УДК 621.398
DOI: 10.24160/1993-6982-2018-1-91-97

Решение задачи терминального управления линейным объектом в условиях интервальной неопределенности

Л.Л. Косарева, Н.В. Скибицкий

Рассмотрен подход к решению задачи оптимального управления с квадратичным критерием в предположении, что исходные данные известны неточно. Неопределенность в исходных данных описана интервальной моделью, базирующейся на предположении, что значения некоторых параметров задачи достоверно принадлежат интервалам с известными нижней и верхней границами. При этом на интервале не определяется никакой вероятностной меры в виде функции плотности вероятности (как в стохастической модели) или функции принадлежности (как в нечеткой модели). Для решения задачи использован аппарат интервального анализа.

Показано, что при непосредственном использовании классической постановки задачи оптимального управления без учета неопределенности в ее параметрах не существует единственного оптимального управления, гарантирующего точный перевод объекта в требуемое конечное состояние при любых значениях параметров из заданного интервала их возможных значений. Это означает, что управление системой без учета неопределенности может перевести ее в недопустимое состояние, поэтому при наличии интервальной неопределенности на параметры задачи нельзя говорить о ее решении в том смысле, в котором оно понимается при точно известных параметрах, и следует пересмотреть сам подход к постановке задачи управления с целью определения в дальнейшем решения, обеспечивающего гарантированную точность перевода системы. В этой связи задачу управления в условиях интервальной неопределенности предлагается сформулировать как задачу определения множества управляющих воздействий, гарантирующих ее решение с заданной до интервала точностью на множестве известных с точностью до интервала параметров.

На примере задачи с неточно известным начальным состоянием показано, что если множество возможных начальных состояний объекта принадлежит множеству, представляющему собой n-мерный прямоугольный параллелепипед в пространстве состояний, то при реализации на объекте управления, рассчитанного для любого значения параметра из заданного множества возможных начальных состояний, множество конечных состояний является выпуклым и представляет собой n-мерный параллелепипед, для построения которого достаточно определить лишь координаты его вершин, соответствующих вершинам выше определенного n-мерного прямоугольного параллелепипеда, определяющего область возможных значений определенных с точностью до интервала параметров задачи.

Получена система неравенств, зависящая от параметров объекта, области его начальных состояний, длительности периода управления и определяющая условие принадлежности множества конечных состояний объекта желаемому прямоугольному множеству. На ее основе сформулированы условия, позволяющие априори ответить на вопрос о разрешимости задачи.

Ключевые слова: интервальные анализ и неопределенность, терминальное управление, управление с заданной точностью.

Для цитирования: Косарева Л.Л., Скибицкий Н.В. Решение задачи терминального управления линейным объектом в условиях интервальной неопределенности // Вестник МЭИ. 2018. № 1. С. 91—97. DOI: 10.24160/1993-6982-2018-1-91-97.

Solving the Terminal Control Problem for a Linear Plant under Interval Uncertainty

L.L. Kosareva, N.V. Skibitskiy

An approach to solving an optimal control problem subject to a quadratic criterion under the assumption that the initial data are known imperfectly is considered. The uncertainty in the initial data is described by an interval model based on the assumption that the values of certain parameters of the problem truly belong to intervals with the known lower and upper boundaries. Noteworthy is that no probability measure is defined on the interval as a probability density function (as in a stochastic model) or a membership function (as in a fuzzy model). The problem is solved by means of interval analysis techniques.

It is shown that an attempt to solve the optimal control problem in its classical formulation without taking into account the uncertainty in its parameters cannot provide a unique optimal control that would guarantee that the plant will be transferred into the required final state with any values of the parameters from the specified interval of their possible values. This means that an attempt to perform control of the system without taking into account the uncertainty may result in the system having been transferred into inadmissible state. Hence, if there is interval uncertainty in the parameters of the problem, one cannot speak about its solution in the sense in which it is understood with precisely known parameters. Therefore, the very approach to the control problem formulation should be revised with a purpose to determine a solution ensuring that the system will be transferred into the desired state with guaranteed accuracy. In this connection, the control problem involving interval uncertainty is proposed to be formulated as a problem of determining the set of control actions guaranteeing its solution with the accuracy specified to the interval in a set of parameters known to within an interval.

It is shown using the example of a problem with an imperfectly known initial state that, if the set of possible initial states of a plant belongs to a set represented by an n-dimensional rectangular parallelepiped in the state space, then, when being implemented in a controlled plant calculated for any parameter value from a given set of possible initial states, the set of final states is a convex one and is represented by an n-dimensional parallelepiped. To construct this parallelepiped it is sufficient to determine only the coordinates of its vertices corresponding to the vertices of the n-dimensional rectangular parallelepiped determined above that defines the domain of possible values of the problem's parameters determined to within an interval.

