

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ (05.13.18)

УДК 519.217:621.891.001.1

DOI: 10.24160/1993-6982-2019-1-114-123

## Марковский подход к построению моделей взаимодействия шероховатых поверхностей

Ю.А. Горицкий, К.В. Гаврилов, И.А. Мигаль

Взаимодействие шероховатых поверхностей определяет многие процессы в электротехнике, теплотехнике, машиностроении, автомобильной промышленности, двигателестроении и других отраслях. Рельеф шероховатой поверхности представляет случайную по пространству функцию. Показано, что изменение шероховатых поверхностей в ходе их контактного взаимодействия можно анализировать с помощью теории марковских процессов. В рамках существующих моделей эта задача не решается.

Предложен подход, при котором каждая из двух поверхностей представляется совокупностью выступов. Каждый выступ описывается своим случайным состоянием (совокупностью выбираемых параметров), а каждая поверхность — распределением вероятностей на множестве состояний. При взаимном движении поверхностей происходит взаимодействие выступов, и его результат для двух выступов выглядит как известная двумерная функция взаимодействия. Состояние фиксированного выступа в следующий момент определяется предыдущим состоянием и случайным воздействием выступа другой поверхности. Если воздействия независимы, то процесс изменения состояния можно считать марковским.

Для распределения вероятностей справедлив рекуррентный пересчет во времени. Пересчитывая распределения, получим изменяющиеся во времени распределения, по которым найдем нужные характеристики взаимодействия, такие как средняя площадь контакта и высота выступов, сила трения, износ и др. Выбирая различные варианты того, что есть состояние выступа и что есть функция взаимодействия, получим модели различной сложности и различной точности.

Идея сведения к марковской модели показана на простой дискретной схеме и обобщена. Подход применяется к анализу процесса трения, режиму усталостного разрушения с учетом смазки, возникающему в результате многократного контакта выступов. Приведен расчетный пример эволюции поверхностей, разделенных слоем смазки. Оценены технические характеристики, как функции пути трения и нагрузки.

*Ключевые слова:* взаимодействие выступов, распределение состояний, марковский процесс, рекуррентный пересчет распределений, уравнение Колмогорова–Феллера, режим усталостного разрушения, шероховатые поверхности.

*Для цитирования:* Горицкий Ю.А., Гаврилов К.В., Мигаль И.А. Марковский подход к построению моделей взаимодействия шероховатых поверхностей // Вестник МЭИ. 2019. № 1. С. 114—123. DOI: 10.24160/1993-6982-2019-1-114-123.

## Markov Approach to Constructing Rough Surfaces Interaction Models

Yu.A. Goritsky, K.V. GavriloV, I.A. Migal'

Interaction of rough surfaces determines many processes in electrical engineering, thermal engineering, machinery construction, motor vehicle industry, engine technology, and other industries. Rough surface relief is a space random function. It is shown that the change in rough surfaces that occurs during their contact interaction can be analyzed using the theory of Markov processes. Noteworthy is that this problem is not solved within the framework of existing models.

An approach in which each of two surfaces is represented by a set of protrusions is proposed. Each protrusion is described by its random state (a set of selected parameters), and each surface is described by a probability distribution in the set of states. When the surfaces move with respect to each other, the protrusions interact with one another, and the result of this interaction for two protrusions looks as a known two-dimensional function of interaction. The state of a fixed protrusion in the next moment is determined by its previous state and a random effect of the protrusion on the other surface. If these effects are independent, the state alteration process can be considered to be a Markovian.

Recurrent recalculation in time is valid for probability distributions. Recalculating the distributions, we obtain time-varying distributions, from which the desired characteristics of interaction are obtained, such as the average contact area, average height of protrusions, friction force, wear, etc. Choosing different options of what is understood to mean the protrusion state and the interaction function, the models of different complexity and precision are obtained.

The idea of bringing the interaction to a Markov model is illustrated on a simple discrete scheme with subsequently generalizing it. The approach is applied to analyzing a friction process and a fatigue failure (taking lubrication into account) that results from the protrusions repeatedly coming

in contact with one another. An example of numerically analyzing the evolution of surfaces separated by a lubricant layer is given. The technical characteristics as functions of friction path and load are estimated.

*Key words:* interaction of protrusions, distribution of states, Markov process, recurrent recalculation of distributions, Kolmogorov–Feller equation, fatigue failure mode, rough surfaces.

*For citation:* Goritsky Yu.A., Gavrilov K.V., Migal' I.A. Markov Approach to Constructing Rough Surfaces Interaction Model. MPEI Vestnik. 2019;1:114—123. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2019-1-114-123.

## Введение

Взаимодействие шероховатых поверхностей определяет многие процессы в электро-, теплотехнике (при передаче электрической и тепловой энергии через подвижные и неподвижные контакты), машиностроении, автомобильной промышленности, двигателестроении (в процессах контактного взаимодействия, трения, смазки и износа) и многих других отраслях, определяющих работоспособность и ресурс основных трибосопряжений узлов и агрегатов [1 — 4].

Цель статьи состоит в том, чтобы показать, что изменение шероховатых поверхностей в ходе их контактного взаимодействия можно анализировать с помощью теории марковских процессов.

Характеристики взаимодействия зависят, в первую очередь, от микрогеометрии поверхностей, физических характеристик материалов, а также режимных и силовых факторов [5, 6]. Рельеф шероховатой поверхности представляет случайную по пространству функцию. Вопросы взаимодействия контактирующих поверхностей наиболее активно рассматриваются в механике [5, 7, 8] и обусловлены процессами трения и изнашивания. Известно, что процесс взаимодействия — сложный процесс физико-химической и молекулярной механики, и описать его, не прибегая к раз-умным упрощениям, не представляется возможным, поэтому широкое распространение получили различные модели процесса трения [7, 9, 10]. Существующие методы несовершенны, и работа в этом направлении продолжается.

Большинство методов анализа основано на функциях, случайных по пространственному аргументу. Используются гауссовские функции, начиная с [11], а также функции, составленные из выступов определенной формы таким образом, чтобы иметь заданный закон распределения высот. Этот подход впервые предложен в [12]. Анализируются формы выступов в виде столбиков, полусфер, клиньев и т. д. [13, 14]. Важной инженерной задачей является расчет изменения поверхностей в процессе трения и соответствующих характеристик трения. Существующие модели трения эту задачу не решают.

