УДК 517.95
DOI: 10.24160/1993-6982-2019-2-121-128

О первой смешанной задаче в банаховых пространствах для вырождающихся параболических уравнений с меняющимся направлением времени

И.М. Петрушко, М.И. Петрушко

Работа посвящена изучению одного из разделов неклассических дифференциальных уравнений, а именно вопросов разрешимости для параболических уравнений с меняющимся направлением времени второго порядка. Известно, что в обычных краевых задачах для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных условий полностью обеспечивает принадлежность решений пространствам Гельдера, но в случае уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных условий далеко не дает принадлежность решений этим пространствам. С.А. Терсеновым (для модельного параболического уравнения с меняющимся направлением времени) и С.Г. Пятковым (для более общего уравнения второго порядка) получены необходимые и достаточные условия разрешимости в Гельдеровых пространствах соответствующих смешанных задач. При этом начальные и краевые условия всегда предполагались нулевыми.
Рассмотрены случаи, когда начальные и граничные условия принадлежат банаховым пространствам. Введены функциональные пространства, в которых надо искать решения. Получены соответствующие априорные оценки, позволяющие получать условия разрешимости указанных задач. Изучены свойства полученных решений. В частности, установлена эквивалентность условий Рисса и Литлвуда–Пэли, аналогичных условиям для решений строго эллиптических и строго параболических уравнений второго порядка. Доказана однозначная разрешимость первой смешанной задачи с граничными и начальными функциями из банахового пространства.

Ключевые слова: вырождающиеся уравнения, изменение направления времени, функциональные пространства, интегральные тождества, первая смешанная задача, разрешимость.

Для цитирования: Петрушко И.М., Петрушко М.И. О первой смешанной задаче в банаховых пространствах для вырождающихся параболических уравнений с меняющимся направлением времени // Вестник МЭИ. 2019. № 2. С. 121—128. DOI: 10.24160/1993-6982-2019-2-121-128.

On the First Mixed Problem in Banach Spaces for Degenerate Parabolic Equations with Changing Time Direction

I.M. Petrushko, M.I. Petrushko

The article is devoted to studying one of the sections of nonclassical differential equations, namely, matters concerned with solvability of parabolic equations with changing second-order time direction. As is known, in ordinary boundary-value problems for strictly parabolic equations, the smoothness of the initial and boundary conditions completely ensures that the solutions belong to the Holder spaces, but in the case of equations with changing time direction, the smoothness of the initial and boundary conditions does not ensure that the solutions belong to these spaces. S.A. Tersenov (for a model parabolic equation with changing time direction) and S.G. Pyatkov (for a more general second-order equation) obtained the necessary and sufficient conditions for solvability of the corresponding mixed problems in Holder spaces. In so doing, they always assumed the initial and boundary conditions being equal to zero.
Cases in which the initial and boundary conditions belong to Banach spaces are considered. The functional spaces in which the solutions must be sought are introduced. Relevant a priori estimates, which make it possible to obtain the solvability conditions for these problems, are obtained. The properties of the obtained solutions have been studied. In particular, the equivalence of the Riesz and Littlewood-Paley conditions similar to the conditions for solutions of strictly elliptic and strictly parabolic second order equations is established. A unique solvability of the first mixed problem with boundary and initial functions from the Banach space has been proved.

Key words: degenerate equations, change of time direction, functional spaces, integral identities, first mixed problem, solvability

For citation: Petrushko I.M., Petrushko M.I. On the First Mixed Problem in Banach Spaces for Degenerate Parabolic Equations with Changing Time Direction. Bulletin of MPEI. 2019;2:121—128. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2019-2-121-128.

Работа посвящена изучению одного из разделов неклассических дифференциальных уравнений, а именно, вопросов разрешимости для параболических уравнений с меняющимся направлением времени второго порядка в случае неоднородных начальных и краевых условий. Первой публикацией, посвященной параболическим уравнениям с меняющимся направлением времени, была статья М. Жевре [1]. После долгого перерыва в 1960-х гг. появилось много исследований в этом направлении, в частности, М.С. Бауэнди и П. Гривара [2], С.А. Терсенова [3, 4], С.Г. Пяткова [5, 6] и др. В последние годы анализируются вопросы разрешимости параболических уравнений третьего и более высокого порядка. Изданы труды С.В. Попова, В.И. Антипина, С.В. Потаповой, И.Е. Егорова, Е.С. Ефимовой, И.М. Петрушко, Е.В. Черных [7 — 15].

