УДК 517.968.76

Сингулярно возмущенная нелинейная интегро-дифференциальная задача с диагональным вырождением ядра

А. А. Бободжанов*, М. А. Бободжанова, В. Ф. Сафонов

Для нелинейной сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной задачи с диагональным вырождением ядра описан алгоритм регуляризованных асимптотических решений. По результатам анализа главного члена асимптотики выделены классы правых частей и начальных данных, при которых точное решение исходной задачи стремится к предельному (при $\varepsilon \to +0$) на всем рассматриваемом промежутке времени, включая зону пограничного слоя, т.е. решается так называемая задача инициализации.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная интегро-дифференциальная задача, метод регуляризации С. А. Ломова.

В работе [1] рассматривалась система интегральных уравнений с диагональным вырождением ядра:

$$\mu y(t)=\int_0^t (t-s)K_0(t,s)y(s)\,ds+h(t),\ t\in[0,T],\quad (1)$$

которая дифференцированием по t приводилась к интегро-дифференциальной задаче

$$\varepsilon^2\frac{dy}{dt}=\int_0^t\Big(K_0(t,s)y(s,\varepsilon)+(t-s)\times \times\Big(\frac{\partial}{\partial t}K_0(t,s)\Big)y(s,\varepsilon)\Big)ds+\dot h(t),\quad (2)$$
$$y(0,\varepsilon)=\frac{h(0)}{\varepsilon^2},\ t\in[0,T]\ \left(\varepsilon=\sqrt{\mu}\right)$$

с нулевым оператором дифференциальной части [3].

Было построено асимптотическое решение задачи (1) в виде частичной суммы $y_{\varepsilon N}(t)=\sum\limits_{k=-2}^{N}\varepsilon^j z_j(t,\psi(t,\varepsilon))$ регуляризованного ряда, содержащего отрицательные степени малого параметра $\varepsilon=\sqrt{\mu}$. При переходе к нелинейной задаче наличие отрицательных степеней ε приведет к тому, что ее формальное асимптотическое решение будет записано в виде ряда Лорана по степеням ε, содержащего при положительных собственных значениях «диагонального ядра» $K_0(t,\ t)$ так называемые секулярные члены типа $(t/\varepsilon)^m\cos(\beta(t)/\varepsilon)$, которые делают непригодными формальные ряды для асимптотического анализа решений сингулярно возмущенных задач при $\varepsilon \to +0$. По этой причине в рассматриваемой ниже задаче (3) на неоднородность $h(t)$ накладывается условие $h(0) = \dot h(0) = 0$, которое позволяет избежать в асимптотическом решении отрицательных степеней и построить регуляризованный ряд по неотрицательным степеням параметра ε.

Рассмотрим сингулярно возмущенную нелинейную задачу:

$$\varepsilon^3\frac{dy}{dt}=\int_0^t (t-s)\big(K_0(t,s)y(s,\varepsilon)+ +K_1(t,s)\varepsilon y'(s,\varepsilon)+K_2(t,s)\varepsilon^2y''(s,\varepsilon)\big)ds+ +h(t)+\varepsilon^3 f(y,t),\ y(0,\varepsilon)=y^0,\ t\in[0,T]\ \left(\varepsilon=\sqrt[3]{\mu}\right)\quad (3)$$

* bobojanova@mpei.ru

с более общим, чем в (1), ядром. Чтобы не усложнять выкладки, исследуется скалярный случай задачи (3). Наличие в ней множителя ε^3 перед производной y' в левой части уравнения и нелинейностью $f(y, t)$ в его правой части означает, что разложение решения задачи (3) будет вестись по дробным степеням параметра $\mu(\varepsilon = \mu^{1/3})$. Дифференцируя дважды уравнение (3) и вводя новые функции

$$y = y\ ,\varepsilon\frac{d}{dt}y = z,\varepsilon^2\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = $$
$$= \varepsilon\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\frac{dy}{dt}\right) = \varepsilon\frac{d}{dt}z(t) = v(t),$$

