

УДК 621.398.97

DOI: 10.24160/1993-6982-2018-1-119-124

## Формирование периодических колебаний несинусоидальной формы с ангармонизмом обертонов

Л.А. Белов, Н.С. Семенов, Н.С. Первеева

Проанализированы затухающие изгибные колебания высокодобротной струны с закрепленными концами. На основе модели тонкой упругой однородной струны с электромагнитным преобразователем механических колебаний в электрический сигнал звукоснимателя, расположенного вблизи струны, представлено волновое уравнение второго порядка в частных производных по времени и координате вдоль струны, учитывающее упругие свойства материала струны, ее длину, натяжение и затухание, величину и место возбуждения, а также расположение звукоснимателя относительно струны. Решение в зависимости от времени выглядит в виде ряда по высшим гармоникам (обертонам) колебаний основного тона. Показано, что свободные колебания имеют несинусоидальную форму, медленно меняющуюся в переходном процессе. При этом необходим учет нескольких десятков обертонов сопоставимой амплитуды. Установлено, что колебания характеризуются ангармонизмом обертонов, проявляющимся в прогрессивном увеличении собственной частоты обертона с ростом его номера по сравнению со значением, целым кратным частоте основного тона. В незатухающем процессе происходит периодическая вариация формы несущего колебания, а в процессе затухания исходная несинусоидальная форма колебания приближается к гармонической.

Для измерения количественных параметров процесса использованы калиброванные массивы записей звучания около 100 струн профессионального рояля в интервале значений частоты основного тона, превышающего 5 октав. Установлено, что эквивалентная добротность таких колебательных систем изменяется от нескольких сотен до нескольких тысяч. Для определения значения параметра ангармонизма использован метод модифицированного кепстрального преобразования. Суть модификации состоит в поиске калиброванного предсказания частотной оси после первого спектрального преобразования массива отсчетов процесса во времени, при котором происходит наилучшая локализация кепстрального отклика в области репидов. Измерения значений параметра ангармонизма для упомянутого массива записей показали, что его значения составляют от сотых долей до нескольких процентов в зависимости от сочетания параметров колебательной системы. Наличие десятков высших обертонов с проявлениями ангармонизма, распространяющимися вдоль колебательной системы с различной скоростью, приводит к заметным периодическим вариациям формы и размаха процесса, в том числе, в случае незатухающего колебания.

Полученные результаты могут быть использованы для повышения качества электронных синтезаторов квазипериодических сигналов, приближая структуру колебания и звучания музыкального синтезатора к получаемым в дорогостоящих натуральных инструментах. Разработана и внедрена в учебный процесс лабораторная работа, в которой синтезируется рассмотренное квазипериодическое колебание распределенной высокодобротной колебательной системы с ангармонизмом обертонов и проводится кепстральный анализ полученных сигналов.

*Ключевые слова:* распределенная колебательная система, ангармонизм обертонов, измерения параметров колебаний, модифицированное кепстральное преобразование, синтез квазипериодического колебания.

*Для цитирования:* Белов Л.А., Семенов Н.С., Первеева Н.С. Формирование периодических колебаний несинусоидальной формы с ангармонизмом обертонов // Вестник МЭИ. 2018. № 1. С. 119—124. DOI: 10.24160/1993-6982-2018-1-119-124.

## Generating Periodic Nonsinusoidal Vibrations with Inharmonicity of Overtones

L.A. Belov, N.S. Semenov, N.S. Perveeva

Damped bending vibrations of a high-Q string with fixed ends are analyzed. The model of a thin elastic homogeneous string with an electromagnetic pickup placed near the string is used to construct a second-order wave equation in partial time and coordinate derivatives that takes into account the elastic properties of string material, its length, tension and damping, the excitation intensity and location, and the pickup position with respect to the string. The solution as a function of time has the form of a series of higher harmonics (overtones) of fundamental-frequency vibration. It is shown that free oscillations have a nonsinusoidal shape slowly changing during the transient. To obtain a correct solution, several dozens of overtones having commensurable amplitudes should be taken into account.

It is found that the oscillations are characterized by inharmonicity of overtones, which manifests itself in a progressive increase in the overtone eigenfrequency with the growth of its number in comparison with a value that is an integer multiple of the fundamental frequency. A nondamped process is accompanied by a periodically varying waveform of the carrier oscillation, and as the vibration decays, its initial nonsinusoidal shape approaches a harmonic waveform.