Предложен подход, при котором каждая из двух поверхностей представляется совокупностью выступов. Каждый выступ описывается своим случайным состоянием (совокупностью выбираемых характеристик, например, высотой и радиусом кривизны вершины). Каждая поверхность выглядит распределением вероятностей на множестве состояний. При взаимном движении поверхностей происходит взаимодействие элементарных выступов, и его результат для двух выступов описывается известной двумерной функцией взаимодействия. Состояние фиксиро-

ванного выступа в следующий момент определяется предыдущим состоянием и случайным воздействием выступа другой поверхности. Если воздействия независимы, то процесс изменения состояния можно считать марковским, а его изменение описывается разностными, дифференциальными или интегро-дифференциальными уравнениями (в зависимости от сделанных предположений). Рекуррентно пересчитывая распределения, получим изменяющиеся во времени распределения, по которым определим нужные характеристики взаимодействия. Выбирая различные варианты того, что есть состояние выступа и функция взаимодействия, найдем модели различной сложности и точности. Такой подход к анализу взаимодействия поверхностей (в частности, для трения) в литературе не описывался, исключение составляют работы [15 — 19]. Данная работа развивает и обобщает предыдущие.

Идея сведения к марковской модели показана на простой дискретной схеме. Каждая из поверхностей состоит из выступов, расположенных «стройными рядами» на одинаковом расстоянии друг от друга. Расстояния одинаковы на двух поверхностях, взаимное движение происходит дискретно: сдвиг, взаимодействие, сдвиг, взаимодействие и т. д. Состоянием выступа является его случайная высота, меняющаяся под воздействием выступов другой поверхности. Процесс изменения состояния является цепью Маркова, если возмущения случайны и независимы. Вся поверхность характеризуется распределением вероятностей на множестве высот выступов. Для распределения вероятностей справедлив рекуррентный пересчет во времени. По распределению высот определяют такие характеристики поверхности, как площадь контакта, средняя высота выступов, сила трения, износ и др., так что можно оценивать изменение поверхности во времени и характеристики взаимодействия.

Предполагается, что расположение выступов случайно, характеристики расположения для двух поверхностей различны, взаимное движение непрерывно. Состояние выступа — многомерная случайная величина (высота, радиус кривизны вершины выступа, температура). Состояние меняется под воздействием выступов другой поверхности, причем высота играет особую роль, поскольку выступы взаимодействуют только при условии контакта. При некоторых предположениях процесс изменения состояния считается марковским. Для распределения процесса справедлив рекуррентный пересчет во времени. По распределению можно оценить технические характеристики.

Указанный подход применялся к анализу режима усталостного разрушения, возникающего в результате многократного контакта выступов. Нагрузка предполагалась постоянной. Усталостное разрушение модели-

руется тем, что при контакте выступов с малой вероятностью происходит отрыв частицы, и высота выступа уменьшается на случайную величину.

Приведен расчетный пример эволюции поверхностей (распределений), разделенных слоем смазки. Оценены технические характеристики как функции пути трения и нагрузки и износ коренного вкладыша коленчатого вала дизельного двигателя.

**Простая дискретная модель**

В работе [15] предложена модель изменения поверхности во времени. Поверхность представляется совокупностью выступов со случайными высотами (и с весьма плоскими вершинами), расположенными на расстоянии  $\Delta s$  вдоль линии движения (рис. 1).

Движение — дискретное: за один шаг с интервалом  $\tau = \Delta s/V$  идет продвижение со скоростью  $V$  на один элемент  $\Delta s$  и взаимодействие противоположащих выступов. Высота  $\xi$  выступа нижней поверхности подвергается воздействию движущихся выступов со случайными независимыми высотами  $\eta$  верхней поверхности. Результат  $\xi_k(n+1)$  взаимодействия на шаге  $n+1$  элемента с номером  $k$  зависит от  $\xi_k(n)$  и уровня  $\eta_{k-1}(n)$  соседнего элемента:

$$\xi_k(n+1) = \Phi(\xi_k(n), \eta_{k-1}(n)).$$

Зафиксируем любой элемент с номером  $k$  и упростим запись:

$$\xi_{n+1} = \Phi(\xi_n, \eta_n). \tag{1}$$

Если считать последовательность  $\eta_n, n = 0, 1, 2, \dots$  независимыми случайными величинами, то последовательность  $\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots$  является марковской. Учитывая, что не только верхняя последовательность  $\eta_n$  действует на нижний выступ с высотой  $\xi_n$ , но и на любой фиксированный выступ верхней поверхности с уровнем  $\eta_n$  действует последовательность  $\xi_n$ , то можно для любого элемента верхней поверхности записать аналогично:

$$\eta_{n+1} = \Psi(\eta_n, \xi_n). \tag{2}$$

Функции  $\Phi$  и  $\Psi$  задают механизм взаимодействия двух выступов. Их выбором можно реализовать различные схемы взаимодействия. Эти два общих соотношения определяют марковские последовательности  $\{\eta_n\}$  и  $\{\xi_n\}$  изменения высот и эволюцию соответствующих распределений  $p_n(x)$  и  $q_n(y)$ . Введя дискретизацию по уровню вершин выступов, получим простую цепь Маркова со следующим пересчетом распределений:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \Pi_\xi(q_n, \Phi); \\ q_{n+1} &= q_n \Pi_\eta(p_n, \Psi), \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\Pi_\xi, \Pi_\eta$  — матрицы переходных вероятностей, зависящие от распределений и функций  $\Phi$  и  $\Psi$  преобразования;  $p_n, q_n$  — векторы-строки распределений.

Элементы матриц (вероятности перехода из  $x$  в  $y$ ) в общем виде для  $\xi_n$  в (1) определяют так:

$$\begin{aligned} \pi_{\xi_n}(x, y) &\equiv P\{\xi_{n+1} = y \mid \xi_n = x\} = \\ &= P\{\Phi(x, \eta_n) = y\} = \sum_{z: \Phi(x, z) = y} q_n(z). \end{aligned} \tag{4}$$

Аналогично для  $\eta_n$  в (2):

$$\begin{aligned} \pi_{\eta_n}(x, y) &\equiv P\{\eta_{n+1} = y \mid \eta_n = x\} = \\ &= P\{\Psi(x, \xi_n) = y\} = \sum_{z: \Psi(x, z) = y} p_n(z). \end{aligned} \tag{5}$$

Если предельные распределения  $p^*$  и  $q^*$  существуют, получим их из системы нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} p^* &= p^* \Pi_\xi(q^*, \Phi); \\ q^* &= q^* \Pi_\eta(p^*, \Psi). \end{aligned}$$

Идея проследить эволюцию процесса по схеме (1), (3) была детализирована и реализована в виде моделирующей программы взаимодействия выступов, результаты которой описаны в [15, 16]. Принятые там функции преобразования  $\Phi$  и  $\Psi$  отражают процесс упругих и пласти-