получим уравнение

$$\varepsilon\frac{dv}{dt} = \int_0^t\left\{2\left(\frac{\partial}{\partial t}K_0(t,s)\right)y(s,\varepsilon) + \right.$$
$$+2\left(\frac{\partial}{\partial t}K_1(t,s)\right)z(s,\varepsilon) + 2\left(\frac{\partial}{\partial t}K_2(t,s)\right)v(s,\varepsilon) +$$
$$+(t-s)\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}K_0(t,s)\right)y(s) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}K_1(t,s)\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times z(s) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}K_2(t,s)\right)v(s)\right)\right\}ds +$$
$$+K_0(t,t)y(t) + K_1(t,t)z(t) + K_2(t,t)v(t) +$$
$$+\frac{d^2}{dt^2}h(t) + \varepsilon^3\left\{\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(y,t)|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\frac{z(t,\varepsilon)}{\varepsilon} + \right.\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}f(y,t)|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\right)\frac{z(t,\varepsilon)}{\varepsilon} + \left(\frac{\partial}{\partial y}f(y,t)|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\frac{v(t,\varepsilon)}{\varepsilon^2} +$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}f(y,t)|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\frac{z(t,\varepsilon)}{\varepsilon} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(y,t)|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\right\}.$$

Для вектор-функции $w = \{y, z, v\}$ с учетом равенств $h(0) = \dot{h}(0) = 0$ приходим к следующей задаче:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\frac{dw}{dt} = A(t)w + \int_0^t B(t,s)w(s)\,ds + \\ &+H(t) + \varepsilon F(w,t,\varepsilon); \\ &w(0,\varepsilon) = w^0(\varepsilon) \equiv \left\{y^0, \varepsilon\cdot f\left(y^0,0\right), \varepsilon^2 f\left(y^0,0\right)\times\right. \\ &\left.\times\frac{\partial}{\partial y}f\left(y^0,0\right) + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t}f\left(y^0,0\right)\right\},\end{aligned} \tag{4}$$

где матрицы $A(t)$, $B(t, s)$ и вектор-функции $H(t)$, $F(w, t, \varepsilon)$ имеют вид ($e_3 = \{0, 0, 1\}$):

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K_0(t,t) & K_1(t,t) & K_2(t,t) \end{pmatrix};\ H(t) = h''(t)e_3;$$

$$B(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_0(t,s) & k_1(t,s) & k_2(t,s) \end{pmatrix};$$

$$F(w,t,\varepsilon) = \left\{\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(y,t)|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)z(t,\varepsilon) + \right.\right.$$
$$\left.+\varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}f(y,t)|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)\right)z(t,\varepsilon) +$$
$$+\varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}f(y,t)|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)z(t,\varepsilon) +$$
$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(y,t)|_{y=y(t,\varepsilon)}\right) +$$
$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial y}f(y,t)|_{y=y(t,\varepsilon)}\right)v(t,\varepsilon)\right\}e_3;$$

$$k_j(t,s) = 2\frac{\partial}{\partial t}K_j(t,s) + (t-s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[K_j(t,s)\right],\ j = \overline{0,2}.$$

Характеристическое уравнение матрицы $A(t)$ будет таким:

$$\lambda^3 = K_2(t,t)\lambda^2 + K_1(t,t)\lambda + K_0(t,t).$$

Его корни $\lambda = \lambda_j(t)$ образуют спектр $\sigma(A(t)) = \left\{\lambda_j(t),\ j = \overline{0,2}\right\}$ матрицы $A(t)$. Будем предполагать, что он простой, т.е. что $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), i \neq j, i, j = \overline{0,2}, \forall t \in [0,T]$. Тогда матрица $A(t)$ имеет полную систему собственных векторов $\{\varphi_j(t)\}$, которые можно записать в виде $\varphi_j(t) = \left\{1, \lambda_j(t), \lambda_j^2(t)\right\}, j = \overline{0,2}$. Обозначим через $\Phi(t)$ матрицу из собственных векторов оператора $A(t)$:

$$\Phi(t) = \left(\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)\right) \equiv$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_0(t) & \lambda_1(t) & \lambda_2(t) \\ \lambda_0^2(t) & \lambda_1^2(t) & \lambda_2^2(t) \end{pmatrix}$$

