Теоретические основы информатики (05.13.17)

УДК 681.3:004.94
DOI: 10.24160/1993-6982-2019-2-109-117

Модели времени для сложных распределенных дискретных систем

В.П. Кутепов, В.Н. Фальк

Стимулом к созданию настоящей статьи стал тезис о неадекватности использования линейно-упорядоченных моделей времени при описании процессов в сложных дискретных системах, характеризующихся наличием компонентов с независимым поведением между моментами их взаимодействия, рекурсивно определенной, иерархически организованной, меняющейся (динамической), не ограниченной по сложности структурой и недетерминированным поведением. Причинно-следственные связи между возможными событиями в распределенной многокомпонентной системе, приводящие к изменениям ее состояния, определяют и минимально необходимый частичный порядок на множестве моментов времени возможных событий в системе. Под универсумом времени понимается класс изоморфных конечных частично-строго-упорядоченных множеств как необходимый базовый формализм. Отличие от других известных формализаций (таких как ациклические орграфы, диаграммы Хассе и др.) заключается в использовании строгого частичного порядка, полагая, что множество одновременных событий в системе можно рассматривать как одно сложное событие. Наличие указанных особенностей сложных систем требует анализа множеств универсумов времени как в силу возможного недетерминизма поведения систем, так и вследствие изменений в результате происходящих событий структуры самой системы и действующих в ней причинно-следственных связей. Возникает задача конструктивного описания различной сложности множеств универсумов времени, прежде всего, бесконечных, аналогичная заданию формальных языков как множеств слов в некотором алфавите. Подобная задача была решена авторами в теории направленных отношений (НО) — базового формализма для построения языков декларативного программирования с использованием сетевого представления НО. Ключевым моментом такого решения является корректное определение операции подстановки сети в другую сеть вместо ее некоторого элемента, играющего роль вхождения сетевой переменной в конструкцию сети и имеющего те же спецификации, что и подставляемая сеть. Введенные понятия Т-сети и Т-сетевого языка, т.е. множества Т-сетей, используются для конструктивного задания множеств универсумов времени при моделировании параллельных процессов в системах. Основным синтаксическим отличием Т-сетей от сетей НО является требование отсутствия циклов в Т-сетях, что обеспечивается выполнением некоторых предложенных ограничений на компоненты сетей. Доказана корректность по отношению к этим ограничениям операции подстановки. Операция подстановки может использоваться как для иерархического построения Т-сетей, так и для многовариантного и рекурсивного задания множеств Т-сетей. Описано применение операции подстановки для задания представительного класса контекстно-свободных Т-сетевых языков с помощью контекстно-свободных Т-сетевых грамматик. Использован простой пример грамматики для описания модели времени для процесса параллельного рекурсивного вычисления определенного интеграла. Определены направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: распределенные многокомпонентные дискретные системы, динамические системы, формализация времени в системах, частично-упорядоченные множества, универсумы времени, средства конструктивного задания множеств универсумов времени, Т-сети, контекстно-свободные Т-сетевые языки и грамматики.

Для цитирования: Кутепов В.П., Фальк В.Н. Модели времени для сложных распределенных дискретных систем // Вестник МЭИ. 2019. № 2. С. 109—117. DOI: 10.24160/1993-6982-2019-2-109-117.

Time Models for Complex Distributed Discrete Systems

V.P. Kutepov, V.N. Falk

The impetus for writing this article was the thesis about the inadequacy of using linearly-ordered time models in describing processes in complex discrete systems characterized by the presence of components with independent behavior between the moments of their interaction, with recursively defined, hierarchically organized, varying (dynamic) structure unlimited in complexity, and with non-deterministic behavior. The cause-and-effect relationships between possible events in a distributed multicomponent system leading to changes in its state determine, among other things, the minimally necessary partial order in the set of time instants corresponding to possible events in the system. The time universe is understood to mean the class of isomorphic finite partially-strictly ordered sets as a necessary basic formalism. The above-mentioned concept differs from other well-known formalizations (such as acyclic digraphs, Hasse diagrams, etc.) in that it uses a strictly partial order under the assumption that the set of simultaneous events in the system can be considered as one complex event. The presence of the above-mentioned features of complex systems generates the need to analyze the sets of time universes both in view of possible non-determinism in the behavior of systems and as a consequence of changes resulting from events associated with the system structure itself and the cause-and-effect relationships acting in it. The problem of developing a constructive description---with different degrees of complexity---of time universe sets, primarily infinite ones, which is similar to specifying formal languages as sets of words in a certain alphabet. The authors have solved a similar problem in the theory of directed relationships - the basic formalism for constructing declarative programming languages using the network representation of directed relationships. The key point of such solution is to correctly define the operation of substituting a network into another network instead of some element thereof, which plays the role of entering the network variable into the network structure and has the same specifications as the substituted network. The T-network and T-network language notions introduced in the article, i.e., sets of T-networks, are used to constructively specify the sets of time universes in modeling parallel processes in systems. The main syntactic difference between T-networks and networks of directed relationships is the requirement that T-networks shall not contain cycles, which is ensured by fulfilling certain proposed restrictions posed to network components. The correctness of the substitution operation with respect to these restrictions is proven. The substitution operation can be used both for hierarchically constructing T-networks and for multivariate and recursive assignment of T-network sets. Application of the substitution operation for defining a representative class of context-free T-network languages using context-free T-network grammars is described. A simple grammar example describing the time model for parallel recursive calculation of a definite integral is given, and further research lines are pointed out.

Key words: distributed multicomponent discrete systems, dynamic systems, time formalization in systems, partially ordered sets, time universes, constructive time universe sets assignment tools, T-networks, context-free T-network languages and grammars.

For citation: Kutepov V.P., Falk V.N. Time Models for Complex Distributed Discrete Systems. Bulletin of MPEI. 2019;2:109—117. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2019-2-109-117.