Отметим, что указанные работы посвящены в основном однородным краевым и начальным условиям, что позволяло изучать разрешимость обобщенных решений в соответствующих гильбертовых пространстах. Однако эти методы не позволяют рассматривать случаи, когда граничные функции принадлежат пространству L_2 или в общем случае пространсту L_p, $p > 1$. Михайловым В.П. в 1976 г. предложено естественное обобщение принятия граничного значения задачи Дирихле для эллиптического уравнения, как предел в L_2 (или в L_p, $p > 1$) следов решения по «параллельным границе» поверхностям [16]. Обобщение результатов В.П. Михайлова на случай уравнений с меняющимся направлением времени с граничными и начальными значениями из пространств типа L_2 получено в работе И.М. Петрушко [15].

Рассмотрен более общий случай, когда граничные и начальные функции принадлежат пространствам типа L_p, $p > 1$.

Пусть Q — ограниченная область n-мерного пространства R_n, $n \geq 2$, расположенная в полупространстве $x_n > 0$, граница которой ∂Q – $(n – 1)$-мерная замкнутая поверхность без края класса C^2. Часть границы Γ_0 области Q расположена в гиперплоскости $x_n = 0$. Остальную часть границы обозначим через $\Gamma_1 = \partial Q \bigcap \{x_n = 0\}, \overline{\Gamma_0} \bigcup \Gamma_1 = \partial Q$.

Обозначим через δ_0 столь малое число, чтобы для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ подмножество $Q_\delta = Q \cap \{r(x) > \delta\}$ было областью с границей $\partial Q_\delta \in C^2$.

Здесь

$$r(x) = \min_{y \in \partial Q} |x - y|,\ x \in Q.$$

При этом при произвольном $\delta \in (0, \delta_0]$ для любой точки $x \in \partial Q$ существует единственная точка x_δ поверхности ∂Q_δ, отстоящая от точки x_0 на расстояние, равное δ, $|x_\delta – x_0| = \delta$;

$$x_\delta = x_\delta(x_0) = x_0 - \delta \mathbf{v}(x_0),$$

где $\mathbf{v}(x_0)$ — вектор внешней по отношению к области Q единичной нормали ∂Q в точке x_0.

Обратное отображение задается формулой

$$x_0(x_\delta) = x_\delta + \delta \mathbf{v}_\delta(x_0),$$

где $\mathbf{v}_\delta(x_\delta)$ — вектор внешней по отношению к области Q_δ единичной нормали ∂Q_δ в точке x_δ.

Обозначим через Q^T цилиндр $Q^T = Q\times(0, T)$. Рассмотрим в цилиндрической области $Q^T = Q\times(0, T)$ уравнение

$$Lu = k(x)u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{i,j}u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f(x,t). \quad (1)$$

Предположим, что коэффициенты $a_{i,j}$, $a_i \in C^1\left(\overline{Q^T}\right)$, $i,j = 1, 2, ..., n$; $a_i \in C^1\left(\overline{Q^T}\right)$. Для любой точки $x \in Q_\delta \delta \in (0, \delta_0)$ и любых $t \in [0, T]$ существует такая постоянная $\gamma_\delta > 0$, $\gamma_\delta \to 0$, $\delta \to 0$, что для всех

$$\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n) \in R_n;$$

$$\Phi(x,\xi,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \gamma_\delta |\xi|^2.$$

Для $(x_0, t) \in \partial Q\times[0, T]$ квадратичная форма вырождается:

$$\Phi(x_0,\xi,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq 0.$$

Предположим, что квадратичная форма на векторе нормали $\mathbf{v}(x_0) = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$ отлична от нуля, тогда $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\nu_i\nu_j \geq \gamma^0 > 0$ для всех $x_0 \in \partial Q$, $t \in [0, T]$ (вырождение типа Трикоми).

Пусть функция $k(x)$ меняет знак в области Q: $Q^+ = \{x \in Q, k(x) > 0\}$; $Q^+ = \{x \in Q, k(x) < 0\}$. Для простоты изложения $x_1 k(x) > 0$, если $x_1 \neq 0$ и $k(x) = 1$, $x \in Q^+$, $k(x) = –1$, $x \in Q^–$. Правая часть $f(x, t)$ уравнения (1) принадлежит пространству $L_p(Q^T)$.

Введем

$V_p^{1,0}(Q^T)$ — банахово пространство [17], состоящее из всех элементов $V_p(Q^T)$ непрерывных по t по норме $L_p(Q)$ с нормой

$$\|u\|_{V_p^{1,0}\left(Q^T\right)} = \max_{0 \leq t \leq T}\left(\|u(x,t)\|_{L_p(Q)}\right) + \|\nabla u\|_{L_p\left(Q^T\right)}.$$

Непрерывность по t функции $u(x, t)$ в норме $L_p(Q)$ означает, что

$$\|u(x,t+\Delta t) - u(x,t)\|_{L_p(Q)} \to 0 \ \text{ при } \ \Delta t \to 0.$$

$V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ — множество функций, принадлежащих $V_p^{1,0}\left(Q_\varepsilon'^{T-\varepsilon}\right)$, для любой Q', строго внутренней по отношению к Q, и любого $\varepsilon \in (0, T/2)$.