To measure the process quantitative parameters, calibrated arrays of sound records of about 100 strings of a professional grand piano were used in the range of the fundamental tone frequencies exceeding five octaves. It is found that the equivalent Q factor of such oscillating systems varies

from a few hundred to several thousand. To determine the inharmonicity parameter value, a modified cepstral transformation method is used. The basic idea of the modified method lies in finding a calibrated pre-distortion of the frequency axis after the first spectral transformation of the process time history samples at which the cepstral response is best located in the region of repiodes. Measurements of the inharmonicity parameter for the above-mentioned array of records showed that its values are from a few hundredths to several percent, depending on the combination of the vibrating system parameters. It is shown that the presence of tens of higher inharmonic overtones propagating along the vibration system with different velocities leads to noticeable periodic variations in the process shape and magnitude, also in the case of undamped oscillation.

The obtained results can be used for improving the quality of electronic synthesizers of quasi-periodic signals through bringing the musical synthesizer vibration structure and sound closer to those obtained in expensive natural instruments.

A training laboratory work has been developed and introduced into the education course, in which the above-mentioned quasi periodic oscillation of a distributed high-Q vibration system with inharmonicity of overtones is synthesized, and a cepstral analysis of the obtained signals is carried out.

*Key words:* distributed vibration system, overtone inharmonicity, measurements of oscillation parameters, modified cepstral transformation, synthesis of quasi periodic vibration.

*For citation:* Belov L. A., Semenov N. S., Perveeva N. S. Generating Periodic Nonsinusoidal Vibrations with Inharmonicity of Overtones. MPEI Vestnik. 2018;1:199—124. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2018-1-199-124.

Колебания и сигналы несинусоидальной формы с высокой стабильностью частоты повторения используются в радиотехнических, акустоэлектронных и электромзыкальных приложениях [1 — 3]. Данные колебания отличаются многооктавной полосой занимаемых частот, значительным количеством обертонов с сопоставимыми амплитудами, а интервал между значениями собственных частот соседних обертонов прогрессивно меняется с возрастанием их номера, что свидетельствует о проявлении ангармонизма.

Цель данной работы состоит в систематизации разрозненных сведений о колебаниях сложной формы в распределенных колебательных системах с малыми потерями, выявлении особенностей физико-математического описания динамики изменения и изложении результатов предложенного модифицированного кепстрального алгоритма анализа и синтеза сигналов с ангармонизмом обертонов.

## Основные соотношения

Примером сверхширокополосной распределенной колебательной системы, в которой возникают почти периодические колебания несинусоидальной формы со значительным количеством высших гармоник (обертонов), является упругая, тонкая, однородная струна с малыми потерями, закрепленная в точках с координатами  $x = 0$  и  $x = L$ , в которой после отклонения одной из ее точек с координатой  $x_0 < L$  происходят затухающие колебания в плоскости  $(x, y)$ . Процесс затухания во времени  $t$  колебаний  $y(t, x)$  произвольной точки струны является решением [4] волнового уравнения

$$\frac{\delta^2 y(t, x)}{\delta x^2} + 4 \frac{\delta y(t, x)}{\delta x} - \frac{1}{(2f_1)^2} \frac{\delta^2 y(t, x)}{\delta t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $f_1 = a/L$  — частота основного тона;  $a = \sqrt{T/4\rho}$  — коэффициент, характеризующий упругие свойства струны;  $T$  — натяжение;  $\rho$  — плотность материала;  $\sigma \ll 1$  — параметр затухания.

Собственное решение уравнения (1) можно представить в виде ряда по высшим гармоникам (обертонам) частоты основного тона  $f_1$  с номерами в виде

натуральных целых чисел  $n$  (без учета постоянной составляющей, не влияющей на распространение акустических волн) [1]:

$$\frac{y(t, x)}{y_0} = \left[ \frac{2}{\left(\frac{x_0}{L}\right)\left(1 - \frac{x_0}{L}\right)} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin\left(\pi \frac{x}{L} n\right) \times \right. \\ \left. \times \left[ A_n \cos\left(\pi \frac{a}{L} nt\right) + B_n \sin\left(\pi \frac{a}{L} nt\right) \right] \exp\left(-\frac{t}{T(n)}\right) \right\}, \quad (2)$$

где

$$A_n = 4 \sin\left(\pi \frac{x_0}{L} n\right) / \left[ (\pi n)^2 (x_0/L) \left(1 - \frac{x_0}{L}\right) \right]; \\ B_n = A_n / (2Qn)$$

— амплитуды спектральных компонент;  $T(n)$  — постоянная времени затухания колебаний каждого из обертонов.