A system of inequalities depending on the plant's parameters, on the range of its initial states and on the duration of the control period is obtained that determines the condition under which the set of the plant final states belongs to the desired rectangular set. The conditions subject to which the question whether or not the problem is solvable can a priori be answered are formulated proceeding from this system of inequalities.

Key words: interval uncertainty, interval analysis, terminal control, control with preset accuracy.

For citation: Kosareva L.L., Skibitskiy N.V. Solving the Terminal Control Problem for a Linear Plant under Interval Uncertainty. MPEI Vestnik. 2018;1:91—97. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2018-1-91-97.

Введение

Одной из актуальных задач теории управления, получившей название задачи терминального управления [1, 2], является проблема перевода объекта из заданного начального состояния в момент времени t_0 в требуемое конечное состояние к моменту времени $t_к$ в соответствии с некоторым критерием оптимальности.

При этом для описания объекта широко применяют уравнения состояния

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}\in R^n$ — вектор переменных состояния; $A\in R^{n\times n}$ — матрица состояния; $u\in R^1$ — входное управляющее воздействие; $\mathbf{b}\in R^n$ — вектор, компоненты которого непосредственно связаны с параметрами системы.

В качестве критерия качества управления используем функционал

$$J(\mathbf{x},\mathbf{u},t) = \int_{t_0}^{t_k} [\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + gu^2(t)]dt, \tag{2}$$

учитывающий как ошибку в точности перевода объекта в требуемое конечное состояние, так и расход ресурсов, затрачиваемых на управление, причем симметричная положительно полуопределенная матрица $Q\in R^{n\times n}$ и положительный скалярный множитель $g\in R^1$ задают значения весовых коэффициентов, определяющих сравнительную ценность точности управления по отдельным компонентам вектора состояния и затрат на управление. Оптимальному управлению соответствует минимум функционала $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \to \min$.

Граничные условия, определяющие заданное состояние объекта $\mathbf{x}(t_0)$ в начальный момент времени t_0 и требуемое состояние $\mathbf{x}(t_k)$ в конечный момент времени t_k, запишем в виде

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)};\ \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}^{(k)}. \tag{3}$$

Сформулированная задача представляет собой задачу Лагранжа с фиксированными концами.

Решение задачи при точно известных параметрах

Процедура решения задачи основывается на применении вариационного исчисления в дополнении с принципом Лагранжа. В этом случае удается найти решение задачи в классе гладких функций $\mathbf{x}(t)$ и непрерывных функций $u(t)$ [3]. Важным достоинством применения данного метода является относительная простота получения решения в аналитическом виде.

Схема решения предусматривает переход к задаче на безусловный экстремум путем формирования лагранжиана

$$L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{u},t) = \mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + gu^2(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)[\dot{\mathbf{x}} - A\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}^T u(t)]$$

с последующей минимизацией производного критерия

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_k} L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},u,\lambda)dt,$$

где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ — непрерывные функции, вводимые согласно принципу Лагранжа и необходимые для учета динамики объекта.

Известно [1], что для решения поставленной задачи, т. е. определения значений $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$, необходимо записать систему дифференциальных уравнений, включающую:

- уравнения состояния (1);
- уравнения Эйлера–Лагранжа $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) = \mathbf{0}$;
- условия стационарности по управлению $\partial L/\partial u = 0$.

Исключить из полученной системы неизвестную величину u, что позволит получить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}\end{pmatrix} = S\times\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $S = S(A, \mathbf{b}, Q, g)$ — квадратная матрица, зависящая от параметров объекта и критерия оптимальности (2).

Решением системы (4) будут функции времени $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, позволяющие определить $u(t)$.

Чтобы решить систему (4), следует найти корни μ уравнения

$$\det(S - \mu I) = 0, \tag{5}$$

где I — единичная матрица.

В зависимости от соотношения значений параметров объекта (1) и параметров Q и g критерия оптимальности корни уравнения (5) могут быть как действительными, так и комплексно сопряженными, а $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$ будут описываться экспоненциальными или тригонометрическими функциями.

Особенности решения задачи в условиях неполноты задания исходной информации

Классические методы теории оптимального управления применимы, если параметры модели объекта и граничные условия известны точно. Однако на практике это не всегда имеет место, и тогда задача решается с учетом неопределенности в исходных данных.

Неточность значений параметров модели объекта или его граничных условий, в частности, начального состояния, может быть обусловлена погрешностью измерений, действующими на объект неконтролируемыми возмущениями и т. д. В таких случаях применяются методы, использующие одну из известных моделей описания неопределенности (стохастическую, интервальную, нечеткую). Каждая из приведенных моделей имеет свою область предпочтительного применения, определяемую природой возникновения неопределенности, априорными знаниями об объекте управления, адекватным учетом условий его функционирования.

