УДК 517.955
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-178-180

Эквивалентные нормы в пространствах с весом, имеющим особенность на границе области

П.В. Зубков

Ранее было доказано, что всякая периодическая, квадратично-суммируемая со степенным весом в полуполосе функция единственным образом представляется в виде ортогональной суммы аналитической и коаналитической составляющих, поэтому коаналитическую составляющую естественно считать определенной характеристикой неаналитичности функции. Цель статьи заключается в доказательстве эквивалентности вблизи границы рассмотренной нормы весового пространства и нормы, удобной для постановки и исследования коаналитической задачи в пространствах с весом, имеющим особенность на границе области. Этот факт, а также известные для эквивалентной нормы точные неравенства между нормами функций и их следами и оценками решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений в ограниченных и неограниченных областях позволяют исследовать задачу о минимизации коаналитического уклонения при продолжении заданной граничной функции внутрь области в соответствующих весовых пространствах.

Ключевые слова: эквивалентность норм, весовые пространства, особенность на границе.

Для цитирования: Зубков П.В. Эквивалентные нормы в пространствах с весом, имеющим особенность на границе области // Вестник МЭИ. 2017. № 6. С. 178—180. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-178-180.

The Equivalent Norms in Spaces with a Weight Having Singularity at the Domain Boundary

P.V. Zubkov

Earlier, it was proven that every periodic function that is quadratically summable with a power weight in a half-band is uniquely represented as an orthogonal sum of analytic and coanalytic components. Therefore, it is natural to regard the coanalytic component as a definite characteristic of the non-analyticity of the function. The aim of this article is to prove the equivalence near the boundary of the considered norm of weight space and the norm that is convenient for formulating and investigating the coanalytic problem in spaces with a weight having a singularity at the domain boundary. This fact, as well as the known — for the equivalent norm — exact inequalities between the norms of functions and their traces, and the estimated solutions of boundary value problems for degenerate elliptic equations in bounded and unbounded domains open the possibility to investigate the problem about minimizing the coanalytic deviation when the specified boundary function is extended to inside the domain in the corresponding weight spaces.

Key words: equivalence of norms, weight spaces, singularity at the boundary.

For citation: Zubkov P.V. The Equivalent Norms in Spaces with a Weight Having Singularity at the Domain Boundary. MPEI Vestnik. 2017;6:178—180. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-178-180.

В работе [1] было доказано, что всякая периодическая, квадратично-суммируемая со степенным весом в полуполосе функция единственным образом представляется в виде ортогональной суммы аналитической и коаналитической составляющих, поэтому коаналитическую составляющую естественно считать определенной характеристикой неаналитичности функции. Целью данной статьи является доказательство эквивалентности вблизи границы рассмотренной в [1] нормы весового пространства и нормы, удобной для постановки и исследования коаналитической задачи [2], в пространствах с весом, имеющим особенность на границе области.

Пусть $G_h = \{z = x + iy: -\pi \le x \le \pi,\ 0 < y \le h\}$ — область вблизи границы $y = 0$ на комплексной плоскости. Символом ${}^{(1)}W_2^1\left(G_h, y^L\right)$ обозначается класс функций, определенных на G_h, для которых конечна величина

$$\|f\|_{(1)} = \left(f^2_{w_2^1\left(G_h,y^L\right)} + \left\|fy^{L/2}\right\|^2_{L_2(G_h)}\right)^{1/2},$$

а ${}^{(2)}W_2^1\left(G_h, y^L\right)$ — класс функций с конечной нормой;

$$\|f\|_{(2)} = \left(f^2_{w_2^1\left(G_h,y^L\right)} + \|f\|^2_{L_2(G_h)}\right)^{1/2},$$

где

$$\|f\|^2_{L_2(G_h)} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h \left|f(x,y)\right|^2 dxdy;$$

$$\|f\|^2_{w_2^1\left(G_h,y^L\right)} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|^2\right) y^L dxdy.$$

Теорема. *При* $-1<L<1\ {}^{(1)}W_2^1\left(G_h,y^L\right)={}^{(2)}W_2^1\left(G_h,y^L\right)$, *где равенство понимается с точностью до эквивалентности норм.*

Доказательство. При доказательстве теоремы используем классическое неравенство Харди, имеющее вид

$$\int_0^h y^s\left|\int_y^h f(t)\,dt\right|^2 dy\le\frac{4}{(s+1)^2}\int_0^h y^{s+2}\left|f(y)\right|^2 dy,\ s>-1.$$

Заметим, что в силу неравенства Коши – Буняковского при $L<1$ справедлива оценка

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|dxdy=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h y^{-L/2}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|y^{L/2}dxdy\le$$
$$\le\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h y^{-L}dxdy\right)^{1/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 y^L dxdy\right)^{1/2}=$$
$$=\sqrt{2\pi}\left(\frac{h^{1-L}}{1-L}\right)^{1/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 y^L dxdy\right)^{1/2}\le$$
$$\le\sqrt{2\pi}\left(\frac{h^{1-L}}{1-L}\right)^{1/2}\ge\|f\|_{W_2^1\left(G_h,y^L\right)}.$$

Отсюда, по теореме Фубини, следует, что для почти всех $x\in[-\pi,\pi]$ $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ суммируема на отрезке $[0,h]$, т. е. для почти всех $x\in[-\pi,\pi]$ имеет место формула

$$f(x,y)=f(x,h)-\int_y^h\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt. \qquad (1)$$

Пусть $f\in{}^{(2)}W_2^1\left(G_h,y^L\right)$. Покажем, что справедлива оценка $\|f\|_{(1)}\le c_1\|f\|_{(2)}$.

В неравенствах буквой c с теми или иными индексами обозначим постоянные, не зависящие от функций, для которых рассматриваемые неравенства имеют смысл.

В силу (1)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h\left|f(x,y)\right|^2 y^L dxdy\le$$
$$\le c_2\left(\int_0^h y^L dy\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x,h)\right|^2dx+\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h\left|\int_y^h\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right|^2 y^L dxdy\right). \qquad (2)$$

При $L>-1$ первый интеграл в первом слагаемом правой части сходится, второй интеграл первого слагаемого, интегрируя по $y\in(h/2,\,h)$ и деля на $h/2$, оценим следующим образом:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x,h)\right|^2dx\le$$
$$\le c_3\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{h/2}^{h}\left|f(x,y)\right|^2dxdy+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{h/2}^{h}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|^2dxdy\right)\le$$
$$\le c_4\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{h/2}^{h}\left|f(x,y)\right|^2dxdy+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{h/2}^{h}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|^2y^Ldxdy\right)\le$$
$$\le c_5\|f\|_{(2)}^2.$$

Второе слагаемое в правой части неравенства (2) оценим с помощью классического неравенства Харди при $L>-1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h\left|\int_y^h\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right|^2y^Ldxdy\le$$
$$\le c_6\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|^2y^{L+2}dxdy\le$$
$$\le c_7\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|^2y^Ldxdy\le c_8\|f\|_{(2)}^2.$$

Таким образом, оценка $\|f\|_{(1)}\le c_1\|f\|_{(2)}$ получена.

Рассмотрим $f\in{}^{(1)}W_2^1\left(G_h,y^L\right)$. Докажем неравенство $\|f\|_{(2)}\le c_9\|f\|_{(1)}$.

Воспользовавшись равенством (1), найдем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h\left|f(x,y)\right|^2dxdy\le$$
$$\le c_{10}\left(h\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x,h)\right|^2dx+\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h\left|\int_y^h\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right|^2dxdy\right). \qquad (3)$$

Оценим интеграл в первом слагаемом правой части неравенства (3):

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x,h)\right|^2dx\le$$
$$\le c_3\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{h/2}^{h}\left|f(x,y)\right|^2dxdy+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{h/2}^{h}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|^2dxdy\right)\le$$
$$\le c_{11}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{h/2}^{h}\left|f(x,y)\right|^2y^Ldxdy+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{h/2}^{h}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|^2y^Ldxdy\right)\le$$
$$\le c_{12}\|f\|_{(1)}^2.$$