Примем в качестве эквивалентной добротности колебательной системы величину  $Q = \pi T(n) f_n$ , при которой за  $t = 3T(n)$  амплитуда колебаний в одиночном LC-контуре первого порядка уменьшается в  $e^3 \approx 20$  раз. Процесс  $y(t, x)$  в электрический сигнал  $y(t)$  преобразуется звуконосителем, расположенным вблизи соответствующей точки струны.

На рис. 1 по (2) сплошной линией 1 построена зависимость процесса колебаний  $y(t, x)/y_0$  точки струны с координатой  $x = 0,1L$  при ее возбуждении в точке  $x_0 = 0,25L$  для струны с параметром упругости  $a = 0,2L$  и добротностью  $Q = 500$  с учетом  $N = 32$  гармоник в предположении, что собственные частоты обертонов кратны частоте основного тона  $f_n = n f_1$ , т. е. ангармонизм обертонов не учитывается.

Анализ графиков, показанных линией 1, показывает, что колебание  $y(t, x)$  имеет период  $T_1 = 1/f_1$ . В процессе затухания в спектре снижается содержание высших обертонов.

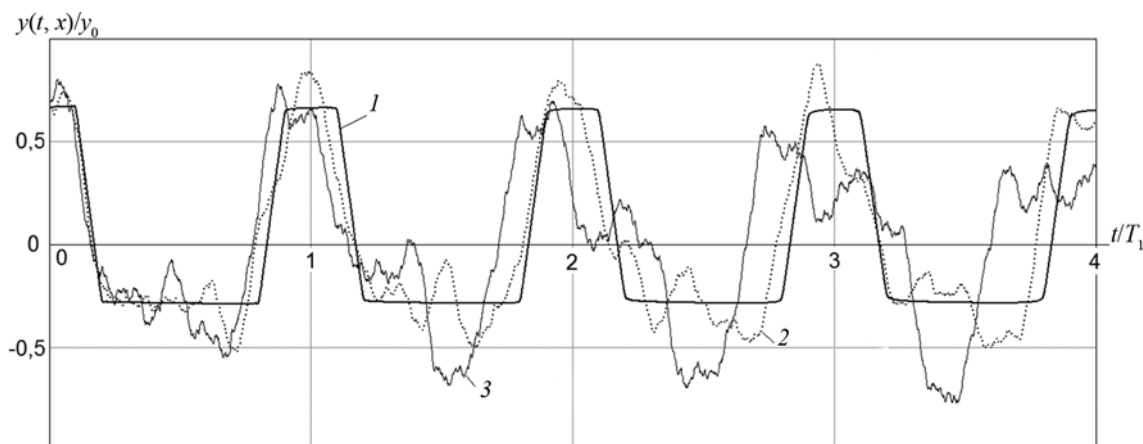


Рис. 1. Процесс свободного затухания колебаний струны для  $x = L/10$ :

1 — без учета ангармонизма,  $B = 0$ ; 2, 3 — при  $B = 1$  и  $5\%$ ;  $a/L = 0,2$ ;  $x_0/L = 0,25$ ;  $x/L = 0,1$ ;  $N = 32$ ;  $Q = 500$

### Ангармонизм обертонов

Теоретическими и экспериментальными исследованиями [3, 5] установлено, что квазипериодический сигнал (2) в виде совокупности множества одновременно присутствующих колебаний с собственными частотами  $f_n$  и сравнимыми по уровню амплитудами воспринимается измерительной системой (например базиллярной мембраной слухового аппарата человека для слышимых звуков или смесительным входным каскадом анализатора спектра для высокочастотных сигналов) как ангармонический процесс. Применительно к колебаниям струны в [6] показано, что значения частот  $f_n$ , соответствующих максимумам спектральной плотности мощности на высших обертонах, прогрессивно меняются с увеличением номера, а аппроксимирующее выражение для гладкой (без навивки) струны имеет вид

$$f_n = n f_1 \sqrt{1 + B n^2}, \quad (3)$$

где  $B = \pi^3 d^4 E / (128 \cdot T L^2)$  — параметр ангармонизма, численное значение которого определяется диаметром струны  $d$ , относительным модулем упругости  $E$  и натяжением  $T$ , а также конструкцией.