и вычислим матрицу $(\Phi^*(t))^{-1} = \chi(t) \equiv (\chi_0(t), \chi_1(t), \chi_2(t))$. Тогда $\chi_j(t)$ будет $\overline{\lambda}_j(t)$ — собственным вектором сопряженной матрицы $A^*(t)$, причем системы векторов $\{\varphi_j(t)\}$ и $\{\chi_j(t)\}$ будут биортонормированными, т.е. $(\varphi_i(t), \chi_j(t))$ — символ Кронекера, $i, j = \overline{0,2}$, $\forall t \in [0,T]$. Подытожим условия, при которых будет рассматриваться задача (4):

1) $h(t) \in C^\infty[0,T],\ h(0) = \dot{h}(0) = 0,$ $K_j(t,s) \in C^\infty(0 \le s \le t \le T), j = \overline{0,2};$

2) спектр матрицы $A(t)$ удовлетворяет требованиям:

а) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), i \neq j, \lambda_j(t) \neq 0,\ i, j = \overline{0,2}, \forall t \in [0,T];$

б) $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \le 0,\ j = \overline{0,2}\ (\forall t \in [0,T]);$

3) функция $f(y, t)$ является многочленом (взята в виде многочлена от y ради упрощения выкладок; можно считать, что $f(y, t)$ аналитична по y) от

$y: f(y,t) = f_0(t) + \sum_{r=1}^{N_0} f_r(t) y^r$ с коэффициентами $f_r(t) \in C^\infty([0,T], \mathbb{C}^1)$, $r = \overline{0, N_0}$, $N_0 < \infty$ (тогда и вектор-функция $F(w, t, \varepsilon)$ также будет многочленом по $w: F = \sum_{|m|=0}^{N} F^{(m)}(t,\varepsilon) w^m$ с векторными коэффициентами $F^{(m)}(t, \varepsilon)$ из класса $C^\infty(([0,T], \mathbb{C}^3) \times \{\varepsilon > 0\})$);

4) равенства

$(m, \lambda(t)) \equiv m_0\lambda_0(t) + m_1\lambda_1(t) + m_2\lambda_2(t) = \lambda_j(t)$ (при $|m| \geq 2$ и $j \in \{0, 1, 2\}$) либо не имеют места ни при каких $t \in [0, T]$, либо выполняются тождественно при всех $t \in [0, T]$.

Регуляризация задачи (4)

Введем регуляризирующие переменные

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}, \quad j = \overline{0,2} \tag{5}$$

и для функции $\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)$ $(\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2))$ поставим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \sum_{j=0}^{2} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau_j} - A(t)\tilde{w} - \\ &-\int_0^t B(t,s)\tilde{w}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}\right) ds = H(t) + \varepsilon F(\tilde{w}, t, \varepsilon); \\ &\tilde{w}(0,0,\varepsilon) = w^0(\varepsilon). \end{aligned} \tag{6}$$

Ясно, что если $\tilde{w} = \tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)$ — решение задачи (6), то его сужение $w(t,\varepsilon) \equiv \tilde{w}\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ $(\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2))$ является точным решением задачи (4). Однако в (6) не произведена регуляризация интегрального члена:

$$J\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon) = \int_0^t B(t,s)\tilde{w}\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) ds. \tag{7}$$

Для осуществления этой операции введем класс M_ε, асимптотически инвариантный относительно оператора J (см. [1]).