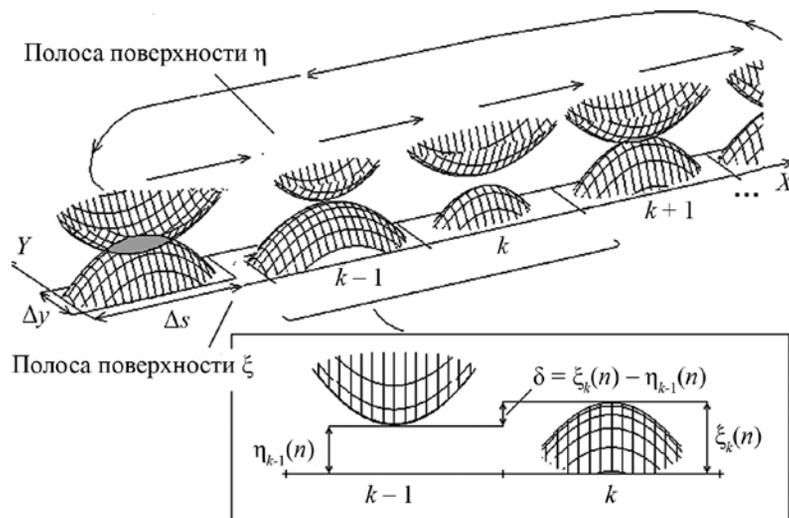


Рис. 1. Модельная поверхность и схема сдвига

ческих деформаций под действием постоянной нагрузки, а также усталостное разрушение. Реализация модели на ЭВМ позволяет по физическим свойствам материалов, характеристикам исходной шероховатости и приложенного нормального давления оценивать во времени характеристики трения. Применение и работоспособность такого подхода продемонстрированы в [17 — 19].

С помощью описываемой модели эволюция распределений наблюдается не имитационным моделированием, а обычным для марковских процессов пересчетом распределений, аналогичным (3).

**Обобщение модели**

Предполагается, что взаимное движение непрерывно, расположение выступов случайно, характеристики расположения для двух поверхностей различны. Состоянием  $\xi$  выступа поверхности (условно нижней) будем считать двумерную случайную величину (размерность ее нетрудно увеличить)

$$\xi = (\xi_1, \xi_2),$$

где  $\xi_1$  — высота;  $\xi_2$  — другой параметр, например, радиус кривизны вершины.

Компонента  $\xi_1$  играет особую роль, поскольку факт взаимодействия выступов определяется их пересечением. Состоянием  $\eta$  выступа на другой (условно верхней) поверхности будем считать аналогично:

$$\eta = (\eta_1, \eta_2).$$

Зафиксируем любой выступ нижней поверхности. Он подвергается воздействию потока движущихся выступов верхней поверхности со случайными расположениями и высотами. Учтем, что взаимодействие выступов (в результате механического контакта) происходит только между самыми высокими выступами, доля которых составляет единицы процентов. Учтем также, что поток выходов случайного процесса за некоторый высокий уровень  $x$  (т. е. когда вероятность превышения уровня  $x$  мала) является приближенно пуассоновским. Эти обстоятельства позволяют принять предположение о том, что поток контактов (взаимодействий) для выступа с уровнем  $\xi_1(t) = x_1$  является пуассоновским, т. е. параметр  $\lambda_\eta(x_1, t)$  потока равен среднему числу событий в единицу времени:

$$\lambda_\eta(x_1, t) = (V/\Delta s_\eta) F_{\eta_1}(x_1, t), \tag{6}$$

где  $\Delta s_\eta$  — среднее расстояние между выступами верхней поверхности;  $V$  — скорость проскальзывания;  $V/\Delta s_\eta$  — количество проходящих выступов за единицу времени;  $F_{\eta_1}(x_1, t)$  — условная вероятность контакта, равная функции распределения случайной величины  $\eta_1(t)$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} P\{\delta(t) = \xi_1(t) - \eta_1(t) > 0 \mid \xi_1(t) = x_1\} = \\ = P\{\eta_1(t) > x_1\} = \int_{-\infty}^{x_1} q_1(z, t) dz = F_{\eta_1}(x_1, t). \end{aligned}$$

Для безусловной вероятности контакта по формуле полной вероятности (с учетом условия  $\eta_1(t) = x_1$ ) получим:

$$\begin{aligned} P\{\delta(t) > 0\} &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{\eta_1}(z, t) p_1(z, t) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} T_{\xi_1}(z, t) q_1(z, t) dz, \end{aligned}$$

где  $p_1(x_1, t)$ ,  $q_1(y_1, t)$  — распределения первых компонент  $\eta_1(t)$  и  $\eta_1(t)$ .

Безусловную вероятность можно вычислить иначе:

$$\begin{aligned} P\{\delta(t) > 0\} &= \int_0^{\infty} p_\delta(z, t) dz = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) q(x - z, t) dx \right] dz, \end{aligned}$$

где  $p_\delta(z, t)$  — распределение  $\delta(t)$ .

Последний интеграл равен

$$\begin{aligned} P\{\delta > 0\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} q(x - z) dz \right] p(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^x q(u) du \right] p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_\eta(x) p(x) dx. \end{aligned}$$

Если моменты контактов  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  пуассоновские и соответствующие состояния  $\eta(t_1), \eta(t_2), \dots, \eta(t_k), \dots$  независимы, то процесс  $\xi(t)$  является двумерным марковским со скачками. Весьма существенно, что моменты контактов определяются только высотами, и, потому, распределениями

$$\begin{aligned} p_1(x_1, t) &= \int p_\xi(x_1, x_2; t) dx_2; \\ q_1(x_1, t) &= \int q_\eta(x_1, x_2; t) dx_2, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $p_\xi(x_1, x_2; t)$ ,  $q_\eta(x_1, x_2; t)$  — распределения двумерных случайных величин  $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$  и  $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$ .

В силу предполагаемой пуассоновости, условная вероятность для выступа с уровнем высоты  $\xi_1(t) = x_1$  получить контакт за малое время  $\Delta t$  равна

$$\lambda_\eta(x_1, t) \Delta t + o(\Delta t).$$

Для  $\xi_1(t + \Delta t)$  при условии  $\xi_1(t) = x_1$  запишем:

$$\begin{aligned} \xi(t + \Delta t) &= \\ &= \xi(t) + \begin{cases} \Delta W_\xi(\xi_t, \eta_t) & \text{с вероятностью } \lambda_\eta(x_1, t) \Delta t + o(\Delta t); \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \lambda_\eta(x_1, t) \Delta t + o(\Delta t), \end{cases} \end{aligned}$$

где  $\xi_t, \eta_t$  — упрощенные обозначения для  $\xi(t), \eta(t)$ ;  $\Delta W(\xi_t, \eta_t)$  — скачкообразное изменение состояния, случайная величина (в нашем случае двумерная, зависящая от результата взаимодействия выступов с состоя-

ниями  $\xi_p, \eta_p$  с распределением  $h(y | x) \equiv h(y_1, y_2 | x_1, x_2)$  перехода из  $x = (x_1, x_2)$  в  $y = (y_1, y_2)$ .

