УДК 517.925
DOI: 10.24160/1993-6982-2018-4-152-156

О голоморфной регуляризации нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач

В.И. Качалов, М.И. Бесова

Рассмотрен метод решения краевых сингулярно возмущенных задач, основанный на голоморфной регуляризации сингулярных возмущений и позволяющий получать решения этих задач в виде сходящихся в обычном смысле (а не асимптотически) рядов по степеням малого параметра. Первоочередной проблемой, возникающей при решении нелинейных краевых задач, является доказательство существования решения такой задачи на всем отрезке. В этом плане наиболее хорошо разработанным является метод верхних и нижних решений, предложенный Чаплыгиным и Нагумо. При этом каждый исследователь по-своему подходит к построению барьерных функций. В большинстве случаев их нахождение соизмеримо по сложности с построением собственно решения краевой задачи. В любом случае далее следует построение решения в виде асимптотически сходящегося ряда по степеням малого параметра. В представленной работе решение нелинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с краевыми условиями типа Дирихле найдено в виде сходящегося в обычном смысле ряда по степеням малого параметра.

Ключевые слова: тихоновская система, голоморфные интегралы, псевдоголоморфные решения, семейство гомоморфизмов.

Для цитирования: Качалов В.И., Бесова М.И. О голоморфной регуляризации нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач // Вестник МЭИ. 2018. № 4. С. 152—156. DOI: 10.24160/1993-6982-2018-4-152-156.

On Holomorphic Regularization of Nonlinear Singularly Perturbed Boundary Value Problems

V.I. Kachalov, M.I. Besova

The article considers a method for solving singularly perturbed boundary value problems based on holomorphic regularization of singular perturbations, which makes it possible to obtain solutions of these problems in the form of series in powers of a small parameter that converge in the usual sense (rather than asymptotically). The primary challenge encountered in solving nonlinear boundary problems is the need to prove that the solution of this problem exists on the whole interval. In this regard, the method of upper and lower solutions proposed by Chaplygin and Nagumo is the most well-elaborated one. It should be noted that each researcher uses its own approach to constructing barrier functions. In the majority of cases, efforts taken to find them are commensurable in complexity with finding the solution of the boundary value problem itself. In any case, this step is followed by constructing the solution in the form of asymptotically convergent series in powers of a small parameter. In the present study, the solution of a nonlinear singularly perturbed second-order equation with Dirichlet-type boundary conditions is found in the form of a series in powers of a small parameter converging in the usual sense.

Key words: Tikhonov's system, holomorphic integrals, pseudoholomorphic solutions, family of holomorphisms.

For citation: Kachalov V.I., Besova M.I. On Holomorphic Regularization of Nonlinear Singularly Perturbed Boundary Value Problems. MPEI Vestnik. 2018;4:152—156. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2018-4-152-156.

Один из основных методов решения краевых сингулярно возмущенных задач в настоящее время — метод погранфункций Васильевой – Бутузова – Нефедова [1]. Он активно использует подход, основанный на идеях Чаплыгина и Нагумо, краеугольным камнем которых являются понятия верхнего и нижнего решения [2]. Связано это с тем, что, в первую очередь, нужно доказать существование решения краевой задачи на всем отрезке. При использовании метода «стрельбы» это фактически означает доказательство глобальной теоремы существования решения рассматриваемого дифференциального уравнения. Актуальность проблематики, связанной с сингулярно возмущенными задачами, диктуется также и приложениями [4].

Предложен подход, связанный с регуляризацией сингулярно возмущенных задач и являющийся развитием идей С.А. Ломова о существовании при определенных условиях решений задач, представимых сходящимися в обычном смысле рядами по степеням малого параметра. Подобные решения называются псевдоаналитическими (псевдоголоморфными) [4 — 6]. Следует отметить, что алгоритм построения псевдоголоморфного решения фактически обосновывает его существование на всем отрезке задания дифференциального уравнения.

Голоморфные по параметру интегралы сингулярно возмущенных уравнений

Рассмотрим на отрезке [0, 1] краевую задачу

$$\varepsilon y_{xx} = f(x, y, y_x); \quad y(0,\varepsilon) = y(1,\varepsilon) = 0 \tag{1}$$

с малым положительным параметром ε. Сведем уравнение (1) к тихоновской системе

$$\begin{cases} y_x = v; \\ \varepsilon v_x = f(x, y, v);\ y(0,\varepsilon) = y(1,\varepsilon) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

с одной медленной и одной быстрой переменными [1].

От нелинейной системы (2) перейдем к линейному уравнению ее интегралов [7, 8]:

$$\varepsilon LU + f(x, y, v)U_v = 0, \tag{3}$$

где $L = \partial_x + v\partial_y$ — дифференциальный оператор первого порядка в частных производных.

Считая оператор L подчиненным оператору $f\partial_y$, найдем решение (3) в виде регулярного ряда по степеням ε:

$$U(x, y, v, \varepsilon) = U_0(x, y, v) + \varepsilon U_1(x, y, v) + \ldots + \\ +\varepsilon^n U_n(x, y, v) + \ldots. \tag{4}$$

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов имеем серию задач:

$$\begin{aligned} &fU_{0v} = 0; \\ &fU_{1v} = -LU_0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &fU_{nv} = -LU_{n-1}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Прежде чем перейти к решению данных уравнений, наложим условия на данные задачи (1).

Условие (α). Пусть функция $f(x, y, v)$ голоморфна в ограниченной замкнутой области $\bar{\Omega}_{xyv}$ пространства $\mathbb{R}^3$ переменных (x, y, v) и отлична от нуля в некоторой ее подобласти $\tilde{\Omega}_{xyv}$. Их проекции на пространство $\mathbb{R}^2$ переменных (x, y) обозначим через $\bar{\omega}_{xy}$ и $\tilde{\omega}_{xy}$.

В качестве решения первого уравнения серии (5) возьмем произвольную функцию $\varphi(x, y)$, голоморфную на $\bar{\omega}_{xy}$. Обозначим через $\tilde{v}$ значение переменной v при $x = 0$ и потребуем, чтобы $U_n(x, y, \tilde{v}) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &L_k = \partial_x + v_k\partial_y,\ k = 1,\ 2,\ \ldots; \\ &g_k = \frac{1}{f(x, y, v_k)},\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots; \\ &v_0 = v;\ \ h = h(x, y, v); \\ &J_k h = \int_{\tilde{v}}^{v_k} h(x, y, v_{k+1})dv_{k+1},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \end{aligned}$$

Имеем

$$U(x, y, v, \varepsilon) = \varphi - \varepsilon J_0(g_1L_1\varphi) + \varepsilon^2 J_0(g_1L_1J_1(g_2L_2\varphi)) - \\ -\varepsilon^3 J_0(g_1L_1J_1(g_2L_2J_2(g_3L_3\varphi))) + \ldots. \tag{6}$$

Для доказательства сходимости степенного ряда (6) понадобится лемма, решаемая методом математической индукции.

Лемма. *Если в выражении*

$$(b_n(x)(b_{n-1}(x)(\ldots(b_1(x))_x)_x\ldots)_x$$

раскрыть скобки по формуле производной произведения и заменить $b_r^{(s)}(x)$, *где* $1 \le r \le n$, $0 \le s \le n$ *на* $s!$, *то полученная сумма будет равна* $(2n-1)!!$.

Представим коэффициент U_n ряда (6) в следующем виде

$$U_n = (-1)^n(J_0J_1\ldots J_{n-1})[g_1(L_1(g_2(L_2\ldots(g_nL_n\varphi))\ldots)] \tag{7}$$

Здесь

$$(J_0J_1\ldots J_{n-1})[H(x, y, v_1, \ldots, v_n)] = \\ = \int_{\tilde{v}}^{v} dv_1 \int_{\tilde{v}}^{v_1} dv_2 \ldots \int_{\tilde{v}}^{v_{n-1}} H(x, y, v_1, \ldots, v_n)dv_n.$$

Для оценки модуля U_n воспользуемся тем, что она диктуется не переменными, а порядком производных. Поэтому, для использования леммы, заменим в операторе $L_k = \partial_x + v_k\partial_y$ переменные x и y на одну переменную t: $L_k = (v_k + 1)\partial_t$. Поскольку функции $u(x, y)$ и $1/f(x, y, v)$ являются голоморфными на компактах, то на них $\exists C > 0 : |g_k^{(s)}| \le C^s s!,\ \ |\varphi^{(s)}| \le C^s s!$.

Если $|v| \le M$, то на любом компакте из $\tilde{\Omega}_{xyv}$.

$$|U_n| \le \left| \int_{\tilde{v}}^{v} (v_1+1)dv_1 \int_{\tilde{v}}^{v_1} (v_2+1)dv_2 \ldots \int_{\tilde{v}}^{v_{n-1}} (v_{n+1}+1)dv_n \right| \times$$

$$\times C^n (2n-1)!!$$

или

$$|U_n| \le \frac{C^n (M+1)^n (2M)^n (2n-1)!!}{n!},$$

поскольку

$$\int_{\tilde{v}}^{v} dv_1 \int_{\tilde{v}}^{v_1} dv_2 \ldots \int_{\tilde{v}}^{v_{n-1}} dv_n = \frac{(v-\tilde{v})^n}{n!}.$$

При этом константы C и M зависят от компакта.

Сходимость ряда (6) в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$ (зависящей от компакта) следует из признака Даламбера.

Полагая последовательно функцию $\varphi(x, y)$ быть равной сначала x, а затем y, получим два независимых интеграла системы (2). С другой стороны, поскольку φ входит в равенство (6) линейным образом, то на $U(x, y, v, \varepsilon)$ при каждом фиксированном достаточно малом ε можно смотреть как на образ некоторого линейного оператора:

$$U(x, y, v, \varepsilon) = A_f^{\varepsilon}[\varphi].$$

Обозначим через $\mathcal{A}(\overline{\omega}_{xy})$ алгебру функций переменных x и y, голоморфных на компакте $\overline{\omega}_{xy}$, а через $\mathcal{A}(\tilde{\Omega}_{xyv})$ — алгебру функций трех переменных x, y и v, голоморфных в области $\tilde{\Omega}_{xyv}$.

Теорема 1 *Отображения* $\{A_f^{\varepsilon}\}$ *образуют голоморфное в точке* $\varepsilon = 0$ *семейство гомоморфизмов алгебры* $\mathcal{A}(\overline{\omega}_{xy})$ *в алгебру* $\mathcal{A}(\tilde{\Omega}_{xyv})$.

Доказательство. Установим коммутационное соотношение для оператора A_f^{ε}. Поскольку при любой $\varphi(x, y)$ функция $U(x, y, v, \varepsilon)$ является интегралом системы (2), то существует функция Φ двух переменных такая, что

$$A_f^{\varepsilon}[\varphi] = \Phi(A_f^{\varepsilon}[x], A_f^{\varepsilon}[y]). \quad (8)$$

Если в левой и правой частях этого равенства положить $v = \tilde{v}$, то $\varphi(x, y) = \Phi(x, y)$, т.е. равенство (8) можно представить в виде коммутационного соотношения:

$$A_f^{\varepsilon}[\varphi(x, y)] = \varphi(A_f^{\varepsilon}[x], A_f^{\varepsilon}[y]). \quad (9)$$

Имеем

$$A_f^{\varepsilon}[\varphi_1\varphi_2] = (\varphi_1\varphi_2)(A_f^{\varepsilon}[x], A_f^{\varepsilon}[y]) =$$
$$= \varphi_1(A_f^{\varepsilon}[x], A_f^{\varepsilon}[y])\varphi_2(A_f^{\varepsilon}[x], A_f^{\varepsilon}[y]) =$$
$$= A_f^{\varepsilon}[\varphi_1]A_f^{\varepsilon}[\varphi_2].$$

Теорема доказана.

Псевдоголоморфные решения краевых задач

Определение. Решение $y(x, \varepsilon)$ краевой задачи (1) называется псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$, если существует функция $Y(x, \eta, \varepsilon)$, голоморфная по третьей переменной в точке $\varepsilon = 0$ при каждом $x \in [0, 1]$ и каждом η из некоторого неограниченного множества T, такая, что для некоторой голоморфной на отрезке [0, 1] функции $\varphi(x)$ выполняется равенство

$$y(x, \varepsilon) = Y\left(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \forall x \in [0, 1], \quad (9)$$

когда ε принадлежит достаточно малой окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Вернемся к системе (2). Пусть $\hat{v}(x, y)$ — корень уравнения $f(x, y, v) = 0$ и $\hat{y}(x)$ — решение задачи Коши

$$y_x = \hat{v}(x, y), \quad y(0) = 0. \quad (10)$$

Предположим также, что поверхность Λ, определяемая уравнением $f(x, y, v) = 0$, является замкнутой, содержится в Ω_{xyv} и охватывает достаточно большую область пространства $\mathbb{R}^3$, включающую в себя отрезок [0, 1]. Назовем это условием (β).

Теорема 2. *Пусть голоморфная на отрезке* [0, 1] *функция* $\varphi(x)$ *такова, что* $\varphi(0) = 0$ *и уравнение*

$$\varphi_x \int_{\tilde{v}}^{v} \frac{dv_1}{f(x, \hat{y}(x), v_1)} = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon} \quad (11)$$

имеет решение вида

$$v = V_0\left(x, \Psi\left(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right), \tilde{v}\right), \quad (12)$$

в котором $q = \Psi(\eta)$ — *целая функция с асимптотическим значением, равным* a, *функцией* $V_0(x, q, \tilde{v})$, *голоморфной на множестве* $\Pi = [0, 1] \times Q \times G$, *где* Q, G — *отрезки, причем* Q *содержит точки* Ψ_0 *и* a. *Тогда решение* $y(x, \varepsilon)$ *краевой задачи* (1) *является псевдоголоморфным в точке* $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Нужно доказать, что при любом $\tilde{v} \in G$ на всем отрезке [0, 1] существует решение задачи Коши

$$\varepsilon y_{xx} = f(x, y, y_x); \quad y(0, \varepsilon) = 0; \quad y_x(0, \varepsilon) = \tilde{v} \quad (13)$$

при достаточно малых положительных значениях параметра ε.

Запишем интегралы соответствующей (13) системы:

$$\begin{cases} \tilde{U}^{[1]}(x, y, v, \tilde{v}, \varepsilon) = \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}; \\ y = \hat{y}(x) + \varepsilon \tilde{U}^{[2]}(x, y, v, \tilde{v}, \varepsilon), \end{cases} \quad (14)$$

где

$$\tilde{U}^{[1]}(x, y, v, \tilde{v}, \varepsilon) = J_0(g_1\varphi_x) - \varepsilon J_0(g_1 L_1 J_1(g_2\varphi_x)) +$$
$$+ \varepsilon^2 J_0(g_1 L_1 J_1(g_2 L_2 J_2(g_3\varphi_x))) - \ldots; \quad (15)$$

$$\tilde{U}^{[2]}(x,y,v,\tilde{v},\varepsilon)=J_0(g_1(v_1-\hat{y}_x))-$$
$$-\varepsilon J_0(g_1 L_1 J_1(g_2(v_2-\hat{y}_x)))+\dots. \qquad (16)$$

Вычислим значения функции Ψ от левой и правой частей первого из уравнений (14):

$$\Psi(\tilde{U}^{[1]}(x,y,v,\tilde{v},\varepsilon))=\Psi\left(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right).$$

Обозначим правую часть получившегося равенства через q и в левой части выделим главный член:

$$\begin{cases}\Psi(J_0(g_1\varphi_x))+\varepsilon F(x,y,v,\tilde{v},\varepsilon)=q;\\ y=\hat{y}(x)+\varepsilon\tilde{U}^{[2]}(x,y,v,\tilde{v},\varepsilon).\end{cases} \qquad (17)$$

Возьмем $a_0 > a$ очень близким к a и в предположении, что $a < \Psi(0)$, построим параллелепипед $\Pi_0 = [0, 1]\times[a_0, \Psi(0)]\times G$. Поскольку $V_0(x, q, \tilde{v})$ голоморфна на замкнутом прямоугольнике Π, то оценка ее модуля не зависит от a_0.

Очевидно, что для системы (17) выполнены все условия теоремы о неявной функции на параллелепипеде Π_0 и при $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases}v=V_0\left(x,q,\tilde{v}\right);\\ y=\hat{y}(x).\end{cases} \qquad (18)$$

Следовательно, в некоторой окрестности $\sigma_{xq\tilde{v}}$ каждой точки $(x, q, \tilde{v}) \in \Pi_0$ существует решение

$$\begin{cases}v=V(x,q,\tilde{v},\varepsilon);\\ y=Y(x,q,\tilde{v},\varepsilon)\end{cases} \qquad (19)$$

системы (17), голоморфное в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$. Выберем из покрытия $\{\sigma_{xq\tilde{v}}\}$ параллелепипеда Π_0 конечное подпокрытие $\{\sigma_{xq\tilde{v}}\}_1^N$, тогда функции (19) будут голоморфными, равномерно распределенными на этом параллелепипеде в наименьшей окрестности $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, соответствующей конечному подпокрытию. Обозначим через $\tilde{\Pi}_0$ проекцию параллелепипеда Π_0 на координатную плоскость переменных (x, q). Пусть величина параметра ε в (1) удовлетворяет неравенству $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ и кривая $\Gamma:\ q=\Psi\left(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)$ целиком принадлежит прямоугольнику $\tilde{\Pi}_0$. Тогда решение $(y(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon))$ системы (2) представимо в виде рядов:

$$\begin{cases}y(x,\varepsilon)=\hat{y}_0(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}Y_n\left(x,\Psi\left(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right),\tilde{v}\right)\varepsilon^n;\\ v(x,\varepsilon)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}V_n\left(x,\Psi\left(\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right),\tilde{v}\right)\varepsilon^n,\end{cases} \qquad (20)$$

которые сходятся равномерно на [0, 1].

Если же прямоугольнику $\tilde{\Pi}_0$ принадлежит только часть кривой Γ, соответствующая $x \in [0, x_1]$ $(0 < x_1 < 1)$, то ряды (20) сходятся равномерно на $[0, x_1]$. Обозначим это решение через $(y^{[0]}(x, \varepsilon), v^{[0]}(x, \varepsilon))$. В этом случае решение $(y^{[0]}(x, \varepsilon), v^{[0]}(x, \varepsilon))$ нужно продолжить вправо. Для этого необходимо решить следующую задачу Коши

$$\begin{cases}y_x^{[1]}=v^{[1]};\\ \varepsilon v_x^{[1]}=f(x,y^{[1]},v^{[1]});\end{cases}$$
$$y^{[1]}(x_1,\varepsilon)=y^{[0]}(x_1,\varepsilon);\quad v^{[1]}(x_1,\varepsilon)=v^{[0]}(x_1,\varepsilon).$$

Запишем систему, аналогичную (14):

$$\begin{cases}\tilde{U}_1(x,y^{[1]},v^{[1]},v(x_1,\varepsilon),\varepsilon)=\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{\varepsilon};\\ y=\hat{y}(u)+\varepsilon\tilde{U}^{[2]}(x,y^{[1]},v^{[1]},v(x_1,\varepsilon),\varepsilon).\end{cases}$$

Из нее определим $(y^{[1]}(x, \varepsilon), v^{[1]}(x, \varepsilon))$. В результате $y^{[0]}(x, \varepsilon)$ продолжится на некоторый отрезок $[x_1, x_2]$, причем псевдоголоморфным образом.

Рассмотрим частный случай, когда $\varphi_x < 0$ $\forall x \in [0, 1]$ и $\Psi_\eta > 0$. Пусть $\Psi(\eta_0) = a_0$, тогда

$$\frac{\varphi(x_1)}{\varepsilon}=\eta_0,\ \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{\varepsilon}=\eta_0,\dots,\frac{\varphi(x_p)-\varphi(x_{p-1})}{\varepsilon}=\eta_0.$$

По формуле Лагранжа $\varphi_x(\tilde{x}_p)(x_p-x_{p-1})=\varepsilon\eta_0$, $\tilde{x}_p\in(x_{p-1},x_p)$. Поскольку $\varphi(x)$ голоморфна на отрезке [0, 1], то $|\varphi_x| \le l$ $\forall x \in [0, 1]$ для некоторой константы l, поэтому

$$x_p-x_{p-1}\ge\frac{\varepsilon\eta_0}{l},\quad p=\overline{1,I},$$

а, значит достичь точки $x = 1$ можно за конечное число шагов. В итоге получится псевдоголоморфное продолжение решения на весь отрезок [0, 1] и под решением начальной задачи (13) будем понимать совокупность элементов $(y^{[0]}(x, \varepsilon), y^{[1]}(x, \varepsilon), \dots, y^{[I]}(x, \varepsilon))$. Ясно, что каждый из элементов зависит от $\tilde{v}$, поэтому

$$y^{[I]}(x,\varepsilon)=W^{[I]}\left(x,\frac{\varphi(x)-\varphi(x_{I-1})}{\varepsilon},\tilde{v}\right),$$

откуда вытекает уравнение для определения $\tilde{v}$:

$$W^{[I]}\left(1,\frac{\varphi(1)-\varphi(x_{I-1})}{\varepsilon},\tilde{v}\right)=0.$$

Одно из найденных значений $\tilde{v}$ подставим в выражения для $y^{[p]}(x, \varepsilon)$, $(p=\overline{1,I})$ и получим решение краевой задачи (1).

Приведем пример нахождения $y^{[0]}(x, \varepsilon)$, удовлетворяющего краевым условиям. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y_{xx}=x^2+y^2+y_x^2-4,\quad y(0)=y(1)=0,$$

которая сводится к следующей системе:

$$\begin{cases}y_x=v;\\ \varepsilon v_x=x^2+y^2+v^2-4,\ y(0,\varepsilon)=y(1,\varepsilon)=0.\end{cases}$$

Здесь поверхность Λ представляет собой сферу радиуса 2 с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^3$ переменных (x, y, v). В итоге имеем:

$$y^{[0]}(x,\varepsilon) = \hat{y}(x) + \varepsilon \ln \frac{2\sqrt{4-x^2-\hat{y}^2(x)}}{\sqrt{3-\hat{y}^2(1)}\,\mathrm{th}\frac{\hat{y}(1)}{2\varepsilon} + \sqrt{4-x^2-\hat{y}^2(x)} - \left(\sqrt{3-\hat{y}^2(1)}\,\mathrm{th}\frac{\hat{y}(1)}{2\varepsilon} - \sqrt{4-x^2-\hat{y}^2(x)}\right)e^{2\hat{y}(x)/\varepsilon}},$$

где $\hat{y}(x)$ — решение предельной задачи

$$y_x = \sqrt{4-x^2-y^2}, \quad y(0) = 0.$$

Литература

1. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

2. **Чанг К., Хауэс Ф.** Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложение. М.: Мир, 1988.

3. **Розов Н.Х., Колесов А.Ю., Глызин С.Д.** Теория неклассических релаксационных колебаний в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // Математический сборник. 2014. Т. 205. № 6. С. 21—86.

4. **Ломов С.А., Ломов И.С.** Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.

5. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

6. **Качалов В.И., Ломов С.А.** Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач // Доклады РАН. 1994. Т. 334. № 6. С. 694—695.

7. **Качалов В.И.** Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач // Вестник МЭИ. 2010. № 6. С. 54—62.

8. **Качалов В.И.** О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 4. С. 64—71.

References

1. **Vasil'eva A.B., Butuzov V.F.** Asimptoticheskie Metody v teorii Singulyarnyh Vozmushcheniy. M.: Vysshaya shkola, 1990. (in Russian).

2. **Chang K., Haues F.** Nelineynye Singulyarno Vozmushchennye Kraevye Zadachi. Teoriya i Prilozhenie. M.: Mir, 1988. (in Russian).

3. **Rozov N.H., Kolesov A.Yu., Glyzin S.D.** Teoriya Neklassicheskih Relaksatsionnyh Kolebaniy v Singulyarno Vozmushchennyh Sistemah s Zapazdyvaniem. Matematicheskiy Sbornik. 2014;205;6:21—86. (in Russian).

4. **Lomov S.A., Lomov I.S.** Osnovy Matematicheskoy Teorii Pogranichnogo Sloya. M.: Izd-vo MGU, 2011. (in Russian).

5. **Lomov S.A.** Vvedenie v Obshchuyu Teoriyu Singulyarnyh Vozmushcheniy. M.: Nauka, 1981. (in Russian).

6. **Kachalov V.I., Lomov S.A.** Psevdoanaliticheskie Resheniya Singulyarno Vozmushchennyh Zadach. Doklady RAN. 1994;334;6:694—695. (in Russian).

7. **Kachalov V.I.** Golomorfnaya Regulyarizatsiya SinguLyarno Vozmushchennyh Zadach. Vestnik MPEI. 2010;6:54—62. (in Russian).

8. **Kachalov V.I.** O Golomorfnoy Regulyarizatsii Singulyarno Vozmushchennyh Sistem Differentsial'nyh Uravneniy. Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki. 2017;57;4:64—71. (in Russian).

Сведения об авторах

Качалов Василий Иванович — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: Kachalovvi@mpei.ru

Бесова Маргарита Ильинична — ассистент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: besova.margarita@ya.ru

Information about authors

Kachalov Vasiliy I. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: Kachalovvi@mpei.ru

Besova Margarita I. — Assistant of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: besova.margarita@ya.ru

Статья поступила в редакцию 26.06.2017