МАТЕМАТИКА

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (01.01.02)

УДК 517.928
DOI: 10.24160/1993-6982-2019-1-133-138

Регуляризация и построение асимптотических решений в методе пограничных функций

А.А. Бободжанов, В.Ф. Сафонов

В своей статье в 1977 г. С.А. Ломов заметил, что асимптотика типа пограничного слоя Васильевой–Бутузова для сингулярно возмущенной задачи может быть получена методом перехода в пространство бо́льшей размерности или регуляризации исходного дифференциального оператора с помощью быстрой независимой переменной. К сожалению, подробный алгоритм построения такой асимптотики в настоящей работе не приводится, и остается открытым вопрос, будет ли в действительности совпадать полученная в ней асимптотика с асимптотикой типа пограничного слоя. В данной статье этот вопрос решен положительно. Однако сама регуляризации разбита на два этапа: частичную и полную регуляризации. В процессе частичной регуляризации не удается получить «расширенную» задачу, итерационные системы которой допускают решения в виде суммы двух функций с разделенными независимыми переменными (одна из которых — обычная, а другая — регуляризирующая переменные). В основе полной регуляризации лежит процедура построения «расширенной» системы, примененная авторами в работах по регуляризации интегральных операторов, суть которой состоит в регуляризации исходной задачи в классе формальных асимптотических рядов по степеням малого параметра с коэффициентами в виде суммы функций с разделенными переменными. Полученная с помощью такой процедуры асимптотика полностью совпадает с асимптотикой типа пограничного слоя, что и подтверждает гипотезу С.А. Ломова.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотика типа пограничного слоя, регуляризация, итерационные задачи.

Для цитирования: Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Регуляризация и построение асимптотических решений в методе пограничных функций // Вестник МЭИ. 2019. № 1. С. 133—138. DOI: 10.24160/1993-6982-2019-1-133-138.

Regularization and Construction of Asymptotic Solutions in the Boundary Function Method

A.A. Bobodzhanov, V.F. Safonov

In his brief article published in 1977, S.A. Lomov noted that the asymptotics of Vasil'eva—Butuzov's type boundary layer for a singularly perturbed problem can be obtained by the method of transition to a space of higher dimension or regularization of the original differential operator using a fast independent variable. Unfortunately, a detailed algorithm for constructing such asymptotics is not given in the article, and it remains to be answered whether the asymptotics obtained in it will actually coincide with a boundary-layer type asymptotics. In the present paper, this question is solved positively. However, the regularization itself is divided into two stages: partial regularization and complete regularization. In the course of partial regularization, it is not possible to obtain an "extended" problem the iterative systems of which admit solutions in the form of the sum of two functions with separated independent variables (one of which is an ordinary variable, and the other is a regularizing variable).

The complete regularization has at its heart the procedure for constructing an "extended" system, which was applied by the authors in their papers devoted to regularization of integral operators, the essence of which consists in regularizing the original problem in the class of formal asymptotic series in powers of a small parameter with coefficients in the form of the sum of functions with separated variables. The asymptotics obtained using such procedure coincides completely with the boundary-layer type asymptotics, a result that confirms S.A. Lomov's hypothesis.

Key words: singularly perturbed problem, boundary-layer type asymptotics, regularization, iterative problems.

For citation: Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. Regularization and Construction of Asymptotic Solutions in the Boundary Function Method. MPEI Vestnik. 2019;1:133—138. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2019-1-133-138.

Попробуем подтвердить идею С.А. Ломова на примере линейной сингулярно возмущенной задачи:

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+h(t);\;\; y(0,\varepsilon)=y^0;\;\; t\in[0,T], \qquad (1)$$

которую рассмотрим при условиях, накладываемых обычно в методе погранфункций [1, 2]:

- $A(t)\in C^{N+1}\left([0,T],\mathbb{C}^{n\times n}\right)$, $h(t)\in C^{N+1}\left([0,T],\mathbb{C}^{n}\right)$;
- спектр $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ лежит при всех $t\in[0,T]$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda<0$.

Частичная регуляризация задачи (1)

Введем регуляризирующую переменную $\tau=t/\varepsilon$ и вместо исходной задачи (1) проанализируем расширенную:

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde y}{\partial t}+\frac{\partial\tilde y}{\partial\tau}=A(t)\tilde y+h(t),\;\tilde y(t,\tau,\varepsilon)\big|_{t=\tau=0}=y^0 \qquad (2)$$

для функции $\tilde y=\tilde y(t,\tau,\varepsilon)$.