Ангармонизм обертонов появляется благодаря зависимости фазовой скорости изгибных колебаний от частоты (дисперсии фазовой скорости) в рассматриваемой сверхширокополосной системе. Из-за значительного количества одновременно существующих высших гармоник сопоставимого уровня небольшие по абсолютной величине значения параметра  $B$  приводят к вариации частоты обертона с высоким номером  $n$  так, что форма суммарного колебания приобретает свойства сигнала с частотной модуляцией.

На рис. 2 при помощи преобразования Фурье (2) построен пример амплитудного спектра суммарного колебания  $A(f)/A_{\text{сум}}$ , где  $A_{\text{сум}}$  — нормирующий множитель.

Данные графика показывают, что спектр колебания с ангармонизмом обертонов носит дискретный (линейчатый) характер, причем значения частоты, соответствующие максимумам спектральной плотности мощности (СПМ) обертонов, прогрессивно смещаются по отношению к значениям  $n f_1$ , где  $n$  — целое число натурального ряда. Немонотонность зависимости максимумов СПМ обертонов объясняется влиянием амплитудного множителя в (2), определяющегося выбором точки начального возбуждения  $x_0 = 0,25L$ .

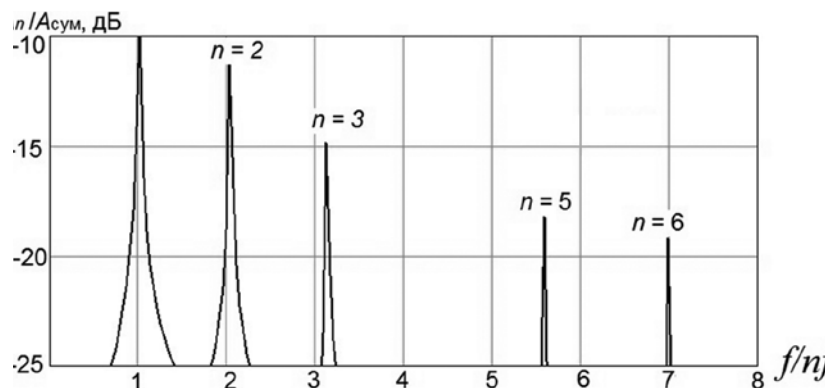


Рис. 2. Амплитудный спектр колебания струны с учетом ангармонизма обертонов при  $B = 1\%$

Ангармонизм обертонов оказывает существенное влияние на форму колебаний. На рис. 1 функции  $y(t, x)$  для указанных там значений  $B$  показаны пунктирной линией 2 и тонкой сплошной линией 3. На протяжении процесса затухания происходит повышение высоты тона (увеличение частоты), а исходная несинусоидальная форма колебания приближается к гармонической.

В рассмотренной системе возможны незатухающие колебания, например при непрерывном возбуждении струны в точке с координатой  $x_0/L$  при помощи смычка [5]. В (2) в этом случае следует принять  $Q \rightarrow \infty$ . На рис. 3 при различных значениях  $B$  изображены варианты осциллограммы незатухающего колебания, возникающего в струне при ее непрерывном возбуждении.

Анализ рисунка 3 показал, что ангармонизм обертонов в незатухающем колебании приводит к периодическим вариациям его формы. Причиной этого служит появление стоячей волны из-за встречных волн фазы, огибающей вдоль распределенной колебательной системы от одного закрепленного конца до другого и обратно.

### Измерение параметров колебаний струны

Достоверность выявленных особенностей почти периодических сигналов несинусоидальной формы

была проверена при помощи анализа профессиональных записей звучания около 100 струн концертных роялей разных производителей. Было установлено, что размах начального отклонения струны от состояния равновесия в процессе затухания уменьшается в 20 раз за время, соответствующее от 200 до 2000 периодов основного тона, в зависимости от значения частоты основного тона  $f_1$  и конструкции, что сопоставимо со скоростью затухания собственных колебаний в узкополосных радиотехнических СВЧ-резонаторах с эквивалентной добротностью порядка нескольких тысяч.