Рассмотрим описание неполноты знаний об объекте на основе интервальной модели, базирующейся на предположении, что значение некоторого параметра a достоверно принадлежит интервалу $a\in[a] = [a^-, a^+]$, где a^-, a^+ — известные нижняя и верхняя границы интервала $[a]$. При этом на интервале не может быть задана какая-либо вероятностная мера в виде функции плотности вероятности (как в стохастической модели) или функции принадлежности (как в нечеткой модели). При интервальном подходе для определения интервалов неопределенности точечных наблюдений может быть использован широкий спектр априорной информации, включая результаты экспериментов, сведения об абсолютных и относительных ошибках, ошибках округления, а также экспертная информация.

Отметим, что в работе используется аппарат интервального анализа [4, 5], который, в отличие от интервальной компьютерной арифметики, позволяет оперировать с именами переменных, а не только с их значениями, обеспечивает выполнение дистрибутивного закона и наличие обратного элемента. Таким образом, в интервальном анализе каждая интервальная величина задается как единая сущность, состоящая из имени переменной и интервала ее возможных значений, в то время как применение интервальной арифметики приводит к получению так называемого «интервального расширения». Тогда, если даны два интервала $[a] = [a^-; a^+]$ и $[b] = [b^-; b^+]$ и условный знак # обозначает любую арифметическую операцию над ними, то результатом операции в интервальном анализе является интервал $[z]$, границы которого находятся как решение задач на минимум и максимум при всех возможных значениях a и b внутри соответствующих интервалов:

$$[z] = [a]\#[b] = [z^- = \min_{a\in[a],\ b\in[b]} (a\#b);$$
$$z^+ = \max_{a\in[a],\ b\in[b]} (a\#b)].$$

Предметами данной работы являются:

- анализ особенностей решения задачи оптимального управления линейными динамическими объектами;
- постановка и решение задачи оптимального управления при наличии интервальной неопределенности на условия задачи.

Сосредоточимся только на случае, когда интервальная неопределенность присутствует в начальных условиях, что позволяет демонстрировать основные особенности решения задачи и делать их достаточно наглядными.

Прогноз состояния системы с учетом интервальной неопределенности

Если начальные условия задачи известны с точностью до интервала

$$\mathbf{x}(t_0)\in[\mathbf{x}^{(0)}] = [\mathbf{x}^{(0)-}, \mathbf{x}^{(0)+}] = \Omega_x^0,$$

где Ω_x^0 — множество возможных начальных состояний объекта, представляющее собой прямоугольный параллелепипед в пространстве состояний $\mathbf{x}\in R^n$; $\mathbf{x}^{(0)-}$, $\mathbf{x}^{(0)+}$ — известные нижняя и верхняя границы интервала $[\mathbf{x}^{(0)}]$, то определение оптимального управляющего воздействия, гарантирующего точный перевод системы в точку $\mathbf{x}^{(k)}$ фазового пространства в соответствии с критерием (2) для произвольного значения $\mathbf{x}^{(0)i}\in\Omega_x^0$, позволит получить множество Ω_u^1, определяемое как

$$\Omega_u^1 = \{u\in R^1 : \exists\mathbf{x}^{(0)}\in\Omega_x^0,\ \mathbf{x}(t_0, t_k, \mathbf{x}^{(0)}, u) = \mathbf{x}^{(k)}\}.$$

При такой постановке задачи не существует единственного оптимального в соответствии с критерием (2) управления, гарантирующего точный перевод объекта из любого начального состояния $\mathbf{x}^{(0)i}\in\Omega_x^0$ в состояние $\mathbf{x}^{(k)}$, а, значит, управление системой без учета неопределенности может перевести ее в недопустимое состояние [6]. Действительно, любое значение $u(t)\in\Omega_u^1$ обеспечивает справедливость (3) только для одного конкретного значения $\mathbf{x}^{(0)}\in\Omega_x^0$. Если управление $u^1(t)$ переводит объект (1) из некоторого начального состояния $\mathbf{x}^{(0)1}\in\Omega_x^0$ в требуемое конечное состояние $\mathbf{x}^{(k)}$ за конечный интервал времени $[t_0, t_k]$, обеспечивая при этом оптимальное значение критерия (2), то оно не сможет одновременно перевести объект (1) из состояния $\mathbf{x}^{(0)2}(t_0)\in\Omega_x^0$, $\mathbf{x}^{(0)2}(t_0) \neq \mathbf{x}^{(0)1}(t_0)$ точно в состояние $\mathbf{x}^{(k)}$.

Очевидно, что такая ситуация не может считаться удовлетворительной, поскольку в силу отсутствия информации о точном значении параметров объекта невозможно выбрать адекватное значение управляющего воздействия.

Применение произвольного управления $u^i(t)$ из множества Ω_u^0 на множестве возможных начальных состояний дает множество конечных состояний, которое будет определять прогноз состояния системы в момент времени t_k при реализации конкретного управляющего воздействия $u^i(t)$.

Решение задачи оптимального управления с гарантированной точностью

Пересмотрим подход к постановке задачи управления: обеспечим перевод объекта не в определенную точку пространства состояний, а в заданную область конечных состояний. Тогда задачу управления в условиях интервальной неопределенности можно сформулировать следующим образом: на множестве возможных начальных состояний Ω_x^0 определим множество управляющих воздействий Ω_u^2, гарантирующих перевод объекта (1) для любого $\mathbf{x}^{(0)j}(t_0)\in\Omega_x^0$ в область Ω_x^k, включающую желаемое значение конечного состояния $\mathbf{x}(t_k)$, поэтому вместо (3) можно поставить требование справедливости отношения

$$\mathbf{x}(t_k)\in[\mathbf{x}^{(k)-},\mathbf{x}^{(k)+}]=\Omega_x^k,$$

где $\mathbf{x}^{(k)-}$, $\mathbf{x}^{(k)+}$ задаются из условия достаточной точности решения.

Поставлена задача: определить такое множество управляющих воздействий

$$\Omega_u^2=\{u\in R^1:\mathbf{x}(t_0,t_1,\mathbf{x}^{(0)},u)\in\Omega_x^k,\forall\mathbf{x}^{(0)j}\in\Omega_x^0\},$$

каждое управляющее воздействие из которого гарантировало бы заданную точность решения $\mathbf{x}(t_k)\in\Omega_x^k$ для любого $\mathbf{x}^{(0)j}\in\Omega_x^0$ и обеспечивало минимум критерия (2), где множества Ω_x^0, Ω_x^k представляют собой n-мерные параллелепипеды в пространстве состояний $\mathbf{x}\in R^n$.

Если множество возможных начальных состояний объекта Ω_x^0 представляет собой n-мерный параллелепипед в пространстве состояний, то при реализации на объекте управления $u^j(t)$, рассчитанного для любого $\mathbf{x}^{(0)j}\in\Omega_x^0$, множество реализаций $\mathbf{x}(t_k)$ конечных состояний Ω_x^{kj} представляет собой выпуклый многогранник [7]. Множество Ω_x^{kj} можно получить методом Монте-Карло, генерируя наборы точечных значений $x_i^{(0)}$, где $x_i^{(0)}$ $(i=1,\ldots,n)$ — компоненты вектора $x^{(0)}$, выбираемые внутри интервалов $[x_i^{(0)}]=[x_i^{(0)-},x_i^{(0)+}]$. Однако такое моделирование излишне, учитывая выпуклость области Ω_x^0, достаточно определить лишь координаты 2^n ее вершин $\mathbf{b}^{(1)}$, $\mathbf{b}^{(2)}$, …, $\mathbf{b}^{(2^n)}$, каждой из которых соответствует траектория, проходящая по границам возможных значений компонент $x_i^{(0)}$ вектора состояний в момент времени t_0.

Решение задачи оптимального управления для двухмерного случая

В реальных задачах нередко приходится оперировать с объектами, адекватно описываемыми уравнениями высокого порядка. Вместе с тем, принципиальные подходы в рамках поставленных в работе вопросов оказываются неизменными для систем любого порядка, а различие часто состоит лишь в росте вычислительной сложности алгоритмов с ростом порядка модели объекта. Поэтому, рассмотрим объект второго порядка, что позволит наглядно представить и проанализирвоать основные результаты.

Кроме того, обычно матрица A в уравнении (1) имеет произвольный вид. Для решения задачи управления предпочтительны ее специальные формы (диагональная, сопровождающая и т. д.), позволяющие унифицировать предлагаемые алгоритмы. Вопросы эквивалентных преобразований, меняющих вид матрицы системы, оставляют неизменными свойства решений для случая точно известного описания объекта и при наличии интервальной неопределенности [8, 9]. В дальнейшем будем полагать, что

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -\dfrac{1}{T}\end{pmatrix};\;\; \mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{k}{T}\end{pmatrix}.$$

Заметим, что такое описание объекта имеет вполне практический характер и может быть использовано в ряде приложений, например, при оптимальном управлении силовой частью привода.

Критерий (2) при $\mathbf{x}\in R^2$ и диагональной матрице $Q\in R^{2\times2}$ примет вид

$$J(\mathbf{x},u)=\int_{t_0}^{t_k}(q_1x_1^2(t)+q_2x_2^2(t)+gu^2(t))dt,$$

где $q_1\ge0$, $q_2\ge0$, $g\ge0$ $(q_1+q_2+r=1)$.

Граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_0)&=(x_1^{(0)},x_2^{(0)})^T=\mathbf{x}^{(0)};\\ \mathbf{x}(t_k)&=(x_1^{(k)},x_2^{(k)})^T=\mathbf{x}^{(k)}.\end{aligned}\qquad(6)$$

Вид оптимальных функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u(t)$ определяется соотношением значений q_1, q_2, g, k, T. При $T>T_{\text{гр}}$, где

$$T_{\text{гр}}=\left(\frac{q_2k}{r}+\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{r}{4q_1}},$$

траектория движения объекта в пространстве состояний и управляющее воздействие описываются синусоидальными функциями $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u(t)$. Такой режим функционирования объекта управления часто неприемлем, так как в механической управляемой системе может привести к быстрому изнашиванию подвижных частей. Поэтому в дальнейшем остановимся на случае, когда $T<T_{\text{гр}}$ и $q_1>0$, $q_2\ge0$, $0<g<1$, $q_1+q_2+g=1$, что приводит к экспоненциальным функциям $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u(t)$ и позволяет рассмотреть все особенности решения задачи. Соотношение для оптимального управляющего воздействия $u^*(t)$ с точностью до определяемых из граничных условий (6) констант C_1, C_2, C_3, C_4, имеет вид:

$$u^*(t)=\frac{1}{k}\Big[(T\mu_1+1)\mu_1C_1e^{\mu_1 t}+(T\mu_1-1)\mu_1C_2e^{-\mu_1 t}+$$
$$+(T\mu_3+1)\mu_3C_3e^{\mu_2 t}+(T\mu_3-1)\mu_3C_4e^{-\mu_2 t}\Big]$$

и задает изменение состояния объекта $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$

$$x_1^*(t)=C_1e^{\mu_1 t}+C_2e^{-\mu_1 t}+C_3e^{\mu_3 t}+C_4e^{-\mu_3 t}; \qquad (7)$$

$$x_2^*(t)=\mu_1C_1e^{\mu_1 t}-\mu_1C_2e^{-\mu_1 t}+\mu_3C_3e^{\mu_3 t}-\mu_3C_4e^{-\mu_3 t}, \qquad (8)$$

где

$$\mu_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\frac{q_2k^2}{gT^2}+\frac{1}{T^2}+\sqrt{\left(\frac{q_2k^2}{gT^2}+\frac{1}{T^2}\right)^2-\frac{4q_1k^2}{gT^2}}}{2}};$$

$$\mu_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{\frac{q_2k^2}{gT^2}+\frac{1}{T^2}-\sqrt{\left(\frac{q_2k^2}{gT^2}+\frac{1}{T^2}\right)^2-\frac{4q_1k^2}{gT^2}}}{2}}.$$

Если для исследуемого линейного объекта множество возможных начальных состояний Ω_x^0 является прямоугольником в пространстве состояний, то множество рассчитанных для него значений конечных состояний объекта Ω_x^{k1} представляет собой параллелограмм, для построения которого, учитывая выпуклость области Ω_x^0, достаточно определить лишь координаты четырех его вершин $\mathbf{b}^{(1)}$, $\mathbf{b}^{(2)}$, $\mathbf{b}^{(3)}$, $\mathbf{b}^{(4)}$, где вершина $\mathbf{b}^{(1)}$ рассчитывается для случая, в котором переменные установлены на своих верхних границах $x_i^{(0)+}$, вершина $\mathbf{b}^{(2)}$ — по данным нижних границ $x_i^{(0)-}$, значения $\mathbf{b}^{(3)}$, $\mathbf{b}^{(4)}$ определяются по двум наиболее разнесенным в области Ω_x^0 точкам. Отдельно вычисляется средняя точка многогранника $\mathbf{b}^{(0)}$, которой соответствует характеристика, рассчитанная с использованием центров интервальных наблюдений, тогда множество конечных состояний объекта Ω_x^{k1} при реализации произвольного $u(t)\in\Omega_u^2$ представляет собой параллелограмм (рис. 1).

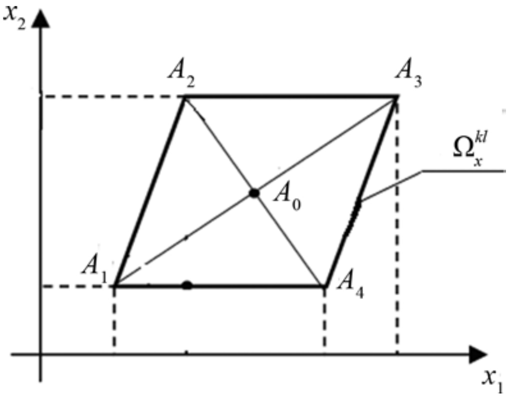

Рис. 1. Прогнозируемое множество конечных состояний

Координаты вершин параллелограмма ($A_1A_2A_3A_4$), рассчитанные по соотношениям (7), (8) для угловых точек Ω_x^0, задаются выражениями:

$$A_1=\begin{pmatrix}x_1^{A_1}\\ x_2^{A_1}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}x_1^{(0)-}+x_2^{(0)-}T\left(1-e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}\right)+w_1C_1+w_2C_2+w_3C_3+w_4C_4\\ x_2^{(0)-}e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}+w_5C_1+w_6C_2+w_7C_3+w_8C_4\end{pmatrix}; \quad (9)$$