Функция $u(x, t)$ является обобщенным решением из $V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ уравнения (1). Если она принадлежит $V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ и является решением уравнения (1), то для всех финитных в Q^T функций $v(x, t)$ из $H_q^1(Q^T)$, $1/p + 1/q = 1$ имеет место равенство

$$\int_0^T\int_Q\left(-k(x)uv_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + auv\right)dxdt =$$
$$= \int_0^T\int_Q fvdxdt.$$

Пусть $\rho(x)$ функция, обладающая следующими свойствами

$$\rho(x) = r(x),\ x \in Q / Q_{\delta_0},\ \ \rho(x) \in C^2\left(\overline{Q}\right),$$

и существует такая постоянная $\gamma_1 > 0$, что для всех $x \in Q$

$$\gamma_1 r(x) \leq \rho(x) \leq \gamma_1^{-1} r(x).$$

Лемма 1. Пусть $u(x, t)$ обобщенное из $V^{1,0}_{p,loc}\left(Q^T\right)$ решение уравнения (1), правая часть которого $f(x, t) \in L_p(Q^T)$ Тогда для любых $\delta \in (0, \delta_0]$ и $\beta \in (0, T/2)$ справедливо равенство

$$\frac{1}{p}\int_{Q_\delta^+}\left|u\left(x,T-\beta\right)\right|^p(\rho-\delta)\,dx-\frac{1}{p}\int_{Q_\delta^-}\left|u\left(x,T-\beta\right)\right|^p(\rho-\delta)\,dx+$$
$$+\frac{1}{p}\int_{Q_\delta^-}\left|u\left(x,\beta\right)\right|^p(\rho-\delta)\,dx-\frac{1}{p}\int_{Q_\delta^+}\left|u\left(x,\beta\right)\right|^p(\rho-\delta)\,dx+$$
$$+(p-1)\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}(\rho-\delta)\right)|u|^{p-2}\,dxdt-$$
$$-\frac{1}{p}\int_\beta^{T-\beta}\int_{\partial Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}\right)|u|^p\,dsdt- \tag{2}$$
$$-\frac{1}{p}\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n\left(a_{i,j}\rho_{x_i}\right)_{x_j}|u|^p\,dxdt-$$
$$\frac{1}{p}\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\sum_{i=1}^n\left(a_i(\rho-\delta)_{x_i}\right)|u|^p\,dxdt+$$
$$+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}a|u|^p(\rho-\delta)\,dxdt=\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}f|u|^p\,signu(\rho-\delta)\,dxdt.$$

Доказательство леммы 1 аналогично доказательствам из [16, 18].

Обозначим

$$J(u)=(p-1)\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}(\rho-\delta)\right)|u|^{p-2}\,dxdt+$$
$$\frac{1}{p}\int_{Q_\delta^+}\left|u\left(x,T-\beta\right)\right|^p(\rho-\delta)\,dx+\frac{1}{p}\int_{Q_\delta^-}\left|u\left(x,\beta\right)\right|^p\frac{(\rho-\delta)}{x_n^m}dx;$$
$$M(u)=\frac{1}{p}\int_\beta^{T-\beta}\int_{\partial Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}\right)|u|^p\,dsdt+$$
$$+\frac{1}{p}\int_{Q_\delta^-}\left|u\left(x,\beta\right)\right|^p(\rho-\delta)\,dx+\frac{1}{2}\int_{Q_\delta^+}\left|u\left(x,\beta\right)\right|^p(\rho-\delta)\,dx$$

с произвольными $\delta \in (0, \delta_0]$ и $\beta \in (0, T/2)$.

Из равенства (2) следует справедливость следующих неравенств:

$$M_\delta(u)\equiv M(u)\le$$
$$\le C_1\left[\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}|u|^{p-1}|f|(\rho-\delta)\,dxdt+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}|u|^p(\rho-\delta)\,dxdt\right];$$
$$J_\delta(u)\equiv J(u)\le$$
$$\le C_2\left[\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}|u|^{p-1}|f|(\rho-\delta)\,dxdt+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}|u|^p(\rho-\delta)\,dxdt\right],$$

и, тем самым, справедливость леммы 2.