Определение 1. Будем говорить, что вектор-функция $w(t, \tau) = \{w_0, w_1, w_2\}$ принадлежит пространству U, если она представляется суммой вида:

$$\begin{aligned} w(t,\tau) = &\sum_{0\leq|m|\leq N}^{*} w^{(m)}(t) e^{(m,\tau)} \equiv \\ &\sum_{0\leq m_0+m_1+m_2\leq N}^{*} w^{(m_0,m_1,m_2)}(t) e^{m_0\tau_0 + m_1\tau_1 + m_2\tau_2}, \quad N = N_w < \infty \end{aligned} \tag{8}$$

с коэффициентами $w^{(m)}(t) \in C^\infty([0,1], \mathbb{C}^3), 0 \leq |m| \leq N$.

Звездочка в (8) над знаком суммы означает, что в этой сумме отсутствуют резонансные экспоненты (см. [4]), т.е. такие экспоненты $e^{(m,\tau)}$ измерения $|m| \geq 2$, для которых при некоторых $j = \{0, 1, 2\}$ и $t \in [0, T]$ выполняется тождество $(m, \lambda(t)) \equiv \lambda_j(t)$.

Подставляя (8) в (7) вместо $\tilde{w}$ и обозначая $k^{(m)}(t, s) \equiv B(t, s)w^{(m)}(s)$, будем иметь

$$Jw(t,\tau) = \sum_{0\leq|m|\leq N}^{*} \int_0^t k^{(m)}(t,s) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (m,\lambda(\theta))d\theta} ds.$$

Применяя операцию интегрирования по частям, получим следующее разложение:

$$\begin{aligned} Jy(t,\tau) = &\sum_{0\leq|m|\leq N}^{*} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{\nu+1} \left[\left(I_m^\nu \left(k^{(m)}(t,s)\right)\right)_{s=t} \times \right. \\ &\left. \times e^{(m,\tau)} - \left(I_m^\nu \left(k^{(m)}(t,s)\right)\right)_{s=0} \right]; \\ &I_m^0 = \frac{1}{(m,\lambda(s))}; \; I_m^\nu = \frac{1}{(m,\lambda(s))} \cdot \frac{\partial}{\partial s} I_m^{\nu-1}; \;\; \nu \geq 1, \end{aligned} \tag{11}$$

причем ряд в (11) сходится при $\varepsilon \to +0$ асимптотически (равномерно по $t \in [0, T]$) к образу $Jy(t, \tau, \sigma)$ (см. [1]). Это означает, что класс $M_\varepsilon = U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$ инвариантен относительно интегрального оператора J.

Пусть теперь ряд

$$\begin{aligned} \tilde{w}(t,\tau,\varepsilon) &= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q w_q(t,\tau) \equiv \\ &\equiv \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sum_{0\leq|m|\leq N_q}^{*} w_q^{(m)}(t) e^{(m,\tau)} \end{aligned} \tag{12}$$

сходится асимптотически при $\varepsilon \to +0$ равномерно по $(t,\tau) \in [0,T] \times \{\mathrm{Re}\,\tau_j \leq 0, j = \overline{0,2}\}$. Тогда образ $J\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)$ будет, очевидно, также представляться асимптотическим рядом, равномерно сходящимся при $\varepsilon \to +0$. Это позволяет получить окончательное расширение интегрального оператора J следующим образом. Для произвольного элемента (8) пространства U можно записать:

$$Jw(t,\tau) = R_0 w(t,\tau) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu R_\nu w(t,\tau),$$

где операторы $R_\nu : U \to U$ (операторы порядка по ε) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} &R_0 w(t,\tau) \equiv 0; \\ &R_{\nu+1} w(t,\tau) = (-1)^\nu \times \\ &\times \sum_{0\leq|m|\leq N}^{*} \left[\left(I_m^\nu \left(k^{(m)}(t,s)\right)\right)_{s=t} \cdot e^{(m,\tau)} - \left(I_m^\nu \left(k^{(m)}(t,s)\right)\right)_{s=0} \right]; \\ &\nu \geq 0, \tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{12$_0$}$$

С учетом этих формул результат подстановки ряда (12) в интеграл $J\tilde{w}$ можно записать в виде $J\tilde{w} = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{s=0}^{r} R_{r-s} w_s\left(t,\tau\right)|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$ и положить по определению

$$\tilde{J}\tilde{w} = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{s=0}^{r} R_{r-s} w_s\left(t,\tau\right). \qquad (13)$$

