой поверхности цилиндра, а не конуса. Получается, что необходимые и достаточные условия на порядки дифференциальных операторов в случае, когда особенности степенного характера распространяются по боковой поверхности конуса, более «мягкие» и в точности совпадают с условиями Лере – Волевича.

Перейдем к точным формулировкам. Для этого введем следующие обозначения. Пусть $t\in\mathbb{C}^1$, $z\in\mathbb{C}^1$ — комплексные переменные; $u' = \partial u/\partial t$; $N \geq 1$ — натуральное число; $m = (m_1, \ldots, m_N)$ — вектор с натуральными компонентами; $u(t, z) = (u_1(t, z), \ldots, u_N(t, z))$, $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \ldots, \varphi_N(z))$ — вектор-функции.

В области $V \subset C^1 \times C^1$ рассматривается следующая задача:

$$\begin{cases} u'(t,z) - A(t,z,D)u = h(t,z); & (1)\\ u(t_0,z) = \varphi(z), & (2)\end{cases}$$

где $A(t, z, D)$ — матрица дифференциальных операторов конечного порядка,

$$A_{ij}(t,z,D)u = \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} a_{ij}^{\alpha}(t,z) D^{\alpha} u(t,z),$$

с аналитическими в области V коэффициентами $a_{ij}^{\alpha}(t,z)$. Таким образом, i-е уравнение в системе (1) имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(t,z) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} a_{ij}^{\alpha}(t,z) D^{\alpha} u_j(t,z) + h_i(t,z),$$
$$i = 1,\ldots,N.$$

Задача Коши (1), (2) будет изучаться локально, т. е. в окрестности любой точки $(t_0, z_0) \in V$.

В качестве пространства начальных данных используем пространство $D_{m,R;1}(z_0)$ вектор-функций $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \ldots, \varphi_N(z))$, аналитических в круге $U_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{m,R;1} = \sum_{j=1}^{N} \|\varphi_j\|_{m_j,R;1} =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{U_R(z_0)} |\varphi_j(z)| \left(R - |z - z_0|\right)^{m_j} dxdy.$$

В качестве пространства решений используется пространство $\mho\left(\frac{R}{\sigma}; D_{m,R,\sigma;1}\right)(t_0, z_0)$ $(\sigma > 0)$ вектор-функций $u(t, z)$, аналитических в «конусе»

$$V_{\sigma,R}(t_0,z_0) = \left\{(t,z) : |t - t_0| < \frac{R}{\sigma}, |z - z_0| < R - \sigma|t - t_0|\right\},$$

для которых конечна следующая норма:

$$\|u\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1} = \sum_{j=1}^{N} \|u_j\|_{\frac{R}{\sigma};m_j,R,\sigma;1} =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{|t-t_0|<\frac{R}{\sigma}} \int\limits_{U_{R-\sigma|t-t_0|}} |u_j(t,z)| \times$$
$$\times \left(R - \sigma|t - t_0| - |z - z_0|\right)^{m_j} dxdyd\xi d\eta,$$

где $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$.

Отметим, что функции из указанных пространств допускают особенности «степенного» характера при подходе к соответствующей границе. Можно сказать, используя утверждение [3, с. 46] о свойстве голоморфных функций комплексного переменного, что эти пространства являются банаховыми.

Определение. Пусть задача (1), (2) локально корректна в пространстве $D_{m,R,\sigma;1}$, если для любой точки $(t_0, z_0) \in V$ найдется число $\sigma > 0$, такое, что для любых вектор-функций $\varphi(z) \in D_{m+2,R;1}(z_0)$ и правой части системы (1) $h(t,z) \in \mho\left(\frac{R}{\sigma}; D_{m+1,R,\sigma;1}\right)(t_0, z_0)$ существует единственное решение задачи (1), (2) $u(t,z) \in \mho\left(\frac{R}{\sigma}; D_{m,R,\sigma;1}\right)(t_0, z_0)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1} \leq M\left(\|\varphi\|_{m+2,R;1} + \|h\|_{\frac{R}{\sigma};m+1,R,\sigma;1}\right),$$

где $M > 0$ — постоянная.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Задача Коши* (1), (2) *локально корректна в шкале* $D_{m,R,\sigma;1}$ *тогда и только тогда, когда порядки дифференциальных операторов удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$\operatorname{ord} A_{ij}(t, z, D) \leq m_i - m_j + 1 \qquad (3)$$

для всех $i, j = 1, \ldots, N$. *При этом если правая часть неравенства* (3) *отрицательна, то считаем, что* $A_{ij}(t, z, D) \equiv 0$, *а его порядок* $\operatorname{ord} A_{ij}(t, z, D) = -\infty$.