Propter hoc ergo post hoc[1]

Введение

Понятие времени — одно из важнейших при исследовании поведения различных объектов, систем и процессов. Когда рассматривают приводящие к смене состояний системы причинно-следственные связи событий, предполагают, что следствие всегда наступает после появления причины. Кроме того, как правило, для смены состояний в общем случае необходимо одновременное наличие нескольких причин.

В простейшем случае при анализе поведения дискретных систем множество возможных моментов времени событий, именуемое универсумом времени, формально описывается как линейно-упорядоченное множество («общие часы») с теми или иными дополнительными свойствами: характеристикой мощности (конечное, счетное или континуум), наличием (сверху и/или снизу) или отсутствием ограничений, наличием наибольшего и/или наименьшего элемента, видом отношения порядка (дискретное, плотное или непрерывное), степенью разрешимости (рекурсивное, рекурсивно-перечислимое или рекурсивно не перечислимое), способом задания (конструктивно заданное или имеющее вероятностную или нечеткую природу) и т. д. При этом наблюдатель (пассивный или потенциально активный) имеет дело с трассой процесса в системе — последовательностью происходящих событий, упорядоченной по неубыванию их времен. Однако, отдельная трасса и, как правило, даже ограниченное количество наблюдаемых трасс не позволяют выявить имеющиеся причинно-следственные связи событий в распределенной многокомпонентной системе, необходимые для понимания поведения системы и, тем более, для управления ею. Возможных причин этого много: недетерминированность поведения системы, в том числе и времени протекания самих событий; наличие каналов связи между компонентами с недетерминированными временными характеристиками; компоненты с независимым поведением на некоторых интервалах времени, особенно в случае сложных систем с иерархической организацией, возможность событий, изменяющих структуру самой так называемой динамической системы, сложность которой может неограниченно возрастать. Только в весьма ограниченном числе случаев требуемое решение может быть получено при наличии, например, множества всех возможных трасс поведения системы.

В результате теряют смысл сравнение времен событий в той или иной степени независимых компонентах системы, а вместе с этим и общая трассировка поведения системы. Естественным решением, на наш взгляд, является завоевывающая все большее признание концепция универсума времени, как частично-упорядоченного множества.

Одной из наиболее близких нам по существу подхода к концепции времени при описании процессов в сложных дискретных системах можно считать работу [1]. Среди других публикаций отметим статьи [2, 3], которые посвящены построению оптимальных алгоритмов упорядочения событий в системе на основании отслеживания и упорядочивания моментов взаимодействия компонентов системы и установлении причинно-следственных связей между событиями. В отличие от более простых и ограниченных алгоритмов, основанных на так называемых скалярных [4] и векторных [5] представлениях временных отсчетов, в [3] использованы иерархические часы, которые позволяют компоненту системы явно определять не только следование событий, но также устанавливать причинно-следственные связи между ними. Работа [6] дает представление о временных процессных алгебрах, которые создавались с целью описания последовательно-параллельных процессов с учетом различных способов задания в

[1] «Вследствие этого, следовательно, после этого»

них времени. Применение традиционных средств описания частично-упорядоченных множеств определяет и наш интерес к новым работам по их классификации, композиции и различным отношениям на универсуме ациклических орграфов [7].

Под универсумом времени в работе понимается класс изоморфных конечных частично строго упорядоченных множеств как необходимый базовый формализм. Отличием от других известных формализаций (таких как ациклические орграфы, диаграммы Хассе и др.) является использование строгого частичного порядка, полагая, что множество одновременных событий в системе можно рассматривать как одно сложное событие. Наличие подобных особенностей сложных систем требует анализа множеств универсумов времени как в силу возможного недетерминизма поведения систем, так и вследствие изменения в результате происходящих событий структуры самой системы и действующих в ней причинно-следственных связей. В связи с этим встает задача конструктивного описания различной сложности множеств универсумов времени, подобная задаче описания формальных языков как множеств слов в некотором алфавите с использованием различных грамматик.

Предложены средства конструктивного задания множеств универсумов времени, необходимые для моделирования реальных параллельных процессов в сложных дискретных системах.

Базовые понятия

Приведем необходимые понятия и некоторые используемые обозначения.

Пусть $\pi \subseteq X{\times}X$ — транзитивное антирефлексивное отношение строгого порядка на множестве X (вместо $\langle x', x''\rangle \in \pi$ будем писать $x' < x''$). Транзитивность — $(\forall, x', x'' \in X)(x' < x'' \wedge x'' < x''' \supset x' < x''')$, антирефлексивность — $(\forall x \in X) \neg (x < x)$. Асимметричность $(\forall x', x'' \in X) \neg (x' < x'' \wedge x'' < x')$ является следствием транзитивности и антирефлексивности. Иными словами, $\langle X, \pi\rangle$ — частично (строго) упорядоченное множество. Истинность $x' < x'' \vee x'' < x'$ означает сравнимость $x', x'' \in X$.

Без существенных потерь для исследования предположим, что в X нет «лишних» элементов, не сравнимых ни с одним другим элементом X: $(\forall x' \in X)\times$ $\times(\exists x'' \in X)(x' < x'' \vee x'' < x')$. Элемент $\overleftarrow{x} \in X$ называется минимальным в X, если $\neg(\exists x \in X)(x < \vec{x})$. Элемент $\vec{x} \in X$ называется максимальным в X, если $\neg(\exists x \in X)(\vec{x} < x)$. Если в X имеется единственный минимальный элемент (обозначим его $\breve{x}$), то он называется наименьшим в X, если в X есть единственный максимальный элемент (обозначим его $\breve{x}$), то он называется наибольшим в X. Существование наименьшего (наибольшего) элемента в X постулируется аксиомой $(\exists \breve{x} \in X)(\forall x \in X)(x \neq \breve{x} \supset \breve{x} < x)$ $((\exists \widehat{x} \in X)(\forall x \in X)(x \neq \widehat{x} \supset x < \widehat{x})$, соответственно).