Для марковских процессов со скачками при  $\Delta t \rightarrow 0$  для плотности  $p_\xi(y, t)$  справедливо уравнение Колмогорова–Феллера:

$$\frac{\partial p_\xi(y, t)}{\partial t} = -\lambda_\eta(y, t)p_\xi(y, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_\eta(x, t)p_\xi(x, t)h_\xi(y/x)dx,$$

которое в двумерном случае запишем в виде:

$$\frac{\partial p_\xi(y_1, y_2, t)}{\partial t} = -\lambda_\eta(y_1, t)p_\xi(y_1, y_2, t) + \int \lambda_\eta(x_1, t)p_1(x_1, t) \left[ \int h_\xi(y_1, y_2/x_1, x_2)dx_2 \right] dx_1, \quad (8)$$

где  $p_1(x_1, t)$  вычислим по (7).

Подобные рассуждения можно привести для любого выступа верхней поверхности и записать соотношение, аналогичное (8):

$$\frac{\partial q_\eta(y_1, y_2, t)}{\partial t} = -\lambda_\xi(y_1, t)q_\xi(y_1, y_2, t) + \int \lambda_\xi(x_1, t)q_1(x_1, t) \left[ \int h_\eta(y_1, y_2/x_1, x_2)dx_2 \right] dx_1, \quad (9)$$

где  $q_1(x_1, t)$  определяется по (7), а параметр потока  $\lambda_\xi(y_1, t)$

$$\lambda_\xi(y_1, t) = (V/\Delta s_\xi)T_\xi(x_1, t),$$

где  $\Delta s_\xi$  — среднее расстояние между выступами нижней поверхности;  $T_\xi(x_1, t)$  — вероятность контакта (при условии  $\eta_1(t) = x_1$ ), причем  $1 - T_\xi(x_1, t)$  — функция распределения  $\xi_1(t)$ :

$$T_\xi(x_1, t) = P\{\xi_1(t) > \eta_1(t) | \eta_1(t) = x_1\} = P\{\xi_1(t) > x_1\} = \int_{x_1}^{\infty} p_1(z, t)dz.$$

Однако, поскольку уравнения (8), (9) придется решать численно, перейдем к дискретизации по времени. Рассмотрим значения процесса в дискретных точках с шагом  $\Delta t$ . Пусть  $\Delta t$  настолько малая величина, что вероятностью для любого выступа получить более одного воздействия можно пренебречь. Обозначим  $t_n = n\Delta t$ ,  $\xi_n = \xi(t_n)$ ,  $\eta_n = \eta(t_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . При условии  $\xi_n = x_1$  запишем:

$$\xi_{n+1} = \Phi(\xi_n, \eta_n) = \begin{cases} \Delta W_\xi(\xi_n, \eta_n) & \text{с вероятностью} \\ \lambda_\eta(x_1, t)\Delta t + o(\Delta t); & \\ 0 & \text{с вероятностью} \\ 1 - \lambda_\eta(x_1, t)\Delta t + o(\Delta t). & \end{cases} \quad (10)$$

Аналогично, при условии  $\eta_n = x_1$ :

$$\eta_{n+1} = \Psi(\eta_n, \xi_n) = \begin{cases} \Delta W_\eta(\eta_n, \xi_n) & \text{с вероятностью} \\ \lambda_\xi(x_1, t)\Delta t + o(\Delta t); & \\ 0 & \text{с вероятностью} \\ 1 - \lambda_\xi(x_1, t)\Delta t + o(\Delta t). & \end{cases} \quad (11)$$

Здесь величины  $\xi_n, \eta_n$  и функции  $\Phi, \Psi, \Delta W$  двумерны.

Для последовательности  $\{\xi_n\}$  вероятности перехода определяются (4):

$$\pi_{\xi_n}(x, y) \equiv P\{\xi_{n+1} = y | \xi_n = x\} = P\{\Phi(x, \eta_n) = y\} = \sum_{z: \Phi(x, z) = y} q_n(z), \quad (12)$$

однако размерность входящих обозначений изменилась, а именно:

$$\xi_n = (\xi_{1,n}, \xi_{2,n}); x = (x_1, x_2); \eta_n = (\eta_{1,n}, \eta_{2,n}); y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2). \quad (13)$$

Первая из формул (3) пересчета  $p_{n+1} = p_n \Pi_\xi(q_n, \Phi)$  принимает вид:

$$p_{n+1}(y_1, y_2) = \sum_x p_n(x) \pi_{\xi_n}(x, y) = \sum_{(x_1, x_2)} p_n(x_1, x_2) \pi_{\xi_n}(x_1, x_2; y_1, y_2). \quad (14)$$

Для последовательности  $\{\eta_n\}$  вероятности перехода определяются по (5):

$$\pi_{\eta_n}(x, y) \equiv P\{\eta_{n+1} = y | \eta_n = x\} = P\{\Psi(x, \xi_n) = y\} = \sum_{z: \Psi(x, z) = y} p_n(z) \quad (15)$$

с учетом (13). Вторая из формул (3) пересчета  $q_{n+1} = q_n \Pi_\eta(p_n, \Psi)$  примет вид:

$$q_{n+1}(y_1, y_2) = \sum_x q_n(x) \pi_{\eta_n}(x, y) = \sum_{(x_1, x_2)} q_n(x_1, x_2) \pi_{\eta_n}(x_1, x_2; y_1, y_2). \quad (16)$$

Формулы (14), (16) в сочетании с (12), (15) отражают преобразование состояний контактирующих поверхностей в общем виде.

**Процесс трения: модель режима усталостного разрушения с учетом смазки**

**Режим без учета смазки.** Модель для этого весьма важного режима усталостного разрушения при постоянной нагрузке рассмотрена в [19]. Предполагается, что процесс усталостного разрушения приводит к тому, что при многократных контактах выступов происходит отрыв частицы материала, и высота выступа уменьшается на некоторую случайную величину  $W_\xi$ . Состоянием выступа считается одномерный параметр — высота (точнее, уровень вершины). Соотношение (10) примет вид (с точностью  $o(\Delta t)$ ):

$$\xi_{n+1} = \Phi(\xi_n, \eta_n) = \xi_n - W_{\xi} \varepsilon_{\xi_n}(\delta_n) + h_n/2, \quad (17)$$

если  $\xi_n = x$ , то

$$\varepsilon_{\xi_n}(\delta_n) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } P_{W_{\xi}} P\{\delta_n > 0\} = P_{W_{\xi}} \lambda_{\eta}(x, t) \Delta t; \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - P_{W_{\xi}} \lambda_{\eta}(x, t) \Delta t. \end{cases}$$

Эта означает, что если контакт происходит, т. е. величина контактного пересечения  $\delta_n = \xi_n - \eta_n > 0$  (вероятность этого события  $\lambda_{\eta}(x, t_n) \Delta t$ ), то с вероятностью  $P_{W_{\xi}}$  происходит разрушение, т. е. уменьшение высоты на величину  $W_{\xi}$ ,  $\varepsilon_{\xi_n}(\delta_n)$  является случайной величиной. Параметр потока

$$\lambda_{\eta}(x, t_n) = (V/\Delta s_{\eta}) F_{\eta}(x, t_n)$$

в соответствии с (6) при  $x_1 = x$ . Величина  $h_n$  сближения поверхностей вводится для обеспечения условия постоянства силы сопротивления постоянной внешней нагрузке (эта величина является функционалом от распределений  $p_n$  и  $q_n$ ). С уменьшением высоты сила сопротивления падает, и под действием постоянной нормальной нагрузки поверхности сближаются. Для целей симметрии сближение обеспечивается половинной величиной для каждой поверхности. Прибавление константы  $h_n/2$  сдвигает распределение  $(n + 1)$ -го момента, поэтому удобно сделать марковский пересчет без ее учета, а затем сдвинуть распределение. Соотношение (11) примет вид, аналогичный (17) (с очевидным отличием в знаках приращений). В [10] проанализирована данная схема, выведены переходные вероятности для цепей Маркова  $\xi_n$  и  $\eta_n$ , получены соотношения пересчета  $p_n$  в  $p_{n+1}$  и  $q_n$  в  $q_{n+1}$ . Там же выведена формула для сближения  $h_n$ . Кроме того, в [10] решен вопрос определения дискретности пути трения  $\Delta L$  при пересчете распределений.

**Учет влияния смазки.** Предполагается, что влияние смазки [20] состоит в следующем:

- наличие смазки в зазоре двух контактирующих тел в результате действия нагрузки приводит к появлению поля гидродинамических давлений и, соответственно, возникновению реакции смазочного слоя, которая противодействует внешней нагрузке, и потому нагрузка в смазанном контакте контртел снижается;
- смазка «раздвигает» поверхности, и количество контактов (доля поверхности контакта) уменьшается;
- молекулярная (адгезивная) составляющая силы трения твердых тел исчезает;
- сближение поверхностей в некоторый момент заканчивается, равно как и износ, поскольку наступает гидродинамический режим трения, обусловленный уменьшением шероховатости.

Наступление гидродинамического режима оценивается по критерию  $\lambda$ , [5, с. 275]:

$$\lambda = h_{\min} / (R_{z1} + R_{z2}),$$

где  $R_{z1}$ ,  $R_{z2}$  — параметры шероховатости рабочих поверхностей.

При  $\lambda > 3$  наступает гидродинамический режим трения, износ заканчивается.

**Определение начального сближения  $d_0$ .** Перед началом вычислений механического контакта еще нет,  $d$  велико,  $P_k(d) = 0$ . При сближении (уменьшении  $d$ ) увеличивается доля  $P_k(d)$  контактов, а также и упругая противодействующая сила  $F_{\text{упр}}(d)$ , если  $F_{\text{упр}}(d) + F_{\text{см}}(d) < F_H$ , то сближение продолжается до момента равенства

$$F_{\text{упр}}(d_0) + F_{\text{см}}(d_0) = F_H,$$

причем

$$F_{\text{упр}}(d) = P_k(d) S c M \delta E, F_{\text{см}}(d) = (1 - P_k(d)) S \sigma_{\text{см}},$$

где  $d$  — расстояние между поверхностями (величина сближения);  $P_k(d)$  — доля поверхности механического контакта, зависящая от  $d$  сближения;  $S$  — номинальная площадь поверхностей сопряжения;  $P_k(d) S$ ,  $(1 - P_k(d))$  — площади поверхностей механического контакта и смазки;  $\sigma_{\text{см}}$  — давление, под которым подается смазка (величина на порядок меньше, чем давление, обусловленное нагрузкой);  $E$  — модуль упругости;  $c$  — константа (в законе Гука  $c = 1/L$ ,  $L$  — высота стержня, т. е. выступа).

Внешняя нагрузка  $F_H$  уравнивается упругой силой  $F_{\text{упр}}(d)$  контактирующих выступов и силой давления смазки  $F_{\text{см}}(d)$ .

### Пример моделирования

Описываемый подход отличается от известных возможностью получения оценок изменения характеристик во времени. На конкретном примере продемонстрирована работоспособность метода для получения нужных временных зависимостей. Рассмотрено сопряжение «коленчатый вал–коренной вкладыш» дизельного двигателя. Оценены изменения во времени таких характеристик трения, как шероховатость, средняя площадь контакта, среднее контактное пересечение, коэффициент трения, износ. Также проанализирована зависимость этих характеристик от прилагаемой нагрузки. Исходные данные приведены в таблице.

Номинальная площадь области контакта  $S$  (небольшая часть цилиндрической поверхности вдоль образующей с углом порядка  $10^\circ$ ) с учетом пульсирующей нагрузки определена инженерами-исследователями величиной  $S = 22,62 \text{ см}^2$ . Предельно допустимая минимальная толщина смазочного слоя  $h_{\min} = 1 \text{ мкм}$ . Вероятность разрушения  $P_W$  для вкладыша равна  $4 \cdot 10^{-7}$ , а для шейки вала —  $10^{-9}$ , т. е. в сто раз меньше, поскольку она сделана из значительно более твердого материала и известно, что ее поверхность практически не меняется. Исходные плотности распределений  $p_0(x)$  и  $q_0(x)$  для высот выступов поверхностей  $\xi$  (вкладыш) и  $\eta$  (вал) приближались сдвинутыми и растянутыми бета-распределениями (плотность

Исходные данные

Параметры	Шейка вала (поверхность $\eta$ )	Вкладыш (поверхность $\xi$ )
Среднеарифметическое отклонение профиля $R_a$ , мкм	0,083	1,099
Среднеквадратичное отклонение профиля $1,25R_a$ , мкм	0,103	1,373
Среднее расстояние между выступами $\Delta s$ , мкм	18	30
Модуль Юнга $E$ , Гпа	200	75
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,28	0,31
Предел текучести $\sigma_r$ , МПа	4250	1200

$C(a, b)x^{a-1}(1 - x)^{b-1}$ ,  $x \in [0, 1]$ ). Параметры  $a$  и  $b$  подбирались по профилограммам так, чтобы после сдвига и растяжения в нужный диапазон высот обеспечить равенство двух первых моментов. Для  $p_0(x)$  (вкладыш)  $a = 1,82$ ;  $b = 1,86$ . Для  $q_0(x)$  (шейка вала) —  $a = 1,71$ ;  $b = 4,60$ .

Анализируемое сопряжение работает большую часть времени в гидродинамическом режиме трения,

но в отдельные моменты времени, характеризующиеся повышенной нагрузкой, переходит в смешанный и граничный режимы [5, с. 274], которые и определяют ресурс сопряжения. В рассматриваемой расчетной модели сначала (в течение короткого времени) сопряжение работает в режиме приработки, затем — в режиме усталостного разрушения (граничный), после которого наступает гидродинамический режим трения.

На рисунке 2, *a* показаны исходные плотности распределения  $p_0(x)$ ,  $q_0(x)$  уровней вершин выступов нижней и верхней поверхностей. Шкала уровней вершин выступов жестко связана с вкладышем для наблюдения изменения распределения вкладыша  $p(x)$ . Уровни вершин выступов вкладыша (кривая  $p_0(x)$ ) находятся в диапазоне от 2,5 до 8,5 мкм, уровни вершин выступов вала — в диапазоне от 8,2 до 8,7 мкм. Нормальная сила принята равной 90 кН.

Режим приработки характеризуется упругими и пластическими деформациями. Его описание опущено, поскольку в данном случае он занимает ничтожную долю времени (подробно описан в [7]). Сближение двух поверхностей, как следствие, увеличение площади контакта (числа контактирующих выступов) и уменьшение напряжений происходят практически за счет пластических деформаций. Когда они прекращаются, этот режим заканчивается. Соответствующий

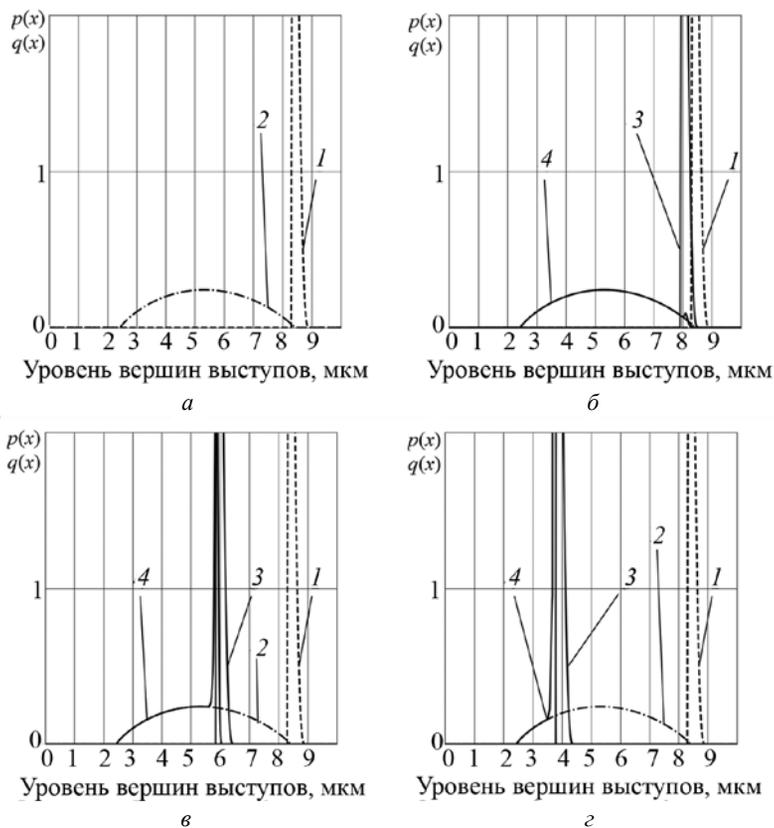


Рис. 2. Распределения высот:

*a* — исходные плотности распределения; *b* — после приработки; *v* — путь трения  $L = 240$  км; *z* — путь трения  $L = 1200$  км (момент окончания работы); исходные распределения 1 —  $q_0(x)$  (вал); 2 —  $p_0(x)$  (вкладыш); текущие распределения 3 —  $q(x)$ ; 4 —  $p(x)$

момент представлен на рис. 2, б. Маленький «скачок» в распределении  $p(x)$  показывает, что часть выступов подверглась пластическим деформациям и изменилась по высоте. Это распределение является исходным для анализируемого режима усталостного разрушения, соответственно, распределение высот выступов вала сдвигается на величину  $\sim 0,3$  мкм в сторону поверхности вкладыша. На всех графиках рис. 2 вершины пиковых плотностей распределений не показаны, они находятся выше границы рисунка. Существенными являются не вершины пиковых плотностей, а расположения пиков на горизонтальной оси уровней вершин выступов.

Начинается режим усталостного разрушения, обусловленный отрывом частицы при многократных взаимодействиях. На рис. 2, в даны распределения после 240 км трения. Видно, что распределения изменились существенно: отрыв частиц уменьшил высоту выступов, часть высот вкладыша с верхних уровней перешло на более низкие, образуя большую долю выступов с почти равными высотами (пик на кривой 4  $p(x)$  в окрестности уровня 6 мкм). Распределение  $q(x)$  соответственно почти в неизменном виде сместилось в сторону вкладыша на 2,5 мкм. Сдвиг распределения определяется поддержанием постоянной нагрузки  $u$ , определяет величину износа. Этот медленный режим заканчивается, когда шероховатость становится настолько малой, что выполняется условие («критерий лямбда») перехода к гидродинамическому режиму трения [5, с. 275]:

$$h_{\min} / (R_{z1} + R_{z2}) > 3.$$

Режим усталостного разрушения прекращается. Распределения, соответствующие этому моменту, изображены на рис. 2, г. Начинается гидродинамический режим, интенсивность износа снижается до нуля, т. е. сближение поверхностей прекращается. Моделирование переходного гладкого процесса требует дополнительного анализа. В приведенных расчетах переход описан в условном (скачкообразном) виде.

Характеристики трения рассчитывались при трех значениях нормальной силы: 10, 30, 90 кН. На рис. 3, 4 показаны зависимости от пути трения. Главное, что они показывают, — это возможность для инженеров количественно оценивать и сравнивать изменяющиеся в процессе трения характеристики. Видно, что они согласуются с известными (качественно) зависимостями: чем больше прилагаемая нагрузка, тем быстрее поверхность вкладыша сглаживается (рис. 3, а), быстрее увеличивается доля контактирующих выступов (рис. 3, б), т. е. доля площади контакта, быстрее наступает переход к гидродинамическому режиму (рис. 3, в), интенсивнее происходит износ (рис. 4, в).

### Заключение

Предложен в общем виде подход к моделированию изменений шероховатых поверхностей в ходе их взаимодействия. При различных конкретизациях того, что есть случайное состояние элемента (выступа) и

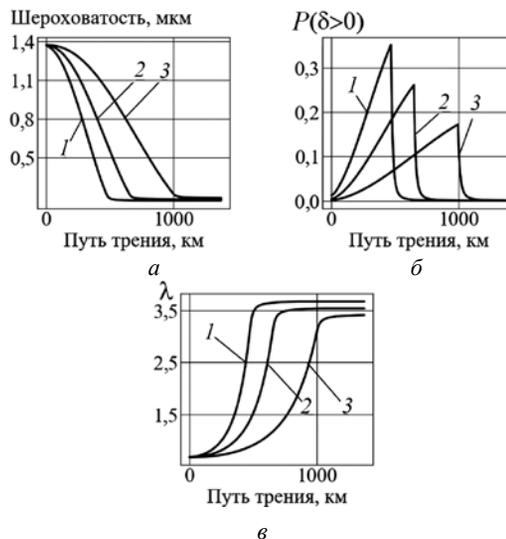


Рис. 3. Характеристики трения:

а — шероховатость нижней поверхности; б — доля площади контакта; в — критерий режима смазки; нагрузка 10 (1), 30 (2), 90 (3) кН

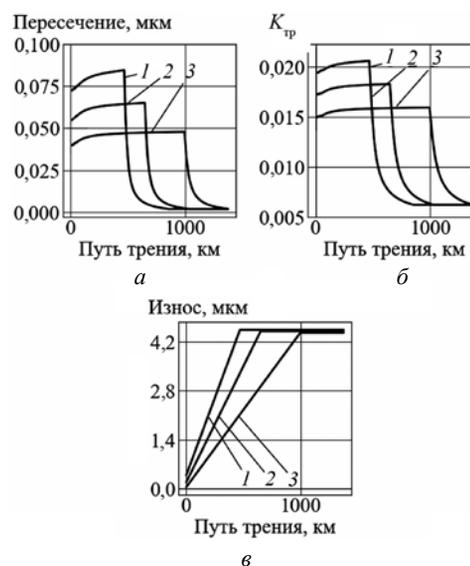


Рис.4. Характеристики трения:

а — среднее контактное пересечение; б — коэффициент трения; в — износ поверхности вкладыша; нагрузка 10 (1), 30 (2), 90 (3) кН

функции взаимодействия двух выступов, получается описание различных взаимодействий поверхностей в виде закона распределения на множестве случайных состояний. При этом анализ сводится к марковскому процессу не одномерному, с рекуррентным пересчетом распределений. По закону распределения можно оценить различные характеристики взаимодействия. Кратко описана модель усталостного разрушения при трении с учетом смазки. Приведен расчетный пример для сопряжения «коленчатый вал–коренной вкладыш» дизеля и оценены характеристики, определяющие ресурс вкладыша.

## Литература

## References

1. **Vencel A., Rac A.** Diesel Engine Crankshaft Journal Bearings Failures: Case Study // *Engineering Failure Analysis*. 2014. V. 44. Pp. 217—228.

2. **Javorova J., Mazdrakova A., Andonov I., Radulescu A.** Analysis of HD Journal Bearings Considering Elastic Deformation and Non Newtonian Rabinowitsch Fluid Model // *Tribology in Industry*. 2016. V. 38. No. 2. Pp. 186—196.

3. **Holmberg K., Andersson P., Erdemir A.** Global Energy Consumption Due to Friction in Passenger cars // *Tribology International*. 2012. V. 47. Pp. 221—234.

4. **Задорожная Е.А., Мухортов И.В., Леванов И.Г.** Применение неньютоновских моделей смазочных жидкостей при расчете сложнонагруженных узлов трения поршневых и роторных машин // *Трение и смазка в машинах и механизмах*. 2011. № 7. С. 22—30.

5. **Чичинадзе А.В. и др.** Основы трибологии (трение, износ, смазка). М.: Машиностроение, 2001.

6. **Vorlauffer G., Ilincic S., Franek F., Pauschitz A.** Wear Quantification by Comparison of Surface Topography Data // *Encyclopedia of Tribology*. 2012. Pp. 4087—4093.

7. **Johansson S., Nilsson P.H., Ohlsson R.** Bengt-göran Rosén Experimental Friction Evaluation of Cylinder Liner/Piston Ring Contact // *Wear*. 2011. V. 271. Pp. 625—633.

8. **Попов В.Л.** Механика контактного взаимодействия и физика трения. М.: Физматлит, 2013.

9. **Lazarev V., Gavrilov K., Doikin A., Vorlauffer G., Sequard-Base J.** Estimation of the Tribotechnical Parameters of the «Piston Skirt — Cylinder Liner» Contact Interface from an Icing engine for Decreasing the Mechanical Losses // *WIT Trans. Ecology and the Environment*. 2014. V. 190 (1). Pp. 625—635.

10. **Amor M.B., Belghith S., Mezlini S.** Finite Element Modeling of RMS Roughness Effect on the Contact Stiffness of Rough Surfaces // *Tribology in Industry*. 2016. V. 38. No. 3. Pp. 392—401.

11. **Greenwood J.A., Williamson J.B.P.** Contact of Nominally Flat Surfaces // *Proc. Royal Soc. Series A*. 1966. V. 295. Pp. 300—319.

12. **Nayak P.R.** Random Process Model of Rough Surfaces // *J. Lubrication Techn.* 1971. V. 93 (3). Pp. 398—407.

13. **Демкин Н.Б.** Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970.

14. **Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.** Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977.

15. **Тигетов Д.Г., Горицкий Ю.А.** Марковская модель механического взаимодействия шероховатых поверхностей в процессе трения // *Трение и смазка в машинах и механизмах*. 2010. № 3. С. 4—13.

16. **Горицкий Ю.А., Главатских С.Б., Бражникова Ю.С.** Марковская модель взаимодействия шероховатых поверхностей // *Трение и смазка в машинах и механизмах*. 2014. № 2. С. 11—20.

17. **Gavrilov K., Goritskiy Yu., Ismailova Yu., Rozhdestvensky Yu., Doikin A.** A Numerical Model for Mechanical Interaction of Rough Surfaces of the «Piston-

1. **Vencel A., Rac A.** Diesel Engine Crankshaft Journal Bearings Failures: Case Study. *Engineering Failure Analysis*. 2014;44:217—228.

2. **Javorova J., Mazdrakova A., Andonov I., Radulescu A.** Analysis of HD Journal Bearings Considering Elastic Deformation and Non Newtonian Rabinowitsch Fluid Model. *Tribology in Industry*. 2016;38;2:186—196.

3. **Holmberg K., Andersson P., Erdemir A.** Global Energy Consumption Due to Friction in Passenger cars. *Tribology International*. 2012;47:221—234.

4. **Zadorozhnaya E.A., Muhortov I.V., Levanov I.G.** Primenenie Nen'yutonovskikh Modeley Smazochnykh Zhidkostey pri Raschete Slozhnograduzhennykh Uzlov Treniya Porshnevyyh i Rotornykh Mashin. *Trenie i Smazka v Mashinah i Mekhanizmah*. 2011;7:22—30. (in Russian).

5. **Chichinadze A.V. i dr.** Osnovy Tribologii (Trenie, Iznos, Smazka). M.: Mashinostroenie, 2001. (in Russian).

6. **Vorlauffer G., Ilincic S., Franek F., Pauschitz A.** Wear Quantification by Comparison of Surface Topography Data. *Encyclopedia of Tribology*. 2012:4087—4093.

7. **Johansson S., Nilsson P.H., Ohlsson R.** Bengt-göran Rosén Experimental Friction Evaluation of Cylinder Liner/Piston Ring Contact. *Wear*. 2011;271:625—633.

8. **Popov V.L.** Mekhanika Kontaktnogo Vzaimodeystviya i Fizika Treniya. M.: Fizmatlit, 2013. (in Russian).

9. **Lazarev V., Gavrilov K., Doikin A., Vorlauffer G., Sequard-Base J.** Estimation of the Tribotechnical Parameters of the «Piston Skirt — Cylinder Liner» Contact Interface from an Icing engine for Decreasing the Mechanical Losses. *WIT Trans. Ecology and the Environment*. 2014;190 (1):625—635.

10. **Amor M.B., Belghith S., Mezlini S.** Finite Element Modeling of RMS Roughness Effect on the Contact Stiffness of Rough Surfaces. *Tribology in Industry*. 2016;38;3:392—401.

11. **Greenwood J.A., Williamson J.B.P.** Contact of Nominally Flat Surfaces. *Proc. Royal Soc. Series A*. 1966;295:300—319.

12. **Nayak P.R.** Random Process Model of Rough Surfaces. *J. Lubrication Techn.* 1971;93 (3):398—407.

13. **Demkin N.B.** Kontaktirovanie Sherohovatykh Poverhnostey. M.: Nauka, 1970. (in Russian).

14. **Kragel'skiy I.V., Dobychin M.N., Kombalov V.S.** Osnovy Raschetov na Trenie i Iznos. M.: Mashinostroenie, 1977. (in Russian).

15. **Tigetov D.G., Goritskiy Yu.A.** Markovskaya Model' Mekhanicheskogo Vzaimodeystviya Sherohovatykh Poverhnostey v Protseste Treniya. *Trenie i Smazka v Mashinah i Mekhanizmah*. 2010;3:4—13. (in Russian).

16. **Goritskiy Yu.A., Glavatskiy S.B., Brazhnikova Yu.S.** Markovskaya Model' Vzaimodeystviya Sherohovatykh Poverhnostey. *Trenie i Smazka v Mashinah i Mekhanizmah*. 2014;2:11—20. (in Russian).

17. **Gavrilov K., Goritskiy Yu., Ismailova Yu., Rozhdestvensky Yu., Doikin A.** A Numerical Model for Mechanical Interaction of Rough Surfaces of the «Piston-

Cylinder Liner» Tribosystem // FME Trans. 2015. V. 43. No. 3. Pp. 249–253.

18. **Gavrilov K., Goritskiy Yu., Migal I., Izzatulloev M.** A Numerical Model for Estimation of Service Life of Tribological Systems of the Piston Engine // Tribology in Industry. 2017. V. 39. No. 3. Pp. 329–333.

19. **Горицкий Ю.А., Гаврилов К.В., Исмаилова Ю.С., Шевченко О.В.** Марковская модель изменения шероховатых поверхностей при механическом взаимодействии // Вестник МЭИ. 2017. № 5. С. 112–125.

20. **Rozhdestvensky Yu., Zadorozhnaya E.** A Simulation of the Thermal State of Heavily Loaded Tribounits and its Evaluation // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2014. V. 7 (4). Pp. 51–64.

Cylinder Liner» Tribosystem. FME Trans. 2015;43;3: 249–253.

18. **Gavrilov K., Goritskiy Yu., Migal I., Izzatulloev M.** A Numerical Model for Estimation of Service Life of Tribological Systems of the Piston Engine. Tribology in Industry. 2017;39;3:329–333.

19. **Goritskiy Yu.A., Gavrilov K.V., Ismailova Yu.S., Shevchenko O.V.** Markovskaya Model' Izmene-niya Sherohovatyh Poverhnostey pri Mekhanicheskom Vzai-modeystvii. Vestnik MEI. 2017;5:112–125. (in Russian).

20. **Rozhdestvensky Yu., Zadorozhnaya E.** A Simulation of the Thermal State of Heavily Loaded Tribounits and its Evaluation. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2014;7 (4):51–64.

#### Сведения об авторах:

**Горицкий Юрий Александрович** — доктор технических наук, профессор кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: goritskiy@yandex.ru

**Гаврилов Константин Владимирович** — кандидат технических наук, доцент Южно-Уральского государственного университета, Челябинск, e-mail: gavrilovkv1@rambler.ru

**Мигаль Иван Андреевич** — магистрант НИУ «МЭИ», e-mail: ivan.migal@mail.ru

#### Information about authors:

**Goritskiy Yuriy A.** — Dr.Sci. (Techn.), Professor of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: goritskiy@yandex.ru

**Gavrilov Konstantin V.** — Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of South Ural State University, Chelyabinsk, e-mail: gavrilovkv1@rambler.ru

**Migal' Ivan A.** — Undergraduate of NRU MPEI, e-mail: ivan.migal@mail.ru

**Работа выполнена при поддержке:** РФФИ (проект № 16-08-00990)

**The work is executed at support:** RFBR (grants No. 16-08-00990)

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов

**Conflict of interests:** the authors declare no conflict of interest

**Статья поступила в редакцию:** 24.03.2018

**The article received to the editor:** 24.03.2018