$$A_2=\begin{pmatrix}x_1^{A_2}\\ x_2^{A_2}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}x_1^{(0)-}+x_2^{(0)+}T\left(1-e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}\right)+w_1C_1+w_2C_2+w_3C_3+w_4C_4\\ x_2^{(0)+}e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}+w_5C_1+w_6C_2+w_7C_3+w_8C_4\end{pmatrix}; \quad (10)$$

$$A_3=\begin{pmatrix}x_1^{A_3}\\ x_2^{A_3}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}x_1^{(0)+}+x_2^{(0)+}T\left(1-e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}\right)+w_1C_1+w_2C_2+w_3C_3+w_4C_4\\ x_2^{(0)+}e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}+w_5C_1+w_6C_2+w_7C_3+w_8C_4\end{pmatrix}; \quad (11)$$

$$A_4=\begin{pmatrix}x_1^{A_4}\\ x_2^{A_4}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}x_1^{(0)+}+x_2^{(0)-}T\left(1-e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}\right)+w_1C_1+w_2C_2+w_3C_3+w_4C_4\\ x_2^{(0)-}e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}+w_5C_1+w_6C_2+w_7C_3+w_8C_4\end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$w_1=T\mu_1e^{\mu_1t_0-\frac{(t_1-t_0)}{T}}-(T\mu_1+1)e^{\mu_1t_0}+e^{\mu_1t_1};$$
$$w_2=(T\mu_1-1)e^{-\mu_1t_0}-T\mu_1e^{-\mu_1t_0-\frac{(t_1-t_0)}{T}}+e^{-\mu_1t_1};$$
$$w_3=T\mu_3e^{\mu_3t_0-\frac{(t_1-t_0)}{T}}-(T\mu_3+1)e^{\mu_3t_0}+e^{\mu_3t_1};$$
$$w_4=(T\mu_3-1)e^{-\mu_3t_0}-T\mu_3e^{-\mu_3t_0-\frac{(t_1-t_0)}{T}}+e^{-\mu_3t_1};$$
$$w_5=-\mu_1e^{\mu_1t_0-\frac{(t_1-t_0)}{T}}+\mu_1e^{\mu_1t_1};$$
$$w_6=\mu_1e^{-\mu_1t_0-\frac{(t_1-t_0)}{T}}-\mu_1e^{-\mu_1t_1};$$
$$w_7=-\mu_3e^{\mu_3t_0-\frac{(t_1-t_0)}{T}}+\mu_3e^{\mu_3t_1};$$
$$w_8=\mu_3e^{-\mu_3t_0-\frac{(t_1-t_0)}{T}}-\mu_3e^{-\mu_3t_1}.$$

На рис.1 центром является точка A_0 с координатами

$$A_0=\begin{pmatrix}x_1^{Q}\\ x_2^{Q}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0,5((x_1^{(0)-}+x_1^{(0)+})+(x_2^{(0)-}+x_2^{(0)+})T(1-e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}))+\\ +w_1C_1+w_2C_2+w_3C_3+w_4C_4\\ 0,5(x_2^{(0)-}+x_2^{(0)+})e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}+w_5C_1+w_6C_2+w_7C_3+w_8C_4\end{pmatrix}$$

при

$$\mathbf{x}(t_0) = 0,5(\mathbf{x}^{(0)-} + \mathbf{x}^{(0)+}).$$

Крайне важно, что множество Ω_x^{k1} является выпуклым и для его построения достаточно определить значения $\mathbf{x}(t_0, t_1, u^*)$ только для начальных состояний, расположенных в вершинах прямоугольника, задающего множество возможных начальных состояний системы.

Площадь множества конечных состояний объекта Ω_x^{k1} определяется площадью области возможных начальных состояний Ω_x^0, постоянной времени объекта T, длительностью управления $t_к - t_0$, весовыми коэффициентами критерия.

Известно [10], что между интервальными векторами $[\mathbf{x}^{(v)}] \in R^n$ и $[\mathbf{x}^{(w)}] \in R^n$ существует отношение включения $[\mathbf{x}^{(v)}] \in [\mathbf{x}^{(w)}]$, если $\mathbf{x}_i^{(v)-} \geq \mathbf{x}_i^{(w)-}$ и $\mathbf{x}_i^{(v)+} \leq \mathbf{x}_i^{(w)+}, \forall i = 1 \div n$. Если между векторами $[\mathbf{x}^{(v)}]$ и $[\mathbf{x}^{(w)}]$ существует отношение включения, то для интервального расширения $F([\mathbf{x}])$ рациональной функции $F[\mathbf{x}]$ справедливо $F([\mathbf{x}^{(v)}]) \subset F([\mathbf{x}^{(w)}])$.

В силу этого, на множестве начальных состояний объекта Ω_x^0 могут быть определены интервальные расширения $X_1(t, [x_{01}], [x_{02}])$, $X_2(t, [x_{01}], [x_{02}])$ функций, описывающих траекторию объекта:

$$X_1(t,[x_1^{(0)}],[x_2^{(0)}]) = [x_1^{(0)}] + [x_2^{(0)}]T\left(1 - e^{-(t-t_0)/T}\right) +$$
$$+\left(T\mu_1 e^{\mu_1 t_0 - (t-t_0)/T} - (T\mu_1 + 1)e^{\mu_1 t_0} + e^{\mu_1 t}\right)C_1 +$$
$$+\left((T\mu_1 - 1)e^{-\mu_1 t_0} - T\mu_1 e^{-\mu_1 t_0 - (t-t_0)/T} + e^{-\mu_1 t}\right)C_2 +$$
$$+\left(T\mu_3 e^{\mu_3 t_0 - (t-t_0)/T} - (T\mu_3 + 1)e^{\mu_3 t_0} + e^{\mu_3 t}\right)C_3 +$$
$$+\left((T\mu_3 - 1)e^{-\mu_3 t_0} - T\mu_3 e^{-\mu_3 t_0 - (t-t_0)/T} + e^{-\mu_3 t}\right)C_4;$$

$$X_2(t,[x_1^{(0)}],[x_2^{(0)}]) = [x_2^{(0)}]e^{-(t-t_0)/T} +$$
$$+\left(-\mu_1 e^{\mu_1 t_0 - (t-t_0)/T} + \mu_1 e^{\mu_1 t}\right)C_1 +$$
$$+\left(\mu_1 e^{-\mu_1 t_0 - (t-t_0)/T} - \mu_1 e^{-\mu_1 t}\right)C_2 +$$
$$+\left(-\mu_3 e^{\mu_3 t_0 - (t-t_0)/T} + \mu_3 e^{\mu_3 t}\right)C_3 +$$
$$+\left(\mu_3 e^{-\mu_3 t_0 - (t-t_0)/T} - \mu_3 e^{-\mu_3 t}\right)C_4.$$

С учетом исходных требований к точности решения задачи должно выполняться условие $\Omega_x^{k1} \in \Omega_x^k$ (рис. 2).

Используя (9) — (12), условие принадлежности множества конечных состояний Ω_x^{k1} заданному прямоугольному множеству конечных состояний Ω_x^k можно записать в виде системы неравенств

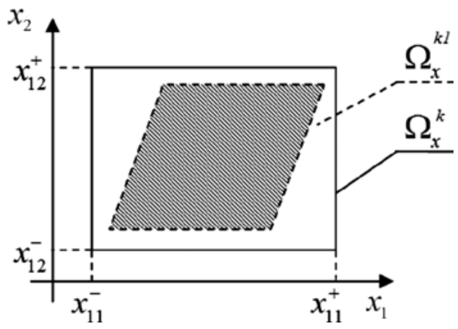

Рис. 2. Включение множества прогнозируемых конечных состояний объекта в заданное множество конечных состояний

$$\begin{cases} x_1^{(0)+} + x_2^{(0)+}T\left(1 - e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}\right) + w_1C_1 + w_2C_2 + \\ +w_3C_3 + w_4C_4 \leq x_{11}^+; \\ x_1^{(0)-} + x_2^{(0)+}T\left(1 - e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}\right) + w_1C_1 + w_2C_2 + \\ +w_3C_3 + w_4C_4 \geq x_{11}^-; \\ x_2^{(0)+}e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}} + w_5C_1 + w_6C_2 + \\ +w_7C_3 + w_8C \leq x_{12}^+; \\ x_2^{(0)-}e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}} + w_5C_1 + w_6C_2 + \\ +w_7C_3 + w_8C_4 \geq x_{12}^-. \end{cases} \tag{13}$$

Одновременное выполнение неравенств

$$(x_1^{(1)+} - x_1^{(1)-}) \geq (x_1^{(0)+} - x_1^{(0)-}) +$$
$$+(x_2^{(0)+} - x_2^{(0)-})T\left(1 - e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}\right);$$
$$(x_2^{(1)+} - x_2^{(1)-}) \geq (x_2^{(0)+} - x_2^{(0)-})e^{-\frac{(t_1-t_0)}{T}}$$

является условием того, что система неравенств (13) совместна и, следовательно, $\Omega_u^2 \neq \varnothing$.

Заключение

Рассмотрен подход к решению задачи оптимального управления с квадратичным критерием оптимальности, когда неопределенность в исходных данных описывается интервальной моделью, а для решения задачи используется аппарат интервального анализа. Показано, что для решения задачи необходимо использовать аппарат интервального анализа, который, в отличие от интервальной компьютерной арифметики, позволяет оперировать с именами переменных, а не только с их значениями.

При использовании классической постановки задачи оптимального управления без учета неопределенности в параметрах задачи не существует единственного оптимального управления, гарантирующего точный перевод объекта из любого начального состояния в требуемое конечное состояние.

При наличии интервальной неопределенности на параметры задачи нельзя говорить о решении задачи в том смысле, в котором оно понимается при точно известных параметрах, и следует пересмотреть сам подход к постановке задачи управления с целью определения решения, обеспечивающего гарантированную точность.

Задачу управления в условиях интервальной неопределенности сформулируем как задачу определения на множестве известных до интервала параметров множества управляющих воздействий, гарантирующих ее решение с заданной до интервала точностью.

Если множество возможных начальных состояний объекта представляет собой n-мерный прямоугольный параллелепипед в пространстве состояний, то при реализации на объекте управления, рассчитанного для любого значения параметра из заданного интервала, множество конечных состояний представляет собой n-мерный параллелепипед, для построения которого достаточно определить лишь координаты его вершин, соответствующих вершинам n-мерного прямоугольного параллелепипеда.

Условие принадлежности множества конечных состояний заданному прямоугольному множеству конечных состояний можно записать в виде системы линейных неравенств, параметрами которых являются параметры области начальных состояний системы и объекта, длительность периода управления, что позволяет априори ответить на вопрос о разрешимости задачи.

Литература

1. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005.
2. **Афанасьев В.Н.** Оптимальные системы управления. Аналитическое конструирование. М.: Изд-во МИЭМ, 2007.
3. **Иванов В.А., Фалдин Н.В.** Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981.
4. **Вощинин А.П.** Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2002. № 1. С. 118—126.
5. **Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.** Оптимизация в условиях неопределенности. М.: Изд-во МЭИ, 1989.
6. **Скибицкий Н.В., Севальнев Н.В.** Интервальные модели в задачах оптимального управления с дифференциальными связями // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. № 11. С. 66—73.
7. **Скибицкий Н.В.** Решение задачи оптимального управления при интервально заданных параметрах объекта // Известия Тульского гос. ун-та. Серия «Информационные системы». 2005. Вып. 4. С. 87—90.
8. **Гайдук А.Р.** Алгебраические методы анализа и синтеза систем автоматического управления. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1988.
9. **Скибицкий Н.В., Чекавинская Я.С.** Преобразование модели системы управления в условиях интервальной неопределенности // Вестник МЭИ. 2012. № 1. С. 91—96.
10. **Алефельд Г., Херцберг Ю.** Введения в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

References

1. **Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V.** Optimal'noe Upravlenie. M.: Fizmatlit, 2005. (in Russian).
2. **Afanas'ev V.N.** Optimal'nye Sistemy Upravleniya. Analiticheskoe Konstruirovanie. M.: Izd-vo MIEM, 2007. (in Russian).
3. **Ivanov V.A., Faldin N.V.** Teoriya Optimal'nyh Sistem Avtomaticheskogo Upravleniya. M.: Nauka, 1981. (in Russian).
4. **Voshchinin A.P.** Interval'nyj Analiz Dannyh: Razvitie i Perspektivy. Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov. 2002;1:118—126. (in Russian).
5. **Voshchinin A.P., Sotirov G.R.** Optimizaciya v Usloviyah Neopredelennosti. M.: Izd-vo MPEI, 1989. (in Russian).
6. **Skibickij N.V., Seval'nev N.V.** Interval'nye Modeli v Zadachah Optimal'nogo Upravleniya s Differencial'nymi Svyazyami. Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov. 2015;11:66—73 (in Russian).
7. **Skibickij N.V.** Reshenie Zadachi Optimal'nogo Upravleniya pri Interval'no Zadannyh Parametrah Ob´ekta. Izvestiya Tul'skogo Gos. Un-Ta. Seriya «Informacionnye Sistemy». 2005;4:87—90. (in Russian).
8. **Gajduk A.R.** Algebraicheskie Metody Analiza i Sinteza Sistem Avtomaticheskogo Upravleniya. Rostov-na-Donu: Izd-vo RGU, 1988. (in Russian).
9. **Skibickij N.V., Chekavinskaya Ya.S.** Preobrazovanie Modeli Sistemy Upravleniya v Usloviyah Interval'-noj Neopredelennosti. Vestnik MPEI. 2012;1:91—96. (in Russian).
10. **Alefel'd G., Hercberg Yu.** Vvedeniya v Interval'nye Vychisleniya. M.: Mir, 1987. (in Russian).

Сведения об авторах

Косарева Людмила Леонидовна — старший инженер ПАО «Сбербанк России» (ИТ Блок, Центр сопровождения ИТ, управление сопровождения систем поддержки бизнеса, отдел кредитных систем), e-mail: kosarevall@yandex.ru

Скибицкий Никита Васильевич — доктор технических наук, профессор кафедры управления и информатики НИУ «МЭИ», e-mail: SkibitskyNV@mpei.ru

Information about authors

Kosareva Lyudmila L. — Senior Engineer PJSC «Russia Sberbank» (IT Block, the Center Support it Management Support Systems Business Support Division Credit Systems), e-mail: kosarevall@yandex.ru

Skibitskiy Nikita V. — Dr.Sci. (Techn.), Professor of Control and Informatics Dept., NRU MPEI, e-mail: SkibitskyNV@mpei.ru

Статья поступила в редакцию 23.05.2017