Заметим, что для второго слагаемого из правой части (3) справедливо неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{h}\left|\int_{y}^{h}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right|^2 dxdy \le$$
$$\le \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{h} y^L\left|\int_{y}^{h}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right|^2 dxdy + \right.$$
$$\left. + \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{h} y^{-L}\left|\int_{y}^{h}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right|^2 dxdy\right).$$

Затем, применив к каждому из полученных интегралов классическое неравенство Харди, что можно сделать, так как $-1 < L < 1$, и учитывая, что $-L + 2 > L$, получим оценку

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{h}\left|\int_{y}^{h}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt\right|^2 dxdy \le$$
$$\le c_{13}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{h}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|^2 y^L dxdy \le c_{14}\left\|f\right\|_{(1)}^2.$$

Тем самым, неравенство $\left\|f\right\|_{(2)} \le c_9\left\|f\right\|_{(1)}$ и, соответственно, теорема доказаны.

Заметим, что с использованием обобщенного неравенства Харди аналогично доказывается эквивалентность норм соответствующих пространств функций, определенных в круге единичного радиуса с весовой функцией $(1 - \rho)^L$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, где $-1 < L < 1$.

Замечание. Полученные оценки позволяют говорить о следе функции $f(x,y) \in {}^{(1)}W_2^1\left(G_h, y^L\right)$ при $-1 < L < 1$, точнее, существует такая функция $\varphi(x) \in L_2(-\pi, \pi)$, что для некоторой функции, эквивалентной $f(x, y)$ (которую обозначим через $f(x, y)$), выполняется в силу неравенства Коши – Буняковского

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x,h) - \varphi(x)\right|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{0}^{h}\frac{\partial f}{\partial y}dy\right|^2 dx \le$$
$$\le \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{0}^{h} y^{-L}dy\right)\left(\int_{0}^{h}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 y^L dy\right)dx \le \frac{h^{1-L}}{1-L}\left\|f\right\|_{(1)}^2 \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

Этот факт, а также известные точные неравенства между нормами функций и их следов и оценки решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений в ограниченных [3] и неограниченных [4] областях в нормах пространств ${}^{(2)}W_2^1$ позволяют исследовать задачу о минимизации коаналитического уклонения при продолжении заданной граничной функции внутрь области в соответствующих весовых пространствах.

Литература

1. **Зубков П.В.** Об одной аналитической задаче в полуполосе // Вестник МЭИ. 2002. № 6. С. 52—61.

2. **Дубинский Ю.А., Осипенко А.С.** Нелинейные аналитические и коаналитические задачи (L_p-теория, клиффордов анализ, примеры) // Математический сборник. 2000. Т. 191. № 1. С. 65—102.

3. **Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В.** Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Известия вузов. 1988. Т. 315. № 8. С. 4—30.

4. **Яковлев Г.Н.** Неограниченные решения вырождающихся эллиптических уравнений // Труды Математического института АН СССР. 1972. Т. 117. С. 312—320.

References

1. **Zubkov P.V.** Ob odnoy Analiticheskoy Zadache v Polupolose. Vestnik MPEI. 2002;6:52—61. (in Russian).

2. **Dubinskiy Yu.A., Osipenko A.S.** Nelineynye Analiticheskie i Koanaliticheskie Zadachi (L_p-teoriya, Kliffordov Analiz, Primery). Matematicheskiy Sbornik. 2000;191;1:65—102. (in Russian).

3. **Nikol'skiy S.M., Lizorkin P.I., Miroshin N.V.** Vesovye Funktsional'nye Prostranstva i ih Prilozheniya k Issledovaniyu Kraevyh Zadach dlya Vyrozhdayushchihsya Ellipticheskih Uravneniy. Izvestiya Vyzov. 1988;315;8: 4—30. (in Russian).

4. **Yakovlev G.N.** Neogranichennye Resheniya Vyrozhdayushchihsya Ellipticheskih Uravneniy. Trudy Matematicheskogo Instituta AN SSSR. 1972;117:312—320. (in Russian).

Сведения об авторе

Зубков Павел Валерьевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: ZubkovPV@mpei.ru

Information about author

Zubkov Pavel V. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: ZubkovPV@mpei.ru

Статья поступила в редакцию 20.03.2017