Если X — конечное множество $|X| \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$), то и количество различных (с точностью до изоморфизма) частично (строго) упорядоченных множеств любой мощности конечно, а, следовательно, нет проблемы их конструктивного задания.

Предложены средства конструктивного задания множеств подобных множеств, в общем случае бесконечных, а, следовательно, и неограниченных по сложности. Одной из возможных форм задания конечных частично-упорядоченных множеств является их описание на базе ациклических орграфов на множестве вершин X в общем случае с несколькими компонентами связности. С учетом принятого соглашения предполагается, что в графе нет изолированных вершин. Поскольку множество D дуг в произвольном орграфе $G = \langle X, D\rangle$ без петель есть подмножество множества всевозможных двухэлементных упорядоченных подмножеств X, то оно представляет собой некоторое бинарное антирефлексивное отношение $\dot{P}$ на X. В наших обозначениях[2] это записывается так: $D \subset X^{[2]}$, а множество всевозможных орграфов без петель и изолированных вершин на множестве вершин X есть $(X^{[2]})^{\{\}}$. Если орграф ацикличен, т. е. для любой его дуги $[x', x''] \in D$ не существует пути из x'' в x', то транзитивное замыкание любого такого отношения $\dot{P}$ является, очевидно, отношением частичного (строгого) порядка на X[3].

Т-сети

Целью работы является создание практически удобных средств конструктивного задания множеств универсумов времени для последующего адекватного описания поведения иерархически и рекурсивно организованных систем.

Для достижения этой цели, во-первых, авторы основываются на традиционном представлении конечных частично-упорядоченных множеств ациклическими орграфами (как следствие, без петель). Во-вторых, поскольку поведение систем, как правило, не носит детерминированный характер и предполагает возможность разных реализаций в них процессов, то необходимым объектом описания становятся не конкретные универсумы времени, а множества возможных универсумов. Особенно актуальным это является для динамических систем, структура которых меняется во времени, а сложность неограниченно возрастает. В связи с

[2] Например, в [10] . Для различных конечных наборов элементов некоторого множества X используются различные скобки: $\langle\ \rangle$ — для кортежей; ( ) — для комплектов (мультимножеств конечной мощности); { } — для подмножеств конечной мощности; [ ] — для упорядоченных подмножеств конечной мощности. Соответственно, множества всех конечных наборов элементов X этих типов обозначаются как $X^{\langle\rangle}$, $X^{()}$, $X^{\{\}}$, $X^{[]}$, а их подмножества наборов из конкретного числа $n \in \mathbb{N}_0$ элементов, как $X^{\langle n\rangle}$, $X^{(n)}$, $X^{\{n\}}$, $X^{[n]}$.

[3] В математической среде больше внимания уделено проблемам классификации, композиции и различным отношениям на универсуме ациклических орграфов, например [5].

этим, вместо формализма теории графов предложено использовать более семантически сложные понятия Т-сети и Т-сетевого языка (множества Т-сетей), во многом подобные тем, которые использовались в теории направленных отношений [8, 9].

В основе понятия Т-сети лежит понятие двудольного графа с вершинами двух видов: точками и элементами. Арностью Т-сети и арностью элемента Т-сети называется упорядоченная пара $\langle n', n'' \rangle$ натуральных чисел $n', n'' \in \mathbb{N}_0$, означающая количества входов и выходов Т-сети или ее элемента.

Определение. Базисом B называется конечное множество сортов элементов Т-сети. Функции $\nu', \nu'' : B \to \mathbb{N}_0$ задают арность $\langle \nu'(b), \nu''(b) \rangle$ элементов Т-сети каждого сорта $b \in B$ (сорт элемента и всей Т-сети может указываться в виде их правого верхнего индекса). Базис в общем случае разбивается на два подмножества: $B_т$, $B_н$ — терминальный и нетерминальный базисы, $B_т \cap B_н = \varnothing$. Для простоты полагаем, что имеется один терминальный сорт f арности $\langle 1, 1 \rangle$.

На рисунке 1 показано графическое представление терминальных элементов указанных сортов, а также элемента нетерминального сорта $b^{\langle n', n'' \rangle} \in B_н$.

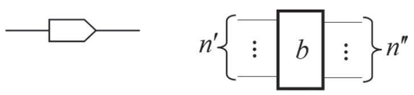

Рис. 1. Графическое представление элементов Т-сетей

Определение. Т-сетью $S^{\langle n', n'' \rangle}$ ($\langle n', n'' \rangle$ — арность Т-сети) в базисе B называется набор $\langle P, I, O, E, D \rangle$, где P — конечное множество точек Т-сети; I — кортеж $I \in P^{\langle n' \rangle}$ входных точек Т-сети; O — кортеж $O \in P^{\langle n'' \rangle}$ выходных точек Т-сети; E — комплект[4] элементов $e = \langle b_e, I_e, O_e \rangle$ Т-сети; b_e — сорт элемента; $I_e \in P^{\langle \nu'(b_e) \rangle}$, $O_e \in P^{\langle \nu''(b_e) \rangle}$ — кортежи входных и выходных точек элемента; D — множество ребер $d \in P^{\{2\}}$ неориентированного графа без петель — dif-графа[5] Т-сети.

Предполагается, что во множестве точек нет «лишних» точек, не являющихся ни входами, ни выходами Т-сети, ни входами, ни выходами ни одного элемента Т-сети и не инцидентных ни одному ребру ее dif-графа. Для наглядности используем графическое представление Т-сетей, которое определяется аналогично графическому представлению сетей направленных отношений [6, 7], причем отличие фактически состоит только в представлении элементов терминальных сортов (рис. 1). Данное представление предполагает, что Т-сети рассматриваются с точностью до изоморфизма относительно множества точек Т-сети (то есть в графическом представлении не требуется указывать имена точек и элементов сети).

Кортежи входных и выходных точек, элементы нетерминальных сортов вводятся как компоненты Т-сети для эффективного задания иерархически организованных универсумов времени и рекурсивно определенных множеств универсумов времени. С их помощью определим[6] операцию подстановки. В качестве основы определения воспользуемся введенным в [7] определением операции подстановки для сетей направленных отношений. Заметим, что для того, чтобы не указывать направления связей между точками и элементами Т-сети нетерминальных сортов, при графическом представлении эти элементы размещаются так, что слева указываются их связи с входными точками, а справа — с выходными, в порядке перечисления сверху-вниз. То же относится и к представлению входных и выходных точек Т-сети: первые связываются с левой стороной ограничивающего представление сети прямоугольника, а вторые — с правой, так же в порядке перечисления сверху-вниз.

Т-сеть можно рассматривать как специальным образом нагруженный двудольный орграф с вершинами двух видов (точки и элементы): элементы взвешены сортами из базиса; дуги, входящие в элементы и выходящие из них, линейно упорядочены (в графическом представлении — сверху-вниз), а их количества определяются сортами элементов (кроме того, дополнительно задаются компоненты I, O и D). Это позволяет не определять известные понятия пути, цикла и т. д. относительно точек Т-сети. Поскольку нас интересуют только Т-сети без циклов, то полагаем необходимым выполнение дополнительного требования к их компонентам.

Ограничение 1: множество точек Т-сети ранжируемо — существует функция ранжирования $\rho : P \to \mathbb{N}_0$, такая, что для любого элемента Т-сети, его любых выходной p'' и входной p' точек выполняется условие $\rho(p') < \rho(p'')$.

Утверждение. Для любой функции ранжирования ρ и любых $k, n \in \mathbb{N}_0$ функция ρ', такая, что

$$(\forall p \in P)((\rho(p) < n \supset \rho'(p) = \\ = \rho(p)) \wedge (\rho(p) \geq n \supset \rho'(p) = \rho(p) + k))$$

также является функцией ранжирования (доказательство очевидно).

Если ранжирование возможно, то в Т-сети нет циклов, и существует «минимальная» функция ранжирования ρ_{min}, такая, что для любой другой функции ранжирования ρ выполняется условие $(\forall p \in P)(\rho_{\min}(p) \leq \rho(p))$:

[4] В отличие от теории направленных отношений [8, 9], в Т-сетях возможно наличие нескольких одинаковых элементов (комплект — мультимножество конечной мощности).

[5] Назначение этого практически полезного компонента Т-сети раскрывается в разделе «Интерпретация Т-сетей и Т-сетевых языков».

[6] Алгебраический подход к композиции Т-сетей и Т-сетевых языков (множеств Т-сетей) в настоящей работе не рассматривается, также как и логические исчисления их содержательной эквивалентности, и формализации отношения вложения.

• $\rho(p) = 0$, если и только если p не является выходной точкой некоторого элемента;

• в противном случае $\rho(p) = \max\limits_{p' \in \overleftarrow{P}(p)} \rho(p') + 1$, где $\overleftarrow{P}(p)$ — множество всех входных точек всех элементов, для которых точка p является выходной.

Заметим, что существует простой итерационный алгоритм определения ранжируемости Т-сети, который при положительном ответе задает для всех точек этой сети значения функции $\rho_{\min}$.

Очевидно, что Т-сети арности $\langle 0,\ 0\rangle$ (отсутствуют такие компоненты, как входы и выходы сети) с пустым dif-графом, а все элементы — терминального сорта представляют собой не что иное, как однозначно определяющие универсумы времени ациклические орграфы, дуги которых суть элементы Т-сети терминального сорта. Неиспользуемые компоненты (кортежи входов и выходов Т-сети, dif-граф, элементы нетерминальных сортов) введены для рассматриваемого задания множеств универсумов времени.

На множестве возможных универсумов времени естественным образом вводится отношение $\leq$ частичного порядка (не строгого). Пусть $\langle X', \pi'\rangle$ и $\langle X'', \pi''\rangle$ — два универсума времени. Если $X' \subseteq X''$ и $\pi' \subseteq \pi''$, то универсум $\langle X'', \pi''\rangle$ является расширением универсума $\langle X', \pi'\rangle : \langle X', \pi'\rangle \leq \langle X'', \pi''\rangle$. Более общей формулировкой такого рода отношения вложения универсумов времени (с учетом того, что рассматриваются универсумы времени с точностью до изоморфизма множеств моментов времени) является истинность утверждения

$$(\exists \tau : X' \to X'')(\forall x_1, x_2 \in X')\times$$
$$\times\left(\left\langle x_1, x_2\right\rangle \in \pi' \supset \left\langle \tau(x_1), \tau(x_2)\right\rangle \in \pi''\right).$$

Иногда на практике, вместо минимально необходимого универсума времени $\langle X', \pi'\rangle$, удобен некоторый расширенный универсум $\langle X'', \pi''\rangle$. Очевидно, что любой универсум времени вложим в некоторый линейно-упорядоченный универсум времени.

Определим результат $\ddot{S}^{\langle \dot{n}', \dot{n}''\rangle}$ подстановки Т-сети $\dot{S}^{\langle \dot{n}', \dot{n}''\rangle} = \left\langle \dot{P}, \dot{I}, \dot{O}, \dot{E}, \dot{G}\right\rangle$ в Т-сеть $S^{\langle n', n''\rangle} = \left\langle P, I, O, E, G\right\rangle$ вместо ее элемента $e = \langle b_e, I_e, O_e\rangle$ нетерминального сорта той же арности $\langle n', n''\rangle$, что и подставляемая Т-сеть. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что $P \cap \dot{P} = \varnothing$:

$$\ddot{S}^{\langle \dot{n}', \dot{n}''\rangle} = \left[I_e[1]/\dot{I}[1]\right]\ldots\left[I_e[n']/\dot{I}[n']\right]\times$$
$$\times\left[O_e[1]/\dot{O}[1]\right]\ldots\left[O_e[n'']/\dot{O}[n'']\right]\times$$
$$\times\left\langle P \cup \dot{P}, I, O, E \setminus \{e\}, G \cup \dot{G}\right\rangle.$$

Определение операции подстановки с использованием графического представления проиллюстрировано на рис. 2.

Если (согласно определению рис. 2) в dif-графе результата образуются петли, то результат подстановки

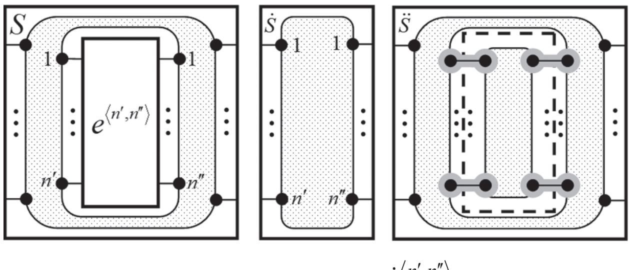

Рис. 2. Операция подстановки Т-сети $\dot{S}^{\langle n', n''\rangle}$ в Т-сеть S вместо ее элемента $e^{\langle n', n''\rangle}$. $\ddot{S}$ – результат подстановки

не определен. В процессе подстановки может происходить отождествление некоторых точек, являющихся входными для нетерминального элемента, вместо которого выполняется подстановка, и входными подставляемой Т-сети, и считающихся выходными для нетерминального элемента, вместо которого выполняется подстановка, и выходными подставляемой Т-сети. Для того, чтобы в результате подстановки ациклической Т-сети в ациклическую Т-сеть полученная сеть также была ациклической, то есть ранжируемой, необходимо ввести дополнительные ограничения на компоненты I и O в определении Т-сети:

Ограничение 2. Две любые различные точки, входящие одновременно или в кортеж I, или в кортеж O, не связаны в Т-сети некоторым путем. То же ограничение действует для входных и выходных точек нетерминальных элементов Т-сети (для терминальных элементов арности $\langle 1,\ 1\rangle$ такой проблемы нет).

Иными словами, в интерпретации Т-сети все входные и выходные точки попарно не сравнимы. Заметим, что из требования ранжируемости точек сети следует и выполнение утверждения: для любого элемента Т-сети для любой точки, входящей в кортеж выходных точек Т-сети, нет пути ни в одну из входных точек этого элемента.

Ограничение 3. Одна и та же точка не может быть одновременно и входной, и выходной точками Т-сети (для входов и, соответственно, выходов элементов это следует из ранжируемости точек сети).

Докажем корректность операции подстановки, т. е. покажем, что при выполнении ограничений 1 — 3 для участвующих в подстановке сетей результат подстановки также удовлетворяет требованиям этих ограничений.

Доказательство. Исходные Т-сети S и $\dot{S}$ ранжированы функциями ρ и $\dot{\rho}$, соответственно. Пусть максимальный ранг точек в Т-сети $\dot{S}$ равен $\dot{k}_{\max}$, максимальный ранг входных точек элемента e в Т-сети S, вместо которого подставляется $\dot{S}$, равен $k_{\max}$. Из ранжируемости Т-сети S следует, что минимальный ранг выходных точек этого элемента строго больше максимального ранга его входных точек. Сначала не будем учитывать, что при подстановке может происходить отождествление точек, как при объединении входных и выходных точек элементов Т-сетей S и $\dot{S}$. В этом случае, согласно сформулированному утверждению, искомое ранжирование $\ddot{\rho}$ можно определить так:

• для всех точек $\dot{p}$ Т-сети $\ddot{\rho}(\dot{p}) \cong \dot{\rho}(\dot{p}) + k_{\max}$ ($\cong$ — равно по определению), для всех точек p Т-сети S, таких, что $\rho(p) > k_{\max}$, $\ddot{\rho}(p) \cong \rho(p) + \dot{k}_{\max}$;

• при отождествлении i-й входной точки p элемента e с i-й входной точкой $\dot{p}$ Т-сети $\dot{S}$ (обозначим ее как $\ddot{p}$) положим $\ddot{\rho}(\ddot{p}) \cong \min(\ddot{\rho}(p), \ddot{\rho}(\dot{p}))$.

В случаях отождествления одной или более входных точек элемента e с одной или более входными точками Т-сети $\dot{S}$ и при отождествлении одной или более выходных точек элемента e с одной или более выходными точками Т-сети $\dot{S}$, полагаем, что ранг полученной точки $\ddot{p}$ определен как минимальный из рангов отождествленных точек. Таким образом, для полученной в результате подстановки Т-сети $\ddot{S}$ сохранятся ранжируемость множества точек и выполнение введенных ограничений.

Рекурсивное задание множеств Т-сетей

По аналогии с определениями сетевых языков схем направленных отношений [7] Т-сетевым языком арности $\langle n', n'' \rangle$ называется множество Т-сетей одинаковой арности $\langle n', n'' \rangle$ с элементами исключительно терминального сорта (в терминальном базисе).

Потребность в задании именно множеств универсумов времени, а, следовательно, и множеств задающих их Т-сетей, естественно возникает при описании сложных систем, поведение которых, как правило, является недерминированным, а конфигурация системы может меняться в процессе ее функционирования.