Очевидно, сужение решения этой задачи при $\tau=t/\varepsilon$ совпадает с точным решением $y(t,\varepsilon)$ исходной задачи (1). Для того, чтобы получить асимптотику типа пограничного слоя, следует искать решение задачи (2) в виде ряда

$$\begin{aligned}\tilde y(t,\tau,\varepsilon)&=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y^{(k)}(t,\tau)\equiv\\ &\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(y_0^{(k)}(t)+y_1^{(k)}(\tau)\right),\end{aligned} \qquad (3)$$

коэффициенты которого являются суммой вектор-функций с разделенными переменными. В методе [1] приняты обозначения $y_0^{(k)}(t)\equiv\bar y_k(t);\;\; y_1^{(k)}(\tau)\equiv\Pi_k y(\tau)$.

Подставив ряд (3) в систему (2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим итерационные задачи, которые, однако, будут неразрешимыми в пространстве:

$$\begin{aligned}U=\{&y(t,\tau): y=y_0(t)+y_1(\tau), y_0(t)\in C^N\left([0,T],\mathbb{C}^n\right);\\ &y_1(\tau)\in C^N\left([0,+\infty),\mathbb{C}^n\right), y_1(\tau)\to 0(\tau\to+\infty)\},\end{aligned}$$

в котором предполагается искать решения в методе [1].

Действительно, первая итерационная система имеет вид:

$$\frac{\partial y_1^{(0)}(\tau)}{\partial\tau}=A(t)y_1^{(0)}(t)+A(t)y_0^{(0)}(\tau)+h(t).$$

Поскольку правая часть данной системы зависит от t, то найти решение $y_1^{(0)}(\tau)$, зависящее только от τ, не представляется возможным. Поэтому расширенную задачу (2) нельзя считать полностью регуляризованной.

Полная регуляризация задачи (1)

Для того, чтобы провести полную регуляризацию, надо построить оператор, относительно которого пространство U будет инвариантным [3, с. 43]. Подставим ряд (3) в правую часть системы (1) и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}A(t)\tilde y+h(t)&=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(A(t)y_0^{(k)}(t)+A(t)y_1^{(k)}(\tau)\right)+\\ +h(t)&\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(A(t)y_0^{(k)}(t)+A(\varepsilon\tau)y_1^{(k)}(\tau)\right)+h(t)=\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(A(t)y_0^{(k)}(t)+\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\frac{1}{s!}\frac{d^sA(0)}{dt^s}\tau^s y_1^{(k)}(\tau)\right)+\\ +h(t)&=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A(t)y_0^{(k)}(t)+\\ &+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}\frac{1}{s!}\frac{d^sA(0)}{dt^s}\tau^s y_1^{(r-s)}(\tau)+h(t).\end{aligned}$$

Введем, по аналогии с [4, 5], операторы $R_m{:}U\to U$ (операторы порядка по ε):

$$\begin{aligned}&R_0\left(y_0(t)+y_1(\tau)\right)\equiv R_0y_1(\tau)=A(0)y_1(\tau);\\ &R_1y_1(\tau)=A'(0)y_1(\tau)\tau;\\ &R_2y_1(\tau)=\frac{1}{2!}A''(0)y_1(\tau)\tau^2;\\ &\ldots\\ &R_my_1(\tau)=\frac{1}{m!}\frac{d^mA(0)}{dt^m}y_1(\tau)\tau^m,\; m\ge 2,\end{aligned}$$

тогда предыдущее равенство можно записать так:

$$\begin{aligned}A(t)\tilde y+h(t)&=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A(t)y_0^{(k)}(t)+\\ +h(t)&+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}R_s y_1^{(r-s)}(\tau).\end{aligned}$$

Введем оператор

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{y}(t,\tau,\varepsilon) \equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} - \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A(t) y_0^{(k)}(t) - \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{s=0}^{r} R_s y_1^{(r-s)}(\tau),$$

где $\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)$ — ряд (3).

Тогда задача

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{y} = h(t),\ \tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)|_{t=\tau} = y^0 \tag{4}$$

будет полностью регуляризованной по отношению к исходной (1), при этом пространство U будет инвариантным относительно предельного оператора

$$\mathscr{L}\, y(t,\tau) \equiv \frac{\partial y_1(\tau)}{\partial \tau} - A(t) y(t) - R_0 y_1(\tau).$$

Определив решение задачи (4) в виде ряда (3), получим равенства:

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial y_0^{(k)}(t)}{\partial t} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial y_1^{(k)}(\tau)}{\partial \tau} - \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A(t) y_0^{(k)}(t) - \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{s=0}^{r} R_s y_1^{(r-s)}(\tau) = h(t); \\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(y_1^{(k)}(0) + y_0^{(k)}(0) \right) = y^0.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, придем к следующим итерационным задачам:

$$\mathscr{L}\, y_0(t,\tau) \equiv \mathscr{L}\left(y_0^{(0)}(t) + y_1^{(0)}(\tau) \right) \overset{def}{=} \frac{\partial y_1^{(0)}(\tau)}{\partial \tau} - \\ -A(t) y_0^{(0)}(t) - R_0 y_1^{(0)}(\tau) = \\ = h(t),\ y_0^{(0)}(0) + y_1^{(0)}(0) = y^0; \tag{5}$$

$$\mathscr{L}\, y_1(t,\tau) = -\frac{\partial y_0^{(0)}(t)}{\partial t} + R_1 y_1^{(0)}(\tau); \\ y_0^{(1)}(0) + y_1^{(1)}(0) = 0; \tag{6}$$

$$\mathscr{L}\, y_2(t,\tau) = -\frac{\partial y_0^{(1)}(t)}{\partial t} + R_1 y_1^{(1)}(\tau) + R_2 y_1^{(0)}(\tau); \\ y_0^{(1)}(0) + y_1^{(1)}(0) = 0; \tag{7}$$

...

$$\mathscr{L}\, y_m(t,\tau) = -\frac{\partial y_0^{(m-1)}(t)}{\partial t} + R_1 y_1^{(m-1)}(\tau) + \\ +R_2 y_1^{(m-2)}(\tau) + \ldots + R_{m-1} y_1^{(0)}(\tau); \\ y_0^{(m)}(0) + y_1^{(m)}(0) = 0,\ m \ge 3. \tag{8}$$

Разрешимость итерационных задач

Поскольку решения всех итерационных задач (5) — (8) должны принадлежать пространству U, то в системе (5) надлежит разделить функции, зависящие от t, и функции, зависящие от τ, в результате получим системы:

$$\begin{cases} -A(t) y_0^{(0)}(t) = h(t); \\ \dfrac{\partial y_1^{(0)}(\tau)}{\partial \tau} - R_0 y_1^{(0)}(\tau) = 0,\ y_1^{(0)}(0) = y^0 - y_0^{(0)}(0). \end{cases}$$

Учитывая, что $R_0 y(t,\tau) \equiv R_0\left(y_0(t) + y_1(\tau)\right) = A(0) y_1(\tau)$:

$$y_0^{(0)}(t) = -A^{-1}(t) h(t); \\ y_1^{(0)}(\tau) = \mathrm{e}^{A(0)\tau}\left(y^0 + A^{-1}(0) h(0) \right). \tag{9}$$

При этом задача (6) после разделения переменных примет вид:

$$\begin{cases} -A(t) y_0^{(1)}(t) = \dfrac{d}{dt}\left(A^{-1}(t) h(t) \right); \\ \dfrac{\partial y_1^{(1)}(\tau)}{\partial \tau} - R_0 y_1^{(1)}(\tau) = \\ = A'(0)\tau \mathrm{e}^{A(0)\tau}\left(y^0 + A^{-1}(0) h(0) \right);\ y_1^{(1)}(0) = -y_0^{(1)}(0). \end{cases}$$

Ее решение выглядит как

$$y_0^{(1)}(t) = -A^{-1}(t) \frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t) h(t) \right); \\ y_1^{(1)}(\tau) = \mathrm{e}^{A(0)\tau}[-y_0^{(1)}(0) + \\ +\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-A(0)s}\left(A'(0) s \mathrm{e}^{A(0)s}\left(y^0 + A^{-1}(0) h(0) \right) \right) ds.$$

Ясно, что этот процесс может быть продолжен и дальше. В итоге будут найдены решения всех итерационных задач (5) — (8) в пространстве U, а значит, построено асимптотическое решение исходной задачи порядка m. Например, асимптотическое решение первого порядка будет иметь вид:

$$y_{\varepsilon 1}(t) = \left[-A^{-1}(t) h(t) + \mathrm{e}^{A(0)\tau}(y^0 + A^{-1}(0) h(0) \right] + \\ +\varepsilon \left[y_0^{(1)}(t) + e^{A(0)\tau}(-y_0^{(1)}(0) + \right. \\ \left. +\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-A(0)s} A'(0) \mathrm{e}^{A(0)s}(y^0 + A^{-1}(0) h(0)) s) ds \right],\ \tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

где $y_0^{(1)}(t) \equiv -\dfrac{d}{d}\left(A^{-1}(t)(A^{-1}(t) h(t)) \right)$.

Если $A(t) \equiv a(t)$, $h(t) \equiv b(t)$ — скалярные функции, то

$$y_{\varepsilon 1}(t) = \left[\left(y^0 + \frac{b(0)}{a(0)}\right)e^{a(0)\tau} - \frac{b(t)}{a(t)}\right] + \varepsilon\left[-\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right) + \right.$$
$$\left. + e^{a(0)\tau}\frac{1}{a(0)}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)\right]_{t=0} + \dot{a}(0)\left(y^0 + \frac{b(0)}{a(0)}\frac{\tau^2}{2}\right)\right],\quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Это полностью совпадает с формулами, полученными в [1, с. 44—46] для скалярной задачи (1). Таким образом, регуляризация с помощью переменной $\tau = t/\varepsilon$ приводит к асимптотическому решению типа пограничного слоя, что и подтверждает истинность гипотезы С.А. Ломова, высказанную им в [6].

Полная регуляризация нелинейных сингулярно возмущенных систем

В случае нелинейной задачи

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = F(z,t),\ z(0,\varepsilon) = z^0 \tag{10}$$

основные идеи остаются теми же: пространством решений итерационных задач будет U, надо только построить операторы порядка $R_m{:}U \to U$, а затем с помощью них сконструировать регуляризованную задачу типа (4).

Однако сделать это будет сложнее, чем в линейном случае. Можно предложить следующую процедуру. Сначала вычислим коэффициенты регулярного ряда $z_0(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_0^{(k)}(t)$ (он находится независимо от погранслойного ряда для $z_1(\tau, \varepsilon)$ и должен удовлетворять системе $\varepsilon\frac{dz_0}{dt} = F(z_0,t)$):

$$F\left(z_0^{(0)},t\right) = 0 \Leftrightarrow z_0^{(0)}(t) = \varphi(t); \tag{11}$$

$$z_0^{(1)}(t) = \left(\frac{\partial F(\varphi(t),t)}{\partial z}\right)^{-1}\dot{\varphi}(t); \tag{12}$$

$$\ldots$$

$$z_0^{(k+1)}(t) = \left(\frac{\partial F(\varphi(t),t)}{\partial z}\right)^{-1}\left(\dot{z}_0^{(k)}(t) - P_k\left(z_0^{(0)},\ldots,z_0^{(k)},t\right)\right), \tag{13}$$

где $P_k\left(z_0^{(1)},\ldots,z_0^{(k)},t\right)$ — некоторые многочлены от $z_0^{(1)},\ldots,z_0^{(k)}$ с коэффициентами, зависящими от частных производных функции $F(z, t)$ в точке $z = z_0^{(0)}(t)$.

Затем выражение

$$\left[F(z_0(t,\varepsilon) + z_1(\tau,\varepsilon),t) - F(z_0(t,\varepsilon),t)\right]|_{t=\varepsilon\tau} \equiv$$
$$\equiv F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_0^{(k)}(\varepsilon\tau) + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_1^{(k)}(\tau),\varepsilon\tau\right) -$$
$$-F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_0^{(k)}(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau\right)$$

представим в виде $\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}R_s z_1^{(r-s)}(\tau)$, выделив в нем коэффициенты $\sum_{s=0}^{r}R_s z_1^{(r-s)}(\tau)$ при каждой степени ε^r. Выпишем операторы R_0 и R_1:

$$R_0\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_0^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_1^{(k)}(\tau)\right) =$$
$$= F\left(z_0^{(0)}(t) + z_1^{(0)}(\tau),0\right) - F\left(z_0^{(0)}(t),0\right);$$
$$R_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_0^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_1^{(k)}(\tau)\right) =$$
$$= \frac{\partial F\left(z_0^{(0)}(t) + z_1^{(0)}(\tau),0\right)}{\partial z}\left[\dot{z}_0^{(0)}(0)\tau + z_0^{(0)}(0) + z_1^{(1)}(\tau)\right] +$$
$$+\frac{\partial F\left(z_0^{(0)}(0) + z_1^{(0)}(\tau),0\right)}{\partial t}\tau - \frac{\partial F\left(z_0^{(0)}(0),0\right)}{\partial z}\times$$
$$\times\left[\dot{z}_0^{(0)}(0)\tau + z_1^{(1)}(\tau)\right] - \frac{\partial F\left(z_0^{(0)}(0),0\right)}{\partial t}\tau.$$

Задача $\tilde{L}_\varepsilon\tilde{z} = 0$, $\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)|_{t=\tau} = z^0$, где $\tilde{L}_\varepsilon$ — оператор

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon) \equiv \varepsilon\frac{\partial\tilde{z}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{z}}{\partial\tau} - F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_0^{(k)}(t),t\right) -$$
$$-\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=0}^{r}R_{r-s}z_1^{(s)}(\tau),$$

определенный на рядах

$$\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_0^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_1^{(k)}(\tau), \tag{14}$$

будет полностью регуляризованной по отношению к исходной задаче (10).

Процесс вычисления коэффициентов ряда (14) аналогичен предыдущему. Подставив (14) в систему $\tilde{L}_\varepsilon\tilde{z} = 0$, $\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)|_{t=\tau} = z^0$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, а затем разделив переменные, получим итерационные задачи для коэффициентов отдельно для регулярного ряда (ограничимся скалярным случаем задачи (10):

$$\dot{z}_0^{(0)}(t) = \frac{\partial F(z_0^{(0)}(t),t)}{\partial z}z_0^{(1)};$$
$$\dot{z}_0^{(1)}(t) = \frac{\partial F(z_0^{(0)}(t),t)}{\partial z}z_0^{(2)} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F(z_0^{(0)}(t),t)}{\partial z^2}\left(z_0^{(1)}(t)\right)^2;$$
$$\ldots$$
$$\dot{z}_0^{(k)}(t) = \frac{\partial F(z_0^{(0)}(t),t)}{\partial z}z_0^{(k+1)} + P_k(z_0^{(1)},\ldots,z_0^{(k)},t), k \ge 2,$$

решения которых уже найдены в виде функций (11) — (13), и отдельно для коэффициентов погранслойного ряда:

$$\begin{aligned}&\frac{dz_1^{(1)}(\tau)}{d\tau}=\frac{\partial F(z_0^{(0)}(0)+z_1^{(0)}(\tau),0)}{\partial z}z_1^{(1)}(\tau)+\\&+\left[\frac{\partial F(z_0^{(0)}(0)+z_1^{(0)}(\tau),0)}{\partial z}(z_0^{(1)}(0)+\dot z_0^{(1)}(0)\tau)+\right.\\&+\frac{\partial F(z_0^{(0)}(0)+z_1^{(0)}(\tau),0)}{\partial t}\tau-\\&-\frac{\partial F(z_0^{(0)}(0),0)}{\partial z}(z_0^{(1)}(0)+\dot z_0^{(1)}(0)\tau)-\\&\left.-\frac{\partial F(z_0^{(0)}(0),0)}{\partial t}\tau\right];\\&z_1^{(1)}(\tau)|_{\tau=0}=-z_0^{(1)}(0),\\&\qquad\ldots\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\frac{dz_1^{(0)}(\tau)}{d\tau}=F(z_0^{(0)}(0)+z_1^{(0)}(\tau),0)-F(z_0^{(0)}(0),0);\\&z_1^{(0)}(\tau)|_{\tau=0}=z^0-z_0^{(0)}(0).\end{aligned}\tag{16}$$

Рассмотрим систему (15). Если в ней сделать замену $\tilde z(\tau)=z_0^{(0)}(0)+z_1^{(0)}(\tau)$, то получим задачу $\frac{d\tilde z}{d\tau}=F(\tilde z,0),\tilde z(0)=z^0$ (учтено, что $F\left(z_0^{(0)}(0),0\right)=0$). По условию 4 теоремы Васильевой значение z^0 принадлежит области влияния асимптотически устойчивой точки покоя уравнения $\frac{d\tilde z}{d\tau}=F(\tilde z,0)$, значит, задача $\frac{d\tilde z}{d\tau}=F(\tilde z,0),\tilde z(0)=z^0$ имеет единственное решение $\tilde z=\tilde z(\tau)$, определенное при всех $\tau\ge 0$, причем $\tilde z(\tau)\to z_0^{(0)}(0)\equiv\varphi(0)$ при $\tau\to+\infty$. Отсюда следует, что задача (15) имеет единственное решение $z_1^{(0)}(\tau)=\tilde z(\tau)-z_0^{(0)}(0)\equiv\tilde z(\tau)-\varphi(0)$, определенное при всех $\tau\ge 0$ и $z_1^{(0)}(\tau)\to 0$ при $\tau\to+\infty$.

Можно доказать, что при условии

$$\frac{\partial F\left(z_0^{(0)}(t),t\right)}{\partial z}<0\ \left(\forall t\in[0,T]\right)$$

имеет место экспоненциальная оценка

$$|\,z_1^{(0)}(\tau)\,\|\le K_0\,e^{-\varkappa\tau}\ (\forall\tau\ge 0,\varkappa>0,K_0>0=\mathrm{const}),$$

поэтому функция $z_1^{(0)}(\tau)$ является функцией пограничного слоя (см. [1, с. 65]). Что же касается задачи (16) (и всех последующих задач), то она является линейной и поэтому всегда разрешима при $\tau\ge 0$.

Если обозначить неоднородность, записанную в квадратной скобке в (15), через $h_1(\tau)$, то решение этой задачи будет выглядеть как

$$z_1^{(1)}(\tau)=e^{\int_0^\tau\lambda(\theta)d\theta}\left(-z_0^{(1)}(0)\right)+\int_0^\tau e^{\int_s^\tau\lambda(\theta)d\theta}h_1(s)ds,$$

где $\lambda(\tau)\equiv\partial F(\overline{z}_0(0)+\Pi_0 z(\tau),0)/\partial z$.

Покажем экспоненциальную оценку и для $z_1^{(1)}(\tau)$, т. е. она также будет функцией пограничного слоя. Следующие задачи для функций $z_1^{(k)}(\tau)$ также будут линейными, поэтому все члены погранслойного ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_1^{(k)}(\tau)$ находятся однозначно. Разумеется, все выкладки справедливы при условиях системы (10), указанной в [7]. Ради полноты изложения сформулируем соответствующее утверждение.

Теорема Васильевой. *Пусть для системы (10) выполнены условия:*

1) функция

$$F(z,t)\in\mathbf{C}^{N+1}(G),G=\{(z,t):\|\,z\,\|\le H,0\le t\le T\};$$

2) вырожденная система $F\left(\overline{z},t\right)=0$ *имеет изолированный корень* $\overline{z}=\varphi(t)$, *определенный на отрезке* $[0, T]$;

3) точка покоя $\tilde z=\varphi(t)$ *присоединенной системы* $\frac{d\tilde z}{d\tau}=F(\tilde{\tilde z},t),\tilde{\tilde z}(\tau,t)|_{\tau=0}=z^0,\tau\ge 0,$ *является асимптотически устойчивой по Ляпунову при* $\tau\to+\infty$ *(равномерно по* $t\in[0, T]$;

4) начальный вектор z_0 *принадлежит области влияния точки покоя* $\hat z=\varphi(0)$ *начальной присоединенной системы* $\frac{d\hat z}{d\tau}=F(\hat z,0),\hat z(\tau)|_{\tau=0}=z^0,\tau\ge 0,$ *тогда при достаточно малых* $\varepsilon(0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$ *задача (10) однозначно разрешима на отрезке* $[0, T]$ *и имеет место оценка*

$$\|\,z(t,\varepsilon)-S_N(t,\varepsilon)\,\|_{C[0,T]}\le C_N\varepsilon^{N+1},$$

где $z(t,\varepsilon)$ *— точное решение задачи (10);*

$$S_N(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k z_0^{(k)}(t)+\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k z_1^{(k)}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

— частичная сумма ряда (14); постоянная $C_N>0$ *не зависит от* ε *при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_N](\varepsilon_N\le\varepsilon_0)$.