Известны различные варианты получения количественной оценки значения параметра ангармонизма колебаний в распределенных колебательных системах [6, 7]. Использован метод модифицированного кепстрального преобразования. При отсутствии ангармонизма обертонов ( $B = 0$ ) спектр мощности периодического сигнала несинусоидальной формы имеет линейчатый вид, причем интервал по частоте между соседними обертонами постоянный. Известное [8] кепстральное преобразование  $C(q)$  выявляет периодичность огибающей спектра мощности, создавая в области частот  $q$  (независимой переменной спектра, измеряемой в единицах времени) узкие пики, обозначающие выявленную периодичность спектра. На рис. 4, где по оси абсцисс отложены значения периода

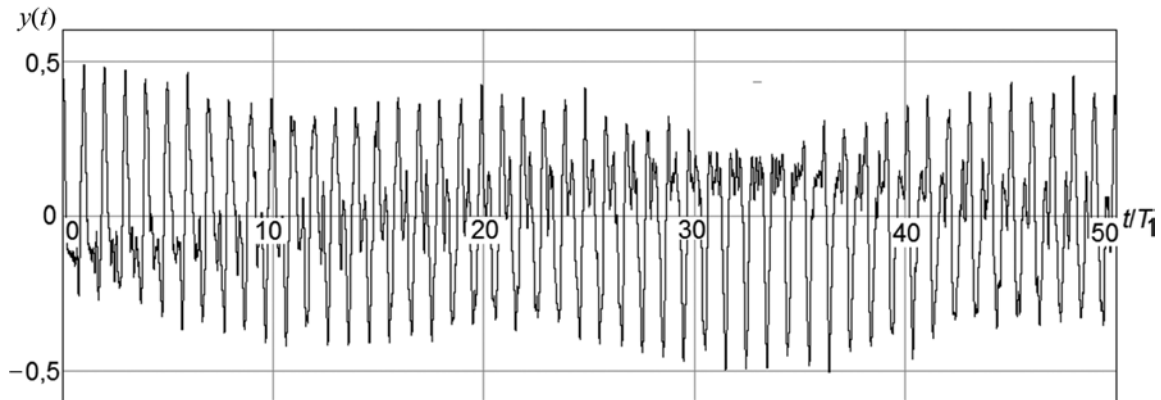


Рис. 3. Форма незатухающих колебаний струны при  $B = 0,5\%$

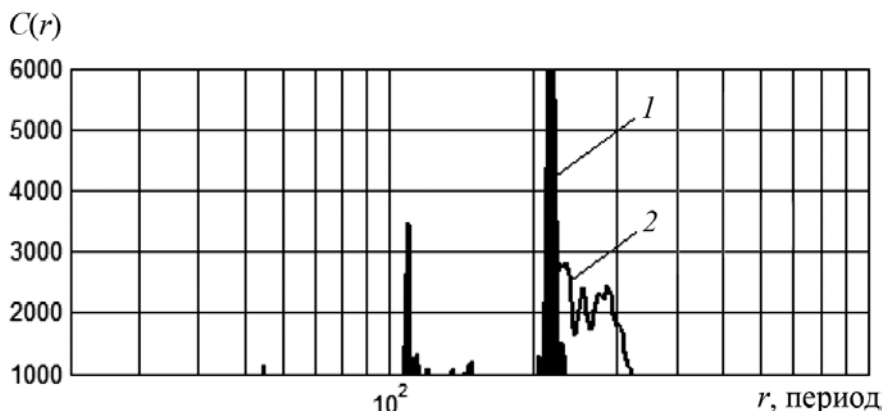


Рис. 4. Пример инвертированного в область периода  $r = 1/q$  для колебания без ангармонизма обертонов (1) и спектра того же сигнала с ангармонизмом  $B = 0,05\%$  (2)

$r = 1/q$ , обратного частоте, указанные пики показаны линиями 1. Если интервал по частоте между соседними обертонами непостоянный, что соответствует проявлению ангармонизма ( $B > 0$ ), то указанные пики уширяются, образуя зоны, показанные на рис. 4 линиями 2. Ширина данных зон пропорциональна девиации текущей частоты суммарного колебания, т. е. значению параметра ангармонизма  $B$ .

Ограниченность временного интервала, на котором анализируется исходный сигнал, а также неравномерность огибающей высших обертонов в области частоты, приводят к большим погрешностям определения неизвестного априорно значения параметра ангармонизма по ширине пика в области частот. В связи с этим типовой алгоритм кепстрального преобразования был модифицирован введением обратного по отношению к (3) компенсирующего предсказания частотной оси после спектрального преобразования, при котором ширина кепстрального пика становилась минимальной, а его высота принимала максимальное значение, как показано на рис. 4 линией 1. Автоматизированный подбор оптимального значения параметра предсказания  $B_1$  обеспечивал измерение априорно неизвестного значения  $B = -B_1$  для анализируемой записи сигнала. Результаты оценки параметра ангармонизма  $B$  для струн концертного рояля показаны на рис. 5.

Анализ графиков рис. 5 показал, что значения параметра ангармонизма существенно определяются конструкцией и погонной массой струн: для группы массивных обвитых струн с частотой основного тона  $f_1$  в интервале 50...300 Гц они меньше, чем для гладких струн с  $f_1 > 300$  Гц. Тренд линейной зависимости  $B(f_1)$  на графике с двойной логарифмической шкалой по осям свидетельствует о фундаментальности дисперсионных свойств такой колебательной системы.

### Синтез колебаний с ангармонизмом обертонов

Результаты исследования ангармонизма обертонов могут быть использованы для повышения качества

электронных синтезаторов квазипериодических сигналов, приближая структуру колебания и звучание музыкального синтезатора к получаемым в дорогостоящих натуральных инструментах [9, 10].

На кафедре формирования и обработки радиосигналов НИУ «МЭИ» разработана и внедрена в учебный процесс лабораторная работа по характеристикам квазипериодических сигналов несинусоидальной формы, которая знакомит учащихся с характеристиками квазипериодических колебаний несинусоидальной формы, возникающих в распределенных колебательных системах с высокой стабильностью параметров и показывает возможности выявления скрытых параметров при помощи модифицированного кепстрального анализа.

### Заключение

Известны различные акустоэлектронные и сверхвысокочастотные распределенные системы, в которых возникают квазипериодические колебания несинусоидальной формы с высокой стабильностью частоты повторения. Рассмотренные свойства этих колебаний проявляются в различных приложениях распределенных акустоэлектронных и радиотехнических систем. Метод модифицированного кепстрального преобразования пригоден для повышения качества электронных синтезаторов сигналов, а также для идентификации источника колебаний с ангармонизмом обертонов.

### Литература

1. Бахматов К.Б., Белов Л.А. Анализ сигнала струн с электромагнитным звуконосителем // Вестник МЭИ. 1996. № 2. С. 9—13.
2. Fletcher N.H., Rossing T.D. The Physics of Musical Instruments. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.
3. Сорокин Б.П. и др. Исследования многочастотных СВЧ акустических резонаторов на основе слоистой пьезоэлектрической структуры // Акустический журнал. 2015. Т. 61. № 4. С. 464—476.

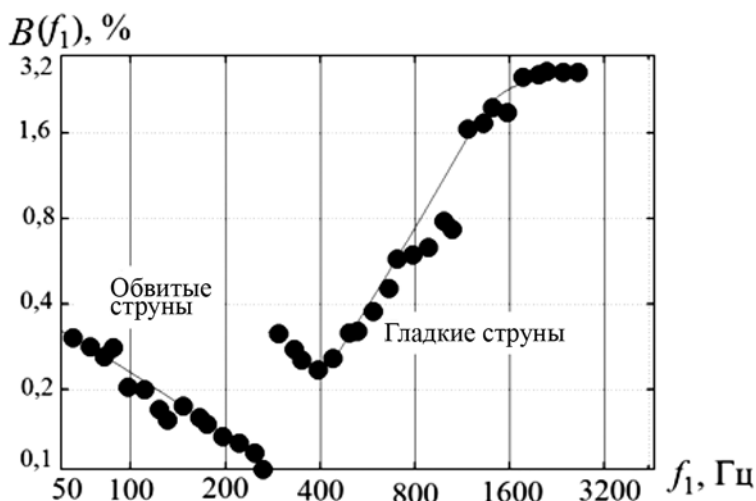


Рис. 5. Измеренная зависимость значения параметра ангармонизма  $B(f_1)$  от частоты основного тона  $f_1$  для струн концертного рояля

4. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955.

5. Математические и физические аспекты теории музыки / пер. с англ. под ред. А.В. Борисова, Е.В. Овчинникова. М.: Институт компьютерных исследований, 2013.

6. Аскенфелд А., Галембо А. Исследование спектральной негармоничности музыкального звука с помощью алгоритмов экстракции высоты // Акустический журнал. 2000. Т. 46. Вып. 2. С. 157—169.

7. Rigaud F., David B., Daudet L. A Parametric Model and Estimation Techniques for the Inharmonicity and Tuning of the Piano // J. Acoust. Society of America. 2013. V. 133. No. 5. Pp. 3107—3118.

8. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2012.

9. Семенов Н.С., Белов Л.А. Спектральный метод синтеза многооктавных сигналов звукового диапазона // Современные информационные и электронные технологии: Труды 15 Междунар. науч.-практ. конф. Одесса (Украина). 2014. Т. 1. С. 36—37.

10. Белов Л.А., Семенов Н.С. Ангармонизм обертонов в сверхширокополосных квазипериодических сигналах // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2016. № 4 (24). С. 26—33.

---

## References

1. Bakhmatov K.B., Belov L.A. Analiz Signala Struny s Elektromagnitnym Zvukosnimatelem. Vestnik MPEI. 1996;2:9—13. (in Russian).

2. Fletcher N.H., Rossing T.D. The Physics of Musical Instruments. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.

3. Sorokin B.P. i dr. Issledovaniya Mnogochastotnykh SVCH Akusticheskikh Rezonatorov na Osnove Sloistoy P'ezoelektricheskoy Struktury. Akusticheskiy Zhurnal. 2015; 61;4:464—476. (in Russian).

4. Strett Dzh. V. (lord Reley). Teoriya Zvuka. T. 1. M.: Gostekhizdat, 1955. (in Russian).

5. Matematicheskie i Fizicheskie Aspekty Teorii Muzyki / Per. s Angl. pod Red. A.V. Borisova, E.V. Ovchinnikova. M.: Institut Komp'yuternykh Issledovaniy, 2013. (in Russian).

6. Askenfeld A., Galembo A. Issledovanie Spektral'noy Negarmonichnosti Muzykal'nogo Zvuka s Pomoshch'yu Algoritmov Ekstraktsii Vysoty. Akusticheskiy Zhurnal. 2000;46;2:157—169. (in Russian).

7. Rigaud F., David B., Daudet L. A Parametric Model and Estimation Techniques for the Inharmonicity and Tuning of the Piano. J. Acoust. Society of America. 2013;133;5:3107—3118.

8. Oppengeym A., SHafer R. Tsifrovaya Obrabotka Signalov. M.: Tekhnosfera, 2012. (in Russian).

9. Semenov N.S., Belov L.A. Spektral'nyy Metod Sinteza Mnogooktavnykh Signalov Zvukovogo Diapazona. Covremennye Informatsionnye i Elektronnye Tekhnologii: Trudy 15 Mezhdunar. Nauch.-prakt. Konf. Odessa (Ukraina). 2014;1:36—37. (in Russian).

10. Belov L.A., Semenov N.S. Angarmonizm Obertopov v Sverkhshirokopolosnykh Kvaziperiodicheskikh Signalakh. Radiotekhnicheskie i Telekommunikatsionnye Sistemy. 2016;4 (24):26—33. (in Russian).

---

## Сведения об авторах

**Белов Леонид Алексеевич** – кандидат технических наук, профессор кафедры формирования и обработки радиосигналов НИУ «МЭИ», e-mail: belovla@gmail.com  
**Семенов Николай Сергеевич** – аспирант кафедры формирования и обработки радиосигналов НИУ «МЭИ», e-mail: semenov\_nick@mail.ru

**Первеева Наталья Сергеевна** – студентка НИУ «МЭИ», e-mail: bootsy-cat@mail.ru

---

## Information about authors

**Belov Leonid A.** – Ph.D. (Techn.), Professor of Formation and Processing of Radio Signals Dept., NRU MPEI, e-mail: belovla@gmail.com

**Semenov Nikolay S.** – Ph.D.-student of Formation and Processing of Radio Signals Dept., NRU MPEI, e-mail: semenov\_nick@mail.ru

**Perveeva Natalia S.** – Student of NRU MPEI, e-mail: bootsy-cat@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 22.02.2017*