Тогда задача, полностью регуляризованная по отношению к исходной (4), будет такой:

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \sum_{j=0}^{2} \lambda_j(t)\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau_j} - A(t)\tilde{w} - \tilde{J}\tilde{w} - \\ -\varepsilon F\left(\tilde{w},t,\varepsilon\right) = H(t), \tilde{w}(0,0,\varepsilon) = w^0\left(\varepsilon\right).\end{gathered} \qquad (14)$$

Разрешимость итерационных задач

Подставляя (12) в (14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε получаем следующие итерационные задачи:

$$L_0 w_0 \equiv \sum_{j=0}^{2} \lambda_j(t)\frac{\partial w_0}{\partial \tau_j} - A(t)w_0 = H(t), w_0(0,0) = w_0^0; \qquad (15_0)$$

$$L_0 w_1 = -\frac{\partial w_0}{\partial t} + R_1 w_0 + \hat{F}\left(w_0,t,0\right), w_1(0,0) = w_1^0; \qquad (15_1)$$

...

$$\begin{gathered}L_0 w_k = -\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + R_1 w_{k-1} + R_2 w_{k-2} + \cdots + \\ +R_k w_0 + \hat{P}_k\left(w_0,...,w_{k-1}\right),\ w_k(0,0) = w_k^0.\end{gathered} \qquad (15_k)$$

Здесь w_j^0 — коэффициент при ε^j в разложении начального вектора $w^0(\varepsilon)$ по степеням ε, операторы R_ν вычисляются по формулам (12_0), $P_k(w_0, ..., w_{k-1})$ — многочлены от $w_1, ..., w_{k-1}$ с коэффициентами, зависящими от $w = w_0(t, \tau)$, причем $P_k(w_0, ..., w_{k-1})$ линеен относительно w_{k-1}; шляпка $\wedge$ над $F, ..., P_k$ означает знак операции вложения соответствующей вектор-функции в пространство U, в котором отсутствуют резонансные экспоненты (эта операция действует следующим образом: если в многочлене от экспонент $g\left(t,e^{\tau_0},e^{\tau_1},e^{\tau_2}\right)$ появляется резонансная экспонента $e^{(m,\tau)}\left(|m| \geq 2,\left(m,\lambda\left(t\right)\right) \equiv \lambda_j\left(t\right)\right)$, то операция $\wedge$ заменяет ее на соответствующую экспоненту e^{τ_j} первого измерения).

Каждая из итерационных задач (15_k) имеет вид системы

$$L_0 w(t,\tau) \equiv \sum_{j=0}^{2} \lambda_j(t)\frac{\partial w}{\partial \tau_j} - A(t)w = H(t,\tau), \qquad (16)$$

где $H(t,\tau) = \sum_{0\leq|m|\leq N_H}^{*} H^{(m)}(t)e^{(m,\tau)} \in U$ — соответствующая правая часть. Пространство U можно представить в виде прямой суммы подпространств

$$U^{(s)} = \{w(t,\tau): w(t,\tau,\sigma) = \sum_{|m|=s}^{*} w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}\}, s = 0,1,..., N,$$

т.е. $U = \sum_{s=0}^{N} \oplus U^{(s)}$. Примем следующее обозначение: если $w(t, \tau)$ — элемент (8) пространства U, то через $y^{(s)}(t, \tau)$ будем обозначать сумму $\sum_{|m|=s}^{*} w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)} \in U^{(s)}$.

Нам понадобится скалярное (при каждом $t\in[0, T]$) произведение в пространстве $U^{(1)}$. Оно вводится следующим образом:

$$\begin{gathered}< w(t,\tau), p(t,\tau) >\equiv< \sum_{j=0}^{2} w^{e_j}(t)e^{\tau_j}, \sum_{j=0}^{2} p^{e_1}(t)e^{\tau_j} > \overset{def}{=} \\ \overset{def}{=} \sum_{j=0}^{2}(w^{e_j}(t), p^{e_j}(t)),\end{gathered}$$

где (,) — обычное скалярное произведение в C^3. Нетрудно видеть, что вектор-функции $\nu_j(t,\tau) \equiv \chi_j(t)e^{\tau_j}$ (где $\chi_j(t)$ — собственный вектор матрицы $A^*(t)$, соответствующий собственному значению $\bar{\lambda}_j(t)(j = \overline{0,2})$), образуют базис ядра, сопряженного в $U^{(1)}$ оператора $L_0^* = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j(t)\frac{\partial}{\partial \tau_j} - A^*(t)$ (к оператору L_0). Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $H(t, \tau)\in U$ и выполнены условия 1) и 2а). Тогда для разрешимости уравнения (16) в пространстве необходимо и достаточно, чтобы*

$$< H^{(1)}(t,\tau), \nu_j(t,\tau) >\equiv 0\ (j = \overline{0,2}, \forall t \in [0,T]). \qquad (17)$$

Не будем формулировать теорему об однозначной разрешимости системы (16) (при некоторых дополнительных ограничениях). Отметим только, что если теорему 1 применить к двум последовательным итерационным задачам (15_l), (15_{l+1}), то получим условия однозначной разрешимости в пространстве U системы (15_l) (см., например, [2]).

Построение решения первой итерационной задачи

Рассмотрим систему (15_0). Так как неоднородность $H(t, \tau) \equiv h(t)$ не зависит от экспонент e^{τ_j}, то для нее условия ортогональности (17) автоматически выполняются, поэтому система (15_0) имеет решение в пространстве U, которое можно записать в виде:

$$w_0(t,\tau) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + w_0^{(0)}(t), \qquad (18)$$

где $w_0^{(0)}(t) = -A^{-1}(t)h(t)$, $\alpha_j^{(0)}\left(t\right) \in C^\infty\left(\left[0,1\right],\mathbb{C}^1\right)$ — произвольные скалярные функции. Подчиним (18) начальному условию $w_0(0, 0) = y^0$; будем иметь:

$$\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^{(0)}(0)\varphi_j(0)+w_0^{(0)}(0)=w^0\Leftrightarrow\alpha_j^{(0)}(0)= \\ (w^0+A^{-1}(0)h(0),\chi_j(0)),\quad j=\overline{0,2}. \tag{19}$$

Перейдем теперь к следующей итерационной задаче (15_1). Подставляя (18) в (15_1), получим систему:

$$L_0w_1=-\sum_{j=0}^{2}(\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)\dot{)}e^{\tau_j}-\dot{w}_0^{(0)}(t)- \\ \sum_{j=0}^{2}\left[\frac{B(t,t)\varphi_j(t)}{\lambda_j(t)}\alpha_j^{(0)}(t)-\frac{B(t,0)\varphi_j(0)}{\lambda_j(0)}\alpha_j^{(0)}(0)\right]+ \\ +\hat{F}\left(\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j}+y_0^{(0)}(t),\ t\right). \tag{20}$$

Вычисляя

$$\hat{F}\left(\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^{(0)}\varphi_j(t)e^{\tau_j}+y_0^{(0)}(t),t\right)= \\ =F_0(t)+\sum_{j=0}^{2}F^{e_j}\left(\alpha_1^{(0)},\ldots,\alpha_n^{(0)},t\right)e^{\tau_j}+ \\ +\sum_{2\le|m|\le N_1}^{*}F^{(m)}\left(\alpha_1^{(0)},\ldots,\alpha_n^{(0)},t\right)e^{(m,\tau)},$$

и подчиняя правую часть системы (20) условиям ортогональности (17), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\alpha}_j^{(0)}=-\left(\dot{\varphi}_j(t),\chi_j(t)\right)\alpha_j^{(0)}+ \\ +\left(F^{e_j}\left(\alpha_1^{(0)},\ldots,\alpha_n^{(0)},t\right),\chi_j(t)\right); \\ \alpha_j^{(0)}(0)=(y^0+A^{-1}(0)h(0),\chi_j(0)),\ j=\overline{1,n}. \tag{21}$$

Система (21) в резонансном случае является нелинейной системой дифференциальных уравнений относительно $\alpha_j^{(0)}(t)$, а значит, ее разрешимость на отрезке $[0,T]$ не гарантирована. Потребуем, чтобы система (21) имела решение в классе $C^\infty\left([0,T],\mathbb{C}^n\right)$. В этом случае функции $\alpha_j^{(0)}(t)$, входящие в решение (21) системы (15_0), будут полностью вычислены, а сама система (15_0) будет иметь единственное решение в пространстве U. При этом будет найдено решение системы (15_1) (с точностью до элементов ядра оператора L_0 в $U^{(1)}$). Поиск функций $\alpha_j^{(1)}(t)$, входящих в указанное ядро, осуществляется по той же схеме, что и поиск функций $\alpha_j^{(0)}(t)$. При этом для $\alpha_j^{(1)}(t)$ уже получается линейная система дифференциальных уравнений, разрешимость которой на отрезке $[0,T]$ гарантирована гладкостью входящих в нее коэффициентов. Сформулируем соответствующий результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1) — 4) и задача (21) разрешима на отрезке* $[0,T]$. *Тогда все итерационные задачи* $(15_k)(k=0,1,2,\ldots)$ *однозначно разрешимы в классе U (при их последовательном решении).*

Асимптотическая сходимость формальных решений и решение задачи инициализации

Построив решения $w_0(t,\tau,\sigma)$, ..., $w_l(t,\tau,\sigma)$ задач (15_0), ..., (15_l) в пространстве U, составим частичную сумму:

$$S_l(t,\tau,\sigma,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k w_k(t,\tau,\sigma).$$

Обозначим сужение этой суммы при $\tau=\psi(t)/\varepsilon$ через $w_{\varepsilon l}(t)$. Имеет место следующее утверждение (доказательство проводится по аналогии с работой [4]).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1) – 4) и задача (21) разрешима на отрезке* $[0,T]$. *Тогда система (4) при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *(*$\varepsilon_0>0$ *достаточно мало) имеет единственное решение* $w(t,\varepsilon)\in C^1\left([0,T],\mathbb{C}^n\right)$ *и справедлива оценка:*

$$\left\|w(t,\varepsilon)-w_{\varepsilon l}(t)\right\|_{C[0,T]}\le C_l\cdot\varepsilon^{l+1}\ (l=0,1,\ldots),$$

где постоянная $C_l>0$ не зависит от $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Для того чтобы имел место предельный переход $\left\|w(t,\varepsilon)-\bar{\bar{w}}(t)\right\|_{C[0,T]}\to0\ (\varepsilon\to+0)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $(w^0+A^{-1}(0)h(0),\chi_j(0))=0,\ j=\overline{1,n}$. При этом $\bar{\bar{y}}(t)\equiv y_0^{(0)}(t)$, а класс инициализации $\Sigma=\left\{w^0,h(t),B(t,s)\right\}$ не зависит от ядра $B(t,s)$ и неоднородности $h(t)$ и выражается тем, что начальный вектор w^0 должен совпадать с предельным решением $\bar{\bar{y}}(t)=-A^{-1}(t)h(t)$ в начальный момент времени $t=0$.

Литература

1. **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Регуляризованные асимптотические решения сингулярно возмущенных интегральных систем с диагональным вырождением ядра // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 10. С. 1330 — 1341.
2. **Ломов С.А., Ломов И.С.** Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Московского ун-та, 2011.
3. **Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф.** Асимптотический анализ сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем с нулевым оператором дифференциальной части // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 519 — 536.
4. **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Сингулярно возмущенные нелинейные интегро-дифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами // Математические заметки. 2002. Т. 72. Вып. 5. С. 654 — 664.

Статья поступила в редакцию 23.10.2015