Достаточность условий (3) устанавливается методом сжимающих отображений. Без ограничения общности считаем, что $t_0 = 0$, $z_0 = 0$. Запишем интегродифференциальное уравнение, эквивалентное исходной задаче (1), (2):

$$u(t,z) = \int_0^t A(\tau,z,D) u(\tau,z) d\tau + \varphi(z) + \int_0^t h(\tau,z) d\tau. \quad (4)$$

Покажем, что оператор, действующий на вектор-функцию $u \in \mho\left(\frac{R}{\sigma}; D_{m,R,\sigma;1}\right)$ по правилу, записанному в правой части уравнения (4), является сжимающим в пространстве $\mho\left(\frac{R}{\sigma}; D_{m,R,\sigma;1}\right)$. Доказательство этого в основном опирается на леммы, которые имеют и некоторый самостоятельный интерес.

Для простоты записи в дальнейшем сформулируем леммы и докажем для случая $N = 1$.

Лемма 1. Пусть вектор-функция

$$h(t,z) \in \mho\left(\frac{R}{\sigma}; D_{m+1,R,\sigma;1}\right),$$

тогда

$$\int_0^t h(\tau,z)\,d\tau \in \mho\left(\frac{R}{\sigma}; D_{m,R,\sigma;1}\right)$$

и справедливо неравенство

$$\left\|\int_0^t h(\tau,z)\,d\tau\right\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1} \le \frac{8}{\sigma}\|h\|_{\frac{R}{\sigma};m+1,R,\sigma;1}.$$

Доказательство. Имеем следующее неравенство:

$$\int_{|t|<\frac{R}{\sigma}} \int_{U_{R-\sigma|t|}} \left|\int_0^t h(\tau,z)\,d\tau\right| \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^m dxdyd\xi d\eta \le$$

$$\le \int_{|t|<\frac{R}{\sigma}} \int_{U_{R-\sigma|t|}} \int_0^{|t|/4} \left|h(\tau,z)\right| d|\tau| \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^m dxdyd\xi d\eta +$$

$$+ \int_{|t|<\frac{R}{\sigma}} \int_{U_{R-\sigma|t|}} \int_{|t|/4}^{|t|} \left|h(\tau,z)\right| d|\tau| \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^m dxdyd\xi d\eta = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим сначала слагаемое I_1. Из интегральной формулы Коши стандартно вытекает следующая оценка:

$$\left|h(\tau,z)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|h\left(\frac{|t|}{2}e^{i\varphi},z\right)\right|\frac{|t|}{2}\,d\varphi}{\left|\frac{|t|}{2}e^{i\varphi}-\tau\right|} \le$$

$$\le \frac{|t|}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|h\left(\frac{|t|}{2}e^{i\varphi},z\right)\right|d\varphi}{\frac{|t|}{2}-\frac{|t|}{4}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|h\left(\frac{|t|}{2}e^{i\varphi},z\right)\right|d\varphi.$$

Поэтому

$$\left|I_1\right| \le \frac{1}{4\pi}\int_0^{R/\sigma} |t|^2\,d|t| \int_0^{2\pi} d\theta \times$$

$$\times \int_{U_{R-\sigma|t|}} \int_0^{2\pi} \left|h\left(\frac{|t|}{2}e^{i\varphi},z\right)\right| d\varphi \left(R-\sigma|t|-r\right)^m dxdy.$$

Сделаем замену $s = |t|/2$, тогда

$$\left|I_1\right| \le \frac{2}{\pi}\int_0^{R/2\sigma} s^2 ds \int_0^{2\pi} d\theta \int_{U_{R-2\sigma s}} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left|h\left(se^{i\varphi},z\right)\right| d\varphi \left(R-2\sigma s-r\right)^m dxdy \le$$

$$\le \frac{2}{\sigma\pi}\int_0^{R/2\sigma} s\,ds \int_0^{2\pi} d\theta \int_{U_{R-2\sigma s}} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left|h\left(se^{i\varphi},z\right)\right| d\varphi \left(R-\sigma s-r\right)^{m+1} dxdy \le$$

$$\le \frac{4}{\sigma}\int_0^{R/\sigma} s\,ds \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{U_{R-\sigma s}} \left|h\left(se^{i\varphi},z\right)\right| \left(R-\sigma s-r\right)^{m+1} \times$$

$$\times dxdy = \frac{4}{\sigma} h_{\frac{R}{\sigma};m+1,R,\sigma;1}.$$

Рассмотрим слагаемое I_1. Имеем

$$\left|I_2\right| = \int_0^{R/\sigma} |t|\,d|t| \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R-\sigma|t|} r\,dr \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \int_{|t|/4}^{|t|} \left|h\left(|\tau|e^{i\theta}, re^{i\varphi}\right)\right| d|\tau| \left(R-\sigma|t|-r\right)^m d\varphi.$$

Изменим порядок интегрирования:

$$\left|I_2\right| = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R-r}{\sigma}} |t|\,d|t| \int_0^{2\pi} \times$$

$$\times \int_{|t|/4}^{|t|} \left|h\left(|\tau|e^{i\theta}, re^{i\varphi}\right)\right| d|\tau| \left(R-\sigma|t|-r\right)^m d\theta =$$

$$= \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R-r}{4\sigma}} d|\tau| \times$$

$$\times \int_{|\tau|}^{4|\tau|} |t|\,d|t| \left|h\left(|\tau|e^{i\theta}, re^{i\varphi}\right)\right| \left(R-\sigma|t|-r\right)^m d\theta +$$

$$+ \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \int_{\frac{R-r}{4\sigma}}^{\frac{R-r}{\sigma}} d|\tau| \int_{|\tau|}^{\frac{R-r}{\sigma}} |t|\,d|t| \left|h\left(|\tau|e^{i\theta}, re^{i\varphi}\right)\right| \times$$

$$\times \left(R-\sigma|t|-r\right)^m d\theta = I_{21} + I_{22}.$$

Для I_{21} есть неравенство

$$I_{21} \le \frac{4}{\sigma(m+1)}\int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \times$$

$$\times \int_0^{\frac{R-r}{4\sigma}} \left|h\left(|\tau|e^{i\theta}, re^{i\varphi}\right)\right| |\tau| \left(R-\sigma|\tau|-r\right)^{m+1} d|\tau| \le$$

$$\le \frac{2}{\sigma}\|h\|_{\frac{R}{\sigma};m+1,R,\sigma;1}.$$

Для I_{22} аналогично получим

$$I_{22}=\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{R-r}{4\sigma}}^{\frac{R-r}{\sigma}}\left|h\left(|\tau|e^{i\theta},re^{i\varphi}\right)\right|d|\tau|\times$$

$$\times\int_{|\tau|}^{\frac{R-r}{\sigma}}|t|\left(R-\sigma|t|-r\right)^m d|t|\le\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\times$$

$$\times\int_{\frac{R-r}{4\sigma}}^{\frac{R-r}{\sigma}}\left|h\left(|\tau|e^{i\theta},re^{i\varphi}\right)\right|\frac{|\tau|4\sigma}{R-r}d|\tau|\frac{R-r}{\sigma}\times$$

$$\times\int_{|\tau|}^{\frac{R-r}{\sigma}}\left(R-\sigma|t|-r\right)^m d|t|\le\frac{4}{\sigma(m+1)}\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\times$$

$$\times\int_{\frac{R-r}{4\sigma}}^{\frac{R-r}{\sigma}}|\tau|d|\tau|\int_0^{2\pi}\left|h\left(|\tau|e^{i\theta},re^{i\varphi}\right)\right|\left(R-\sigma|\tau|-r\right)^{m+1}d\theta\le$$

$$\le\frac{2}{\sigma}\|h\|_{\frac{R}{\sigma};m+1,R,\sigma;1}.$$

Следовательно,

$$\left\|\int_0^t h(\tau,z)\,d\tau\right\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1}\le\frac{8}{\sigma}\|h\|_{\frac{R}{\sigma};m+1,R,\sigma;1}.$$

Таким образом, лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть функция $\varphi\in D_{m+2,R;1}$, тогда $\varphi\in\mho\left(\frac{R}{\sigma};D_{m,R,\sigma;1}\right)$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1}\le\frac{C}{\sigma^2}\|\varphi\|_{m+2,R;1},$$

где $C>0$ — постоянная, зависящая только от m.

Доказательство. Рассмотрим выражение, которое обозначим через I:

$$I=\int_{|t|<\frac{R}{\sigma}}\int_{U_{R-\sigma|t|}}|\varphi(z)|\left(R-\sigma|t|-|z|\right)^m dx\,dy\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{R-r}{\sigma}}|t|d|t|\int_0^{2\pi}\left|\varphi\left(re^{i\varphi}\right)\right|\left(R-\sigma|t|-|z|\right)^m d\theta=$$

$$=2\pi\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi}\left|\varphi\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\int_0^{\frac{R-r}{\sigma}}|t|\left(R-\sigma|t|-r\right)^m d|t|.$$

Отдельно, используя формулу интегрирования по частям, вычислим интеграл

$$\int_0^{\frac{R-r}{\sigma}}|t|\left(R-\sigma|t|-r\right)^m d|t|=$$

$$=\frac{1}{\sigma(m+1)}\int_0^{\frac{R-r}{\sigma}}\left(R-\sigma|t|-r\right)^{m+1}d|t|=$$

$$=\frac{1}{\sigma^2(m+1)(m+2)}(R-r)^{m+2}.$$

Следовательно,

$$I=\frac{2\pi}{\sigma^2(m+1)(m+2)}\int_0^R r\,dr\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left|\varphi\left(re^{i\varphi}\right)\right|(R-r)^{m+2}d\varphi=\frac{2\pi\varphi_{m+2,R;1}}{\sigma^2(m+1)(m+2)}.$$

Поэтому $\varphi\in\mho\left(\frac{R}{\sigma};D_{m,R,\sigma;1}\right)$ и справедлива оценка из утверждения леммы. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть функция $v(z)\in D_{m,R;1}$, тогда $Dv(z)\in D_{m+1,R;1}$ и справедливо неравенство

$$\|Dv\|_{m+1,R;1}\le\|Cv\|_{m,R;1},$$

где $C>0$ — постоянная, зависящая только от m.

Доказательство этой леммы приведено в [2].

Вернемся теперь к доказательству достаточности условий (3) основной теоремы 1. Пусть вектор-функции

$$u(t,z)\in\mho\left(\frac{R}{\sigma};D_{m,R,\sigma;1}\right);$$

$$\varphi(z)\in D_{m+2,R;1};\ h(t,z)\in\mho\left(\frac{R}{\sigma};D_{m+1,R,\sigma;1}\right).$$

В силу лемм 1, 2 $\varphi(z)+\int_0^t h(\tau,z)\,d\tau\in\mho\left(\frac{R}{\sigma};D_{m,R,\sigma;1}\right)$, поэтому достаточно показать, что оператор

$$\mathrm{Bu}(t,z)=\int_0^t A(\tau,z,D)\,u(\tau,z)\,d\tau$$

является сжимающим в пространстве $\mho\left(\frac{R}{\sigma};D_{m,R,\sigma;1}\right)$ при достаточно большом $\sigma>0$.

Рассмотрим i-ю компоненту оператора Bu

$$(\mathrm{Bu})_i(t,z)=\int_0^t\sum_{j=1}^N\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}a_{ij}^{\alpha}(\tau,z)D^{\alpha}u_j(\tau,z)\,d\tau$$

и покажем, что

$$\sum_{j=1}^N\sum_{\alpha=0}^{m_{ij}}a_{ij}^{\alpha}(t,z)D^{\alpha}u_j(t,z)\in\mho\left(\frac{R}{\sigma};D_{m_i+1,R,\sigma;1}\right).$$

Действительно, имеют место неравенства

$$I \equiv \int\limits_{|t|<R/\sigma} \int\limits_{U_{R-\sigma|t|}} \left| \sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} a_{ij}^{\alpha}(t,z) D^{\alpha} u_j(t,z) \right| \times$$

$$\times \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^{m_i+1} dxdyd\xi d\eta \le C\left(a_{ij}^{\alpha}\right) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} \int\limits_{|t|<\frac{R}{\sigma}} \int\limits_{U_{R-\sigma|t|}} \left|D^{\alpha} u_j(t,z)\right| \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^{m_i+1} dxdyd\xi d\eta.$$

Теперь, применяя лемму 3, получим

$$I \le C\left(a_{ij}^{\alpha}, m, m_{ij}\right) \sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} \int\limits_{|t|<\frac{R}{\sigma}} \int\limits_{U_{R-\sigma|t|}} \left|u_j(t,z)\right| \times$$

$$\times \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^{m_i+1-\alpha} dxdyd\xi d\eta \le C\left(a_{ij}^{\alpha}, m, m_{ij}, R\right) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha=0}^{m_{ij}} \int\limits_{|t|<\frac{R}{\sigma}} \int\limits_{U_{R-\sigma|t|}} \left|u_j(t,z)\right| \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^{m_j} dxdyd\xi d\eta =$$

$$= C\|u\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1}.$$

В силу леммы 1 имеем

$$\left\|(\mathrm{Bu})_i(t,z)\right\|_{\frac{R}{\sigma};m_i,R,\sigma;1} \le \frac{8}{\sigma} C\|u\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1}.$$

Таким образом,

$$\left\|(\mathrm{Bu})\right\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1} \le \frac{C}{\sigma}\|u\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1},$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от σ. Выберем $\sigma > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $C/\sigma \le 1/2$. Следовательно, существует единственное решение задачи (1), (2) $u(t,z) \in \mho\left(\frac{R}{\sigma}; D_{m,R,\sigma;1}\right)$, и справедливо неравенство из утверждения теоремы 1. Таким образом, достаточность условий (3) установлена.

Перейдем теперь к доказательству необходимости условий (3). Пусть задача Коши (1), (2) локально корректна в шкале $D_{m,R,\sigma;1}$. Для того чтобы установить справедливость неравенств (3), потребуется следующая вспомогательная лемма.

Лемма 4. Пусть $u(t,z) \in \mho\left(\frac{R}{\sigma}; D_{m,R,\sigma;1}\right)$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial t}(0,z) \in D_{m+3,R;1}$, и справедливо неравенство

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(0,z)\right\|_{m+3,R;1} \le C\|u\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1},$$

где $C > 0$ — постоянная, зависящая только от σ, m.

Доказательство. При $0 < |t| < \frac{R-|z|}{\sigma}$ из интегральной формулы Коши вытекает следующее неравенство:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(0,z)\right| \le \frac{1}{2\pi|t|} \int_0^{2\pi} \left|u\left(|t|e^{i\varphi}, z\right)\right| d\varphi,$$

поэтому

$$2\pi|t|^2 \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^m \left|\frac{\partial u}{\partial t}(0,z)\right| \le$$

$$\le |t| \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^m \int_0^{2\pi} \left|u\left(|t|e^{i\varphi}, z\right)\right| d\varphi.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до $\frac{R-|z|}{\sigma}$. Имеем

$$2\pi \left|\frac{\partial u}{\partial t}(0,z)\right| \int_0^{\frac{R-|z|}{\sigma}} |t|^2 \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^m d|t| \le$$

$$\le \int_0^{\frac{R-|z|}{\sigma}} |t|\, d|t| \int_0^{2\pi} \left|u\left(|t|e^{i\varphi}, z\right)\right| \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^m d\varphi.$$

Применив два раза формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$\int_0^{\frac{R-|z|}{\sigma}} |t|^2 \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^m d|t| =$$

$$= \frac{2}{\sigma^3 (m+1)(m+2)(m+3)} \left(R-|z|\right)^{m+3},$$

следовательно,

$$\frac{4\pi}{\sigma^3 (m+1)(m+2)(m+3)} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(0,z)\right| \left(R-|z|\right)^{m+3} \le$$

$$\le \int_0^{\frac{R-|z|}{\sigma}} |t|\, d|t| \int_0^{2\pi} \left|u\left(|t|e^{i\varphi}, z\right)\right| \left(R-\sigma|t|-|z|\right)^m d\varphi.$$

Проинтегрируем по кругу U_R и изменим порядок интегрирования:

$$C_0 \int\limits_{U_R} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(0,z)\right| \left(R-|z|\right)^{m+3} dxdy \le$$

$$\le \int_0^{R/\sigma} |t|\, d|t| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R-\sigma|t|} r dr \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left|u\left(|t|e^{i\varphi}, re^{i\theta}\right)\right| \left(R-\sigma|t|-r\right)^m d\theta = \|u\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1}.$$

Это и означает, что

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(0,z)\right\|_{m+3,R;1} \le \frac{1}{C_0}\|u\|_{\frac{R}{\sigma};m,R,\sigma;1}.$$

Лемма 4 доказана.

Предположим противное. Пусть существует пара индексов i_0, j_0, такая, что справедливо неравенство $m_{i_0,j_0} \ge m_{i_0} - m_{j_0} + 2$. Рассмотрим i_0 уравнение из системы (1):

$$\frac{\partial u_{i_0}}{\partial t}(t,z) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{\alpha=0}^{m_{i_0 j}} a_{i_0 j}^{\alpha}(t,z) D^{\alpha} u_j(t,z) + h_{i_0}(t,z).$$

Из определения локальной корректности задачи (1), (2) получим, что для начальной вектор-функции

$$\varphi(z) = \left(0,\ldots,0,\varphi_{j_0}(z),0,\ldots,0\right);$$
$$\varphi_{j_0}(z) = \frac{1}{(R-z)^{m_{j_0}+3}} \in D_{m_{j_0}+2,R;1}$$

и правой части системы (1) $h(t,z) \equiv 0$ существует единственное решение задачи (1), (2) $u \in \mho\left(\frac{R}{\sigma}; D_{m,R,\sigma;1}\right)$, для которого справедливо равенство

$$\frac{\partial u_{i_0}}{\partial t}(0,z) = \sum_{\alpha=0}^{m_{i_0 j_0}} a_{i_0 j_0}^{\alpha}(0,z) D^{\alpha}\varphi_{j_0}(z).$$

Вычисляя производные и домножая на $(R-z)^{m_{i_0 j_0}-m_{i_0}+m_{j_0}-2}$, получим

$$\frac{\partial u_{i_0}}{\partial t}(0,z)(R-z)^{m_{i_0 j_0}-m_{i_0}+m_{j_0}-2} = \\ = \sum_{\alpha=0}^{m_{i_0 j_0}} a_{i_0 j_0}^{\alpha}(0,z)\frac{\left(m_{j_0}+3\right)\ldots\left(m_{j_0}+2+\alpha\right)}{(R-z)^{m_{i_0}-m_{i_0 j_0}+\alpha+5}}. \qquad (5)$$

Из леммы 4 следует, что $\frac{\partial u_{i_0}}{\partial t}(0,z) \in D_{m_{i_0}+3,R;1}$, а значит, и правая часть равенства (5) должна принадлежать этому классу. Но в правой части (5) все слагаемые принадлежат пространству $D_{m_{i_0}+3,R;1}$, за исключением слагаемого, соответствующего индексу $\alpha = m_{i_0,j_0}$, как показывают непосредственные вычисления интегралов. Полученное противоречие и доказывает справедливость неравенств (3). Таким образом, основная теорема 1 полностью доказана.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (соглашение № 14-11-00306).

Литература

1. **Дубинский Ю.А.** Задача Коши в комплексной области. М.: Изд-во МЭИ, 1996.

2. **Бирюков А.М.** Корректная разрешимость аналитической задачи Коши в пространствах с интегральной метрикой // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 470—480.

3. **Владимиров В.С.** Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.

References

1. **Dubinskiy Yu.A.** Zadacha Koshi v Kompleksnoy Oblasti. M.: Izd-vo MPEI, 1996. (in Russian).

2. **Biryukov A.M.** Korrektnaya Razreshimost' Analiticheskoy Zadachi Koshi v Prostranstvah s Integral'noy Metrikoy. Differentsial'nye Uravneniya. 2016;52;4:470—480.(in Russian).

3. **Vladimirov V.S.** Metody Teorii Funktsiy Mnogih Kompleksnyh Peremennyh. M.: Nauka, 1964.(in Russian).

Сведения об авторе

Бирюков Алексей Михайлович — старший преподаватель кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: birukovalmix@mail.ru

Information about author

Biryukov Aleksey M. — Senior Lecturer of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: birukovalmix@mail.ru

Статья поступила в редакцию 14.03.2017