Таким образом, для нелинейных сингулярно возмущенных задач подтверждается истинность гипотезы С.А. Ломова, высказанная им в [6].

Отметим, что наличие секулярных членов типа $\tau^m e^{a(0)\tau}$ не позволяет использовать полученную асимптотику в случае, когда спектр $\sigma(A)=\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ содержит чисто мнимые точки ($a(0)=\omega i$, $\omega>0$). Преодолеть это можно с помощью методов регуляризации [4, 5, 8, 9] или усреднения [10].

Литература

1. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

2. **Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.** Асимптотическая теория контрастных структур // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 3—32.

3. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

4. **Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А.** Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации. М.: Издат. дом МЭИ, 2012.

5. **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Регуляризованные асимптотические решения сингулярно возмущенных интегральных систем с диагональным вырождением ядра // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 10. С. 1330—1341.

6. **Ломов С.А.** Асимптотическое решение дифференциальных уравнений с параметрами // Доклады АН СССР. 1971. Т. 196. № 2. С. 285—288.

7. **Тихонов А.Н.** Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575—586.

8. **Ломов С.А., Ломов И.С.** Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.

9. **Качалов В.И.** Теорема Тихонова о предельном переходе и псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных задач // Доклады РАН. 2014. Т. 458. № 6. С. 630—632.

10. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Изд-во АН СССР, 1963.

References

1. **Vasil'eva A.B., Butuzov V.F.** Asimptoticheskie Razlozheniya Resheniy Singulyarno Vozmushchennyh Uravneniy. M.: Nauka, 1973. (in Russian).

2. **Butuzov V.F., Vasil'eva A.B., Nefedov N.N.** Asimptoticheskaya Teoriya Kontrastnyh Struktur. Avtomatika i Telemekhanika. 1997;7:3—32. (in Russian).

3. **Lomov S.A.** Vvedenie v Obshchuyu Teoriyu Singulyarnyh Vozmushcheniy. M.: Nauka, 1981. (in Russian).

4. **Safonov V.F., Bobodzhanov A.A.** Kurs Vysshey Matematiki. Singulyarno Vozmushchennye Zadachi i Metod Regulyarizatsii. M.: Izdat. Dom MEI, 2012. (in Russian).

5. **Bobodzhanov A.A., Safonov V.F.** Regulyarizovannye Asimptoticheskie Resheniya Singulyarno Vozmushchennyh Integral'nyh Sistem s Diagonal'nym Vyrozhdeniem Yadra. Differentsial'nye Uravneniya. 2001;37;10: 1330—1341. (in Russian).

6. **Lomov S.A.** Asimptoticheskoe Reshenie Differentsial'nyh Uravneniy s Parametrami. Doklady AN SSSR. 1971;196;2:285—288. (in Russian).

7. **Tihonov A.N.** Sistemy Differentsial'nyh Uravneniy, Soderzhashchie Malye Parametry pri Proizvodnyh. Matematicheskiy Sbornik. 1952; 31 (73);3:575—586. (in Russian).

8. **Lomov S.A., Lomov I.S.** Osnovy Matematicheskoy Teorii Pogranichnogo Sloya. M.: Izd-vo MGU, 2011. (in Russian).

9. **Kachalov V.I.** Teorema Tihonova o Predel'nom Perekhode i Psevdogolomorfnye Resheniya Singulyarno Vozmushchennyh Zadach. Doklady RAN. 2014;458;6: 630—632. (in Russian).

10. **Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A.** Asimptoticheskie Metody v Teorii Nelineynyh Kolebaniy. M.: Izd-vo AN SSSR, 1963. (in Russian).

Сведения об авторах:

Бободжанов Абдухафиз Абдурасулович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: BobojanovA@mpei.ru
Сафонов Валерий Федорович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ»

Information about authors:

Bobodzhanov Abdukhafiz A. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: BobojanovA@mpei.ru
Safonov Valeriy F. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *11.12.2017*
The article received to the editor: *11.12.2017*