Лемма 2. Пусть $u(x, t)$ обобщенное из $V^{1,0}_{p,loc}\left(Q^T\right)$ решение уравнения (1). Тогда для всех любых $\delta \in (0, \delta_0]$ и $\beta \in (0, T/2)$ справедливы оценки:

$$\max_{\mu\in(0,\delta_0)}M_\mu(u)\le$$
$$\le C_3\left\{\|f\|^p_{L_p(Q^T)}+J(u)+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}|u|^p\,dxdt\right\};$$
$$\max_{\mu\in(0,\delta_0)}J_\mu(u)\le$$
$$\le C_3\left\{\|f\|^p_{L_p(Q^T)}+M(u)+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}|u|^p\,dxdt\right\}.$$

Лемма 3. Пусть $u(x, t)$ обобщенное из $V^{1,0}_{2,loc}\left(Q^T\right)$ решение уравнения (1) и $\sup\limits_{\substack{\delta\in(0,\delta_0]\\ \beta\in(0,T/2)}} J(u)<\infty$. Тогда $u(x, t) \in L_p(Q^T)$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, зависящее от ε и коэффициентов уравнения, что

$$\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q/Q_{\delta_2}}|u|^p\,dxdt\le$$
$$\le\varepsilon\left[\|f\|^p_{L_p(Q^T)}+J(u)+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_{\delta_2}}|u|^p\,dxdt\right]. \tag{3}$$

Доказательство.

Для любых δ_4 и δ_5, $0 < \delta_4 < \delta_5 < \delta_0$,

$$\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_{\delta_4}\backslash Q_{\delta_5}}|u|^p\,dxdt=\int_{\delta_4}^{\delta_5}d\rho\int_\beta^{T-\beta}\int_{\partial Q_\rho}|u|^p\,dxdt\le$$
$$\le C_5(\delta_5-\delta_4)\left(\|f\|^p_{L_p(Q^T)}+J_{\delta_4}(u)+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_{\delta_5}}|u|^p\,dxdt\right).$$

Из последнего равенства получим:

$$\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_{\delta_4}\backslash Q_{\delta_5}}|u|^p\,dxdt=\int_{\delta_4}^{\delta_5}d\rho\int_\beta^{T-\beta}\int_{\partial Q_\rho}|u|^p\,dxdt\le$$
$$\le C_5\delta_5\left(\|f\|^p_{L_p(Q^T)}+J_{\delta_4}(u)+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_{\delta_5}}|u|^p\,dxdt\right). \tag{4}$$

Выберем $\delta_3 = 1/(2C_5)$, при необходимости уменьшая его так, чтобы δ_3 было меньше δ_0, а в последнем равенстве $\delta_5 = \delta_3$:

$$\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_{\delta_4}\backslash Q_{\delta_5}}|u|^p\,dxdt\le$$
$$\le\left(\|f\|^p_{L_p(Q^T)}+J_{\delta_4}(u)+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_{\delta_3}}|u|^p\,dxdt\right). \tag{5}$$

Из (5) следует, что $\int_0^T\int_Q |u|^p\,dxdt<\infty$.

Выберем $\delta_2=\min\left\{\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)C_5},\frac{1}{2C_5}\right\}$ (уменьшая, если нужно, так, чтобы δ_2 было меньше δ_0) и положим $\delta_5=\delta_2$ в (4).

Перейдя к пределу при $\delta_4\to 0$, с учетом неравенства (5), получим (3).

Функция $u(x, t)$ из $V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ принадлежит классу Харди H_p, если

$$\sup_{\substack{\delta\in(0,\delta_0]\\ \beta\in(0,T/2)}} M(u)<\infty. \qquad (6)$$

Теорема 1. Для того, чтобы обобщенное из $V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ решение уравнения (1) с $f(x, t)\in L_p(Q^T)$ принадлежало классу Харди H_p, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{\substack{\delta\in(0,\delta_0]\\ \beta\in(0,T/2)}} J(u)<\infty.$$

Пусть $u(x, t)$ принадлежит классу Харди H_p, тогда из (6)

$$\int_0^T\int_{Q/Q_{\delta_0}}|u|^p\,dxdt<\infty;\quad \int_{\beta_0}^{T-\beta_0}\int_{Q_{\delta_0}}|u|^p\,dxdt<\infty;$$

$$\int_0^{\beta_0}\int_{Q_{\delta_0}^+}|u|^p\,dxdt<\infty;\quad \int_{T-\beta_0}^{T}\int_{Q_{\delta_0}^-}|u|^p\,dxdt<\infty.$$

Следовательно,

$$\int_{\beta_0}^{T-\beta_0}\int_Q|u|^p\,dxdt<\infty. \qquad (7)$$

Исходя из (7), существует такое β_1, $\beta_0<\beta_1<T/2$, что

$$\int_Q\left|u(x,\beta_1)\right|^p dx<\infty,$$

Покажем, что

$$\int_0^{\beta_0}\int_{Q_{\delta_0}^-}|u|^p\,dxdt<\infty. \qquad (8)$$

Рассмотрим функцию $v(x, t) = u(x, t)e^{-\lambda t}$. Видно, что функция $v(x, t)$ является обобщенным из $V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ решением уравнения

$$k(x)v_t-\sum_{i,j=1}^n\left(a_{i,j}v_{x_i}\right)_{x_j}+$$
$$+\sum_{i=1}^n a_i v_{x_i}+(a+\lambda k)v=fe^{-\lambda t}\equiv f_1,$$

и, следовательно, для любого $\delta\in\left(0,\frac{\delta_0}{2}\right)$, $\beta\in(0,\beta_1)$ справедливо равенство

$$\frac1p\int_{Q_\delta^+}\left|v(x,\beta_1)\right|^p(\rho-\delta)\,dx-\frac1p\int_{Q_\delta^-}\left|v(x,\beta_1)\right|^p(\rho-\delta)\,dx+$$
$$+\frac1p\int_{Q_\delta^-}\left|v(x,\beta)\right|^p(\rho-\delta)\,dx-\frac1p\int_{Q_\delta^+}\left|v(x,\beta)\right|^p(\rho-\delta)\,dx+$$
$$+(p-1)\int_\beta^{\beta_1}\int_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}v_{x_i}v_{x_j}|v|^{p-2}(\rho-\delta)\,dxdt-$$
$$-\frac1p\int_\beta^{\beta_1}\int_{\partial Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}|v|^p\,dsdt-$$
$$-\frac1p\int_\beta^{\beta_1}\int_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n(a_{i,j}\rho_{x_i})_{x_j}|v|^p\,dxdt-$$
$$-\frac1p\int_\beta^{\beta_1}\int_{Q_\delta}\sum_{i=1}^n(a_i(\rho-\delta))_{x_i}|v|^p\,dxdt+$$
$$+\int_\beta^{\beta_1}\int_{Q_\delta}(a+\lambda k)|v|^p(\rho-\delta)\,dxdt=\int_\beta^{\beta_1}\int_{Q_\delta}f_1|v|^{p-1}\operatorname{sign}v(\rho-\delta)\,dxdt.$$

Таким образом,

$$\frac1p\int_{Q_\delta^-}\left|v(x,\beta)\right|^p(\rho-\delta)\,dx+(p-1)\times$$
$$\times\int_\beta^{\beta_1}\int_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}v_{x_i}v_{x_j}|v|^{p-2}(\rho-\delta)\,dxdt+$$
$$+\int_\beta^{\beta_1}\int_{Q_{\delta_0}^-}\left[\begin{aligned}&-\frac1p\sum_{i,j=1}^n(a_{i,j}\rho_{x_i})_{x_j}+\\&+\sum_{i=1}^n(a_i(\rho-\delta))_{x_i}+(a-\lambda)(\rho-\delta)\end{aligned}\right]|v|^p\,dxdt=$$
$$=\int_\beta^{\beta_1}\int_{Q_\delta^-\setminus Q_{\delta_0}^-}\left[\begin{aligned}&-\frac1p\sum_{i,j=1}^n(a_{i,j}\rho_{x_i})_{x_j}+\\&+\sum_{i=1}^n(a_i(\rho-\delta))_{x_i}+(a-\lambda)(\rho-\delta)\end{aligned}\right]|v|^p\,dxdt+$$
$$+\frac1p\int_{Q_\delta^-}\left|v(x,\beta_1)\right|^p(\rho-\delta)\,dx-\frac1p\int_{Q_\delta^+}\left|v(x,\beta_1)\right|^p(\rho-\delta)\,dx+$$
$$+\frac1p\int_{Q_\delta^+}\left|v(x,\beta)\right|^p(\rho-\delta)\,dx+\frac1p\int_\beta^{\beta_1}\int_{\partial Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}|v|^p\,dsdt-$$
$$-\int_\beta^{\beta_1}\int_{Q_\delta^+}\left[\begin{aligned}&-\frac1p\sum_{i,j=1}^n(a_{i,j}\rho_{x_i})_{x_j}+\\&+\sum_{i=1}^n(a_i(\rho-\delta))_{x_i}+(a+\lambda)(\rho-\delta)\end{aligned}\right]|v|^p\,dxdt+$$
$$+\int_\beta^{\beta_1}\int_{Q_\delta}f_1|v|^{p-1}\operatorname{sign}v(\rho-\delta)\,dxdt.$$