Для задания Т-сетевых языков используют различные сетевые грамматики, в частности, наиболее практически важными являются контекстно-свободные Т-сетевые грамматики (кстс-грамматики). Кстс-грамматикой называется (по аналогии с традиционной контекстно-свободной формальной грамматикой) набор $G = \langle B_{\text{н}}, \alpha, P \rangle$, где $B_{\text{н}}$ — множество нетерминальных сортов элементов (нетерминальный базис)[7]; $\alpha^{\langle n', n'' \rangle} \in B_{\text{Н}}$ — аксиома грамматики; P — множество правил грамматики вида $\beta \to S$, где $\beta^{\langle m', m'' \rangle} \in B_{\text{Н}}$, а $S^{\langle m', m'' \rangle}$ — Т-сеть в базисе $B = \{f\} \cup B_{\text{н}}$ той же арности, что и сорт β.

Т-сетевой язык, заданный кстс-грамматикой G, определяется как подмножество всех Т-сетей арности $\langle n', n'' \rangle$, не содержащих элементов нетерминальных сортов из числа выводимых из аксиомы $\alpha^{\langle n', n'' \rangle}$ применением правил из P:

• все Т-сети (правые части правил вывода для аксиомы) выводимы в грамматике G;

• если Т-сеть $S^{\langle n', n'' \rangle}$ выводима, e — ее элемент сорта β и $\beta \to \dot{S}$ — правило из P, то и Т-сеть, полученная подстановкой в Т-сеть S Т-сети $\dot{S}$ вместо элемента e, также выводима в грамматике G.

Если аксиома грамматики имеет арность $\langle 0, 0 \rangle$, то Т-сетевой язык интерпретируется как множество универсумов времени.

Интерпретация Т-сетей и Т-сетевых языков

Точки Т-сети интерпретируются как моменты времени — элементы универсумов времени, т. е. конечных частично строго упорядоченных множеств. Сами универсумы времени представлены в интерпретации Т-сетями арности $\langle 0, 0 \rangle$, все элементы которых — терминальных сортов, а dif-граф — пустой, т. е. фактически ациклическими орграфами. Отношение строгого порядка для представленных точками сети моментов времени эквивалентно наличию в такой Т-сети пути из одной точки в другую.

Множество такого рода Т-сетей интерпретируется как множество универсумов времени, а их эквивалентность (вложение) — как изоморфизм (гомоморфизм) их интерпретаций как множеств частично (строго) упорядоченных множеств.

Если рассматривать Т-сети с произвольными dif-графами при сохранении других ограничений, то можно определить эквивалентность одной Т-сети (точнее, одноэлементного множества Т-сетей) некоторому конечному подмножеству Т-сетей с пустыми dif-графами. Ребро $[p', p'']$ dif-графа в интерпретации понимается как сравнимость сопоставленных этим точкам моментов времени t' и t'' , т. е., истинно либо $t' < t''$, либо $t'' < t'$. Следовательно, если в Т-сети есть путь из точки p' в точку p'' или, наоборот, из точки p'' в точку p' (одновременно быть не может), то ребро $[p', p'']$ можно удалить. В противном случае исходная Т-сеть эквивалентна подмножеству из двух таких же Т-сетей без этого ребра в dif-графе, но каждая с одним дополнительным элементом сорта f : $\langle f, p', p'' \rangle$ и $\langle f, p'', p' \rangle$, соответственно.

Для Т-сетевых языков L_1 и L_2 проблема включения в интерпретации сводится к доказательству того, что для любой Т-сети из L_1 существует Т-сеть в L_2, в которую она вложима. Эквивалентность сетевых языков понимается как их взаимное включение.

Элементы нетерминальных сортов Т-сетей являются, по существу, свободными вхождениями в Т-сети сетевых переменных, а содержащие их Т-сети — схемами множеств универсумов времени. Поэтому для Т-сетей с нетерминальными элементами их включение и эквивалентность понимаются, соответственно, как сильные включение и эквивалентность (соответствующие отношения при любой интерпретации нетерминальных элементов) и детально в настоящей работе не рассматривается.

В качестве иллюстрации средств графического представления Т-сетей и грамматик для задания Т-сетевых языков приведем достаточно простой при-

[7] Терминальный базис, в отличие от формальных грамматик, всегда один и тот же — $\{f\}$.

мер (использованы пустой dif-граф, нетерминальные сорта элементов только арности $\langle 1, 1\rangle$). Он демонстрирует задание множества универсумов времени для различных этапов рекурсивного (дихотомического) вычисления значения определенного интеграла заданной унарной достаточно «гладкой» функции F на заданном интервале $[x', x'']$ с заданной точностью e методом трапеций (рис. 3):

Элементарные функции:

$$\mathrm{d2}(a) = a/2,\ \mathrm{div}(a,b) = a/b,\ \mathrm{sub}(a,b) = a-b,$$
$$\mathrm{add}(a,b) = a+b,\ \mathrm{mlt}(a,b) = a\cdot b,\ \mathrm{mid}(a,b) = (a+b)/2;$$
$$\mathrm{abs}(a) = |a|,\ \mathrm{le}(a,b) = a \le b;$$

основная функция:

$$I(x', x'', e) = \overline{I}(F(x'), F(x''), \mathrm{mid}(x', x''), (\mathrm{d2}(\overline{x}), \mathrm{div}(e, \overline{x}) \quad \textbf{where } \overline{x} = \mathrm{sub}(x', x''));$$

вспомогательная рекурсивная функция:

$$\begin{aligned}\overline{I}(f', f'', x, h, ee) = (&\textbf{if } \mathrm{le}(\mathrm{abs}(\mathrm{sub}(f, \overline{f})), ee)\\ &\textbf{then } \mathrm{mlt}(\mathrm{add}(\mathrm{add}(f', f),\ \mathrm{add}(f, f'')), hh)\\ &\textbf{else } \overline{I}(f', f, \mathrm{sub}(x, hh), hh, ee) + \\ &\quad + \overline{I}(f, f'', \mathrm{add}(x, hh), hh, ee)\\ &\textbf{where } hh = \mathrm{d2}(h), f = F(x),\\ &\quad \overline{f} = \mathrm{mid}(f', f'')).\end{aligned}$$

Т-сети — правые части правил сетевой грамматики отражают функциональные, а, следовательно, и причинно-следственные связи событий в реализующей вычисления системе. Стандартные модели вычислений значений элементарных функций в форме Т-сетей показаны на рис. 4. Условные определения и вызов функций, представленных нетерминальными сортами, реализованы без опережающих вычислений. Входные точки — моменты завершений вычислений отдельных

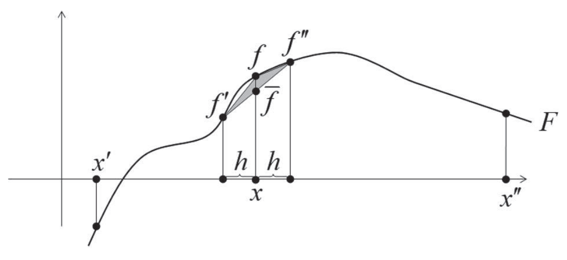

Рис. 3. Иллюстрация к примеру

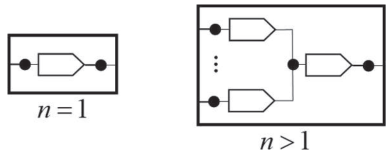

Рис. 4. Т-модель n-арного функционального преобразователя

аргументов, выходная точка — завершение вычисления значения функции, внутренняя точка — начало вычисления значения функции.

На рис. 5 даны правила кстс-грамматики (I — аксиома; $\{I, \dot{I}, \overline{I}, F\}$ — нетерминальный базис). Для наглядности связи правил грамматики с приведенным функциональным описанием функции I (аксиома грамматики) на рисунке 5 в правых частях правил у некоторых точек указаны переменные, моменты времени завершения вычислений значений которых они представляют, а в представлениях некоторых элементов терминальных сортов даны имена элементарных функций, вычисление которых они моделируют. Остальные элементы терминальных сортов отражают действия по упаковке и распаковке наборов данных. Отметим, что не показано правило (или правила) грамматики для нетерминального сорта F: если процесс вычисления значения этой функции носит сложный (параллельный, рекурсивный) характер, возможно, потребуются дополнительные нетерминальные сорта элементов и соответствующие правила грамматики. В противном случае, функция F может моделироваться так же, как и элементарные функции.

Заключение

Хорошо известны многие средства задания не только контекстно-свободных, но и более широких классов формальных языков. Их адаптация к заданию Т-сетевых языков и разработка новых специализированных видов Т-сетевых грамматик помогут строить модели времени для описания поведения сложно организованных дискретных систем.

За рамками публикации остались такие вопросы, как алгебраический подход к описанию различных классов Т-сетей, построение исчислений эквивалентности и вложений Т-сетей и Т-сетевых языков, а также временное моделирование различных способов взаимодействия процессов в системах, в том числе и механизма прерывания. Авторы продолжают работу в этих направлениях.

Литература

1. **Ковалев С.П.** Архитектура времени в распределенных информационных системах // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7. № 6. С. 38—53.

2. **Winkowski J.** An Algebraic Framework for Concurrent Systems // Rep. No. 1023. Institute of the Polish academy of science, 2012.

3. **Prakash R., Singhal M.** Dependency Sequences and Hierarchical Clocks: Efficient Alternativesto Vector

References

1. **Kovalev S.P.** Arkhitektura Vremeni v Raspredelennykh Informatsionnykh Sistemakh. Vychislitel'nye Tekhnologii. 2002;7;6:38—53. (in Russian).

2. **Winkowski J.** An Algebraic Framework for Concurrent Systems. Rep. No. 1023. Institute of the Polish academy of science, 2012.

3. **Prakash R., Singhal M.** Dependency Sequences and Hierarchical Clocks: Efficient Alternativesto Vector

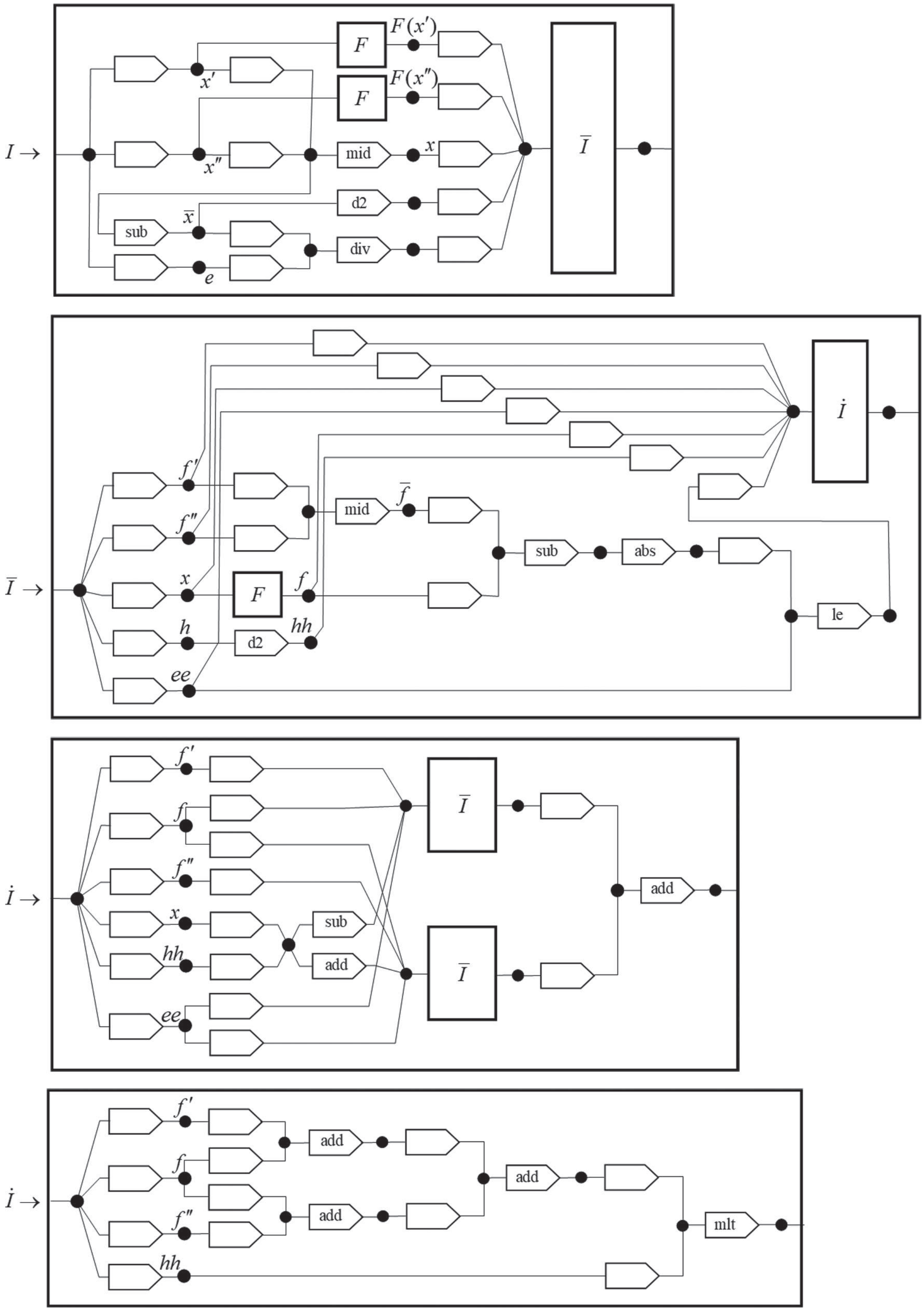

Рис. 5. Правила кстс-грамматики

Clocks for Mobile Computing Systems // ACM J. Wireless Network. 1997. No. 3. Pp. 349—360.

4. **Lamport L.** Time, Clock and the Ordering of Events in Distributed Systems // Communications of ASM. 1978. V. 21 (7). Pp. 358—365.

5. **Fidge J.** Timestamps in Message-passing Systems that Preserve the Partial Ordering // Proc. XI Australian Computer Sci. Conf. 1988. V. 10. No. 1. Pp. 56—66.

6. **Middelburg C.A.** Revisiting Timing in Process Algebra // J. Logic and Algebraic Programming. 2003. V. 54. Pp. 109—127.

7. **Аль Джабри Х.Ш., Родионов В.И.** Граф ациклических орграфов // Вестник Удмуртского ун-та. Серия «Математика. Механика. Компьютерные науки». 2015. Т. 25. № 4. С. 441—452.

8. **Кутепов В.П., Фальк В.Н.** Направленные отношения: теория и приложения // Известия РАН. Серия «Техническая кибернетика». 1994. № 5. С. 114—123.

9. **Фальк В.Н.** Теория направленных отношений и ее приложения: автореф. дисс. … докт. техн. наук. М.: МЭИ, 2001.

10. **Фальк В.Н.** Об одном подходе к эффективной нумерации рекурсивных множеств конструктивных объектов // Вестник МЭИ. 2013. № 4. С. 209—215.

Clocks for Mobile Computing Systems. ACM J. Wireless Network. 1997;3:349—360.

4. **Lamport L.** Time, Slock and the Ordering of Events in Distributed Systems. Communications of ASM. 1978; 21 (7):358—365.

5. **Fidge J.** Timestamps in Message-passing Systems that Preserve the Partial Ordering. Proc. XI Australian Computer Sci. Conf. 1988;10;1:56—66.

6. **Middelburg S.A.** Revisiting Timing in Process Algebra. J. Logic and Algebraic Programming. 2003;54: 109—127.

7. **Al' Dzhabri Kh.Sh., Rodionov V.I.** Graf Atsiklicheskikh Orgrafov. Vestnik Udmurtskogo Un-ta. Seriya «Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki». 2015; 25;4:441—452. (in Russian).

8. **Kutepov V.P., Fal'k V.N.** Napravlennye Otnoshe-niya: Teoriya i Prilozheniya. Izvestiya RAN. Seriya «Tekhnicheskaya Kibernetika». 1994;5:114—123. (in Russian).

9. **Fal'k V.N.** Teoriya Napravlennykh Otnosheniy i Ee Prilozheniya: Avtoref. Diss. … Dokt. Tekhn. Nauk. M.: MEI, 2001. (in Russian).

10. **Fal'k V.N.** Ob Odnom Podkhode k Effektivnoy Numeratsii Rekursivnykh Mnozhestv Konstruktivnykh Ob′ektov. Vestnik MEI. 2013;4:209—215. (in Russian).

Сведения об авторах:

Кутепов Виталий Павлович — доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики НИУ «МЭИ»
Фальк Вадим Николаевич — доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики НИУ «МЭИ», e-mail: falkvn@yandex.ru

Information about authors:

Kutepov Vitaliy P. — Dr.Sci. (Techn.), Professor of Applied Mathematics Dept., NRU MPEI
Falk Vadim N. — Dr.Sci. (Techn.), Professor of Applied Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: falkvn@yandex.ru

Работа выполнена при поддержке: РФФИ (грант № 18-01-00548)
The work is executed at support: RFBR (grant No. 18-01-00548)

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *28.03.2018*
The article received to the editor: *28.03.2018*