Так как

$$\left|\int_{\beta}^{\beta_1}\int_{Q_\delta^-} f_1 |v|^{p-1} signv(\rho-\delta)\,dxdt\right| \le$$
$$\le \varepsilon \int_{\beta}^{\beta_1}\int_{Q_{\delta_0}^-} |v|^p (\rho-\delta)\,dxdt +$$
$$+C(\varepsilon)\int_{\beta}^{\beta_1}\int_{Q_{\delta_0}^-} |f_1|^p (\rho-\delta)\,dxdt$$

и

$$\left|\int_{\beta}^{\beta_1}\int_{Q_\delta^+} f_1 |v|^{p-1} signv(\rho-\delta)\,dxdt\right| \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\beta_1}\int_{Q_{\delta_0}^-} |v|^p (\rho-\delta)\,dxdt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\beta_1}\int_{Q_{\delta_0}^-} |f_1|^p (\rho-\delta)\,dxdt\ ,$$

то, выбрав $-\lambda > 0$ настолько большим, чтобы

$$\int_{\beta}^{\beta_1}\int_{Q_{\delta_0}^-}\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{p}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{i,j}\rho_{x_i})_{x_j} + \\ +\sum_{i=1}^{n}(a_i(\rho-\delta))_{x_i} + (a-\lambda)(\rho-\delta)\end{array}\right]|v|^p\,dxdt \ge \tag{9}$$
$$\ge \int_{\beta}^{\beta_1}\int_{Q_{\delta_0}^-}|v|^p\,dxdt,$$

из (9) получим (8).

Аналогично

$$\int_{T-\beta_0}^{T}\int_{Q_{\delta_0}^+}|v|^p\,dxdt < \infty.$$

Таким образом, из принадлежности обобщенного из $V_{2,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ решения $u(x, t)$ уравнения (1) к классу H_p следует, что

$$\int_0^T\int_Q |u|^p\,dxdt < \infty.$$

Необходимость вытекает из неравенства (5) леммы 2.

Достаточность следует из леммы 3 и неравенства (4) леммы 2.

Теорема 1 доказана.

Положим, что функция $u(x,t)\in V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ примет граничное значение

$$u\big|_{(x,t)\in Q\times(0,T)} = \varphi \tag{10}$$

в смысле L_p, если $\varphi(x, t) \in L_p(\partial Q\times(0, T))$, и

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\int_{\beta}^{T-\beta}\int_{\partial Q}\left|u(x_\delta(x),t)-\varphi(x,t)\right|^p dsdt = 0. \tag{11}$$

Функция $u(x,t)\in V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ также примет начальные значения

$$u\big|_{t=0,x\in Q^+} = u_1(x);\quad \int_{Q^+}|u_1(x)|^p r(x)\,dx < \infty; \tag{12}$$

$$u\big|_{t=T,x\in Q^-} = u_2(x);\quad \int_{Q^-}|u_2(x)|^p r(x)\,dx < \infty \tag{13}$$

в смысле L_p с весом $r(x)$, если

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\int_{Q_\delta^+}\left|u(x,\beta)-u_1(x,t)\right|^p r(x)\,dx = 0; \tag{14}$$

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\int_{Q_\delta^-}\left|u(x,T-\beta)-u_2(x,t)\right|^p r(x)\,dx = 0. \tag{15}$$

Теорема 2. Существует такая постоянная $a_0 > 0$, что для всех $\varphi(x, t) \in L_p(\partial Q\times(0, T))$, $u_1(x) \in L_p(Q^+, r)$, $u_2(x)\in L_p(Q^-, r)$ и для всех $f(x, t) \in L_p(Q^T)$ существует решение из $V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ задачи (1), (10) — (13) при $a(x, t) > a_0$. Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_Q\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}|u|^{p-2}\,dxdt + \\ &+\sup_{\beta,\delta}\left(\int_{Q_\delta^+}|u(x,T-\beta)|^p(r-\delta)\,dx + \right.\\ &\left.+\int_{Q_\delta^-}|u(x,\beta)|^p(r-\delta)\,dx\right) + \\ &+\sup_{\beta,\delta}\left(\int_{\beta}^{T-\beta}\int_{\partial Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}|u|^p\,dsdt\right) + \\ &+\int_0^T\int_Q|u|^p r(x)\,dxdt \le C\left(f^p_{L_p\left(Q^T\right)} + \varphi^p_{L_p\left(\partial Q\times(0,T)\right)} + \right.\\ &\left.+u_1{}^p_{L_p\left(Q_\delta^+,r(x)\right)} + u_2{}^p_{L_p\left(Q_\delta^-,r(x)\right)}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Докажем, что существует такое число $a_0 > 0$, что при $a > a_0$ для обобщенного решения из $V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ задачи (1), (10) — (13) справедливо неравенство (16).

Пусть $u(x, t)$ обобщенное из $V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ решение задачи (1), (10) — (13). В силу (11), (14), (15) функция $u(x, t)$ принадлежит классу H_p, поэтому на основании теоремы 1 справедливы неравенства:

$$\int_0^T\int_Q\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}v_{x_i}v_{x_j}\left|v\right|^{p-2}\rho\left(x\right)dxdt<\infty;$$

$$\int_0^T\int_Q\left|u\right|^p dxdt<\infty .$$

Рассмотрим равенство (3). Так как

$$\left|\int^{T-}\int_{Q_\delta} f_1\left|u\right|^{p-1} signu\left(\rho-\delta\right)dxdt\right|\leq$$

$$\leq\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\left|u\right|^p\left(\rho-\delta\right)dxdt+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\left|f\right|^p dxdt,$$

то из (2) следует

$$\begin{gathered}\frac{1}{p}\int_{Q_\delta^+}\left|u\left(x,T-\beta\right)\right|^p\left(\rho-\delta\right)dx+\\+\frac{1}{p}\int_{Q_\delta^-}\left|u\left(x,\beta\right)\right|^p\left(\rho-\delta\right)dx+\\+\left(p-1\right)\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}\left|u\right|^{p-2}\left(\rho-\delta\right)dxdt+\\+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\left(a-1\right)\left|u\right|^p\left(\rho-\delta\right)dxdt\leq\\\leq C_3\left[\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\left|f\right|^p dxdt+M\left(u\right)+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\left|u\right|^p dxdt\right].\end{gathered}\tag{17}$$

В силу леммы 3

$$\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\left|u\right|^p dxdt\leq$$

$$\leq\varepsilon\left[f_{L_p\left(Q^T\right)}^p+J\left(u\right)+C_1\left(\varepsilon\right)\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\left|u\right|^p\left(\rho-\delta\right)dxdt\right],$$

тогда из неравенства (17)

$$\begin{gathered}\int_{Q_\delta^+}\left|u\left(x,T-\beta\right)\right|^p\left(\rho-\delta\right)dx+\int_{Q_\delta^-}\left|u\left(x,\beta\right)\right|^p\left(\rho-\delta\right)dx+\\+\left(1-\varepsilon C_3\right)\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}\left|u\right|^{p-2}\left(\rho-\delta\right)dxdt+\\+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\left(a-1-C_1\left(\varepsilon\right)\right)\left|u\right|^p\left(\rho-\delta\right)dxdt\leq\\\leq C_4\left[\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\left|f\right|^p dxdt+M\left(u\right)\right].\end{gathered}\tag{18}$$

Выберем в неравенстве (18) $\varepsilon=\dfrac{1}{\left(2C_3\right)}$, $a_0=\dfrac{3}{2}C_1\left(\varepsilon\right)$ и, перейдя к пределу при $\delta\to 0$ и $\beta\to 0$, получим неравенство (16).

Докажем существование первой смешанной задачи (1), (14) — (17) с $a(x, t) > a_0$. Отметим, что при $p = 2$ существование решения доказано в [15].

Возьмем произвольные функции:

$$\varphi\left(x,t\right)\in L_p\left(\partial Q\times\left(0,T\right)\right);\ u_1\in L_p\left(Q^+,r\right);$$

$$u_2\in L_p\left(Q^-,r\right);\ f\in L_p\left(Q^T\right).$$

Пусть $\{\varphi_m\}$ — некоторая последовательность финитных на $\partial Q\times(0T)$ функций из $C^2(\partial Q\times(0T))$, сходящаяся в $L_p(\partial Q\times(0T))$ к функции φ:

$$\left\|\varphi_m-\varphi\right\|_{L_p\left(\partial Q\times\left(0T\right)\right)}\to 0,m\to\infty;$$

$\{u_{1m}\}$ — некоторая последовательность финитных на Q^+ функций из $C^2(Q^+)$ сходящаяся в $L_p(Q^+)$ к функции u_1:

$$\left\|u_{1m}-u_1\right\|_{L_p\left(Q^+\right)}\to 0,m\to\infty;$$

$\{u_{2m}\}$ — некоторая последовательность финитных на Q^- функций из $C^2(Q^-)$, сходящаяся в $L_p(Q^-)$ к функции u_2:

$$\left\|u_{2m}-u_2\right\|_{L_p\left(Q^-\right)}\to 0,m\to\infty;$$

$\{f_m\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(Q^T)$, сходящаяся в $L_p(Q^T)$ к функции f:

$$\left\|f_m-f\right\|_{L_p\left(Q^T\right)}\to 0,m\to 0.$$

Обозначим через $u_m(x, t)$ сильное решение из $V_p^{1,0}(Q^T)$ задачи

$$k\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^n\left(a_{i,j}u_{x_i}\right)_{x_j}-\frac{1}{m}\Delta u+\sum_{i=1}^n a_iu_{x_i}+au=f;$$

$$u\big|_{\left(x,t\right)\in Q\times\left(0,T\right)}=\varphi_m;$$

$$u\big|_{t=0,x\in Q^+}=u_{1m}\left(x\right);$$

$$u\big|_{t=T,x\in Q^-}=u_{2m}\left(x\right).$$

Данные решения существуют [6, 19], и для них справедливо неравенство (16). Следовательно, последовательность $u_m(x, t)$, $m\to\infty$ сходится к некоторой функции $u(x, t)$ в банаховом пространстве B с нормой

$$\begin{gathered}\left\|u\right\|_B^p=\int_0^T\int_{Q_{\delta_0}}\nabla u^p dxdt+\\+\sup_{\beta,\delta}\left(\int_{Q_\delta^+}\left|u\left(x,T-\beta\right)\right|^p\left(r-\delta\right)dx+\int_{Q_\delta^-}\left|u\left(x,\beta\right)\right|^p\left(r-\delta\right)dx\right)+\\+\sup_{\beta,\delta}\left(\int_\beta^{T-\beta}\int_{\partial Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{\left|\nabla\rho\right|}\left|u\right|^p dsdt\right)+\int_0^T\int_Q\left|u\left(x,t\right)\right|^p dxdt,\end{gathered}\tag{19}$$

т.е. $\|u_m-u\|_B\to 0$, при $m\to\infty$.

Покажем, что функция $u(x, t)$ является обобщенным решением из $V_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ задачи (1), (10) — (13).

Поскольку для всех $v \in B\|v\|_{L_p} \le v_B$, то $u \in L_p(Q^T)$ и $\|u - u_m\|_{L_p\left(Q^T\right)} \to 0$ при $m \to \infty$. Учитывая, что функция $u_м(x, t)$ — обобщенное из $W_p^{1,0}(Q^T)$ решение уравнения (1), то при любой финитной в Q^T функции η из $W_q^{2,1}(Q^T)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

$$\int_0^T\int_Q\left(-k(x)\frac{\partial\eta}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{i,j}\eta_{x_j}\right)_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(a_i\eta)_{x_i}+a\eta\right)\times$$
$$\times u_m dxdt=\int_0^T\int_Q f_m\eta dxdt.$$

Перейдя к пределу в этом равенстве при $m \to \infty$ (множество $(supp\,\eta) \Subset Q^T$ и $\|f - f_m\|_{L_p\left(Q^T\right)} \to 0$ при $m \to \infty$), получим, что для любой финитной в Q^T функции η из $W_q^{2,1}(Q^T)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ функция u удовлетворяет равенству

$$\int_0^T\int_Q\left(-k(x)\frac{\partial\eta}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{i,j}\eta_{x_j}\right)_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(a_i\eta)_{x_i}+a\eta\right)\times$$
$$\times udxdt=\int_0^T\int_Q f\eta dxdt,$$

но тогда функция $u(x, t)$ принадлежит $W_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ и является решением из $W_{p,loc}^{1,0}\left(Q^T\right)$ уравнения (1).

Выполнение соотношений (10), (12), (13) вытекает из (19). Теорема 2 доказана.

Литература

1. **Gevrey M.** Sur Les Equations Aux Derivees Partielles Du Type Parabolique // J. Math. Appl. 1913. V. 9. No. 6. Pp. 305—478.

2. **Baouendi M.S. Grisvard P.** Sur Une Equation D'evolution Changeante De Type // J. Funct. Anal. 1968. V. 2. No. 3. Pp. 352—367.

3. **Терсенов С.А.** О первой краевой задаче для одного параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Доклады РАН. 1996. Т. 348. № 1. С. 27—29.

4. **Терсенов С.А.** Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.

5. **Pyatkov S.G.** Operator Theory. Nonclassical Problems. Utrecht: VSP, 2002.

6. **Пятков С.Г.** О разрешимости одной краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Доклады АН СССР. 1985. Т. 285. № 6. С. 1322—1327.

7. **Попов С.В.** О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Доклады РАН. 2005. Т. 400. № 1. С. 29—31.

8. **Попов С.В.** Краевая задача Жевре для уравнения третьего порядка // Математические заметки СВФУ. 2017. Т. 24. № 1. С. 43—56.

9. **Антипин В.И., Попов С.В.** Краевые задачи для уравнений третьего порядка с меняющимся направлением времени // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2012. № 14. С. 19—28.

10. **Попов С.В., Потапова С.В.** Гёльдеровские классы решений 2n-параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Доклады РАН. 2009. Т. 424. № 5. С. 594—596.

References

1. **Gevrey M.** Sur Les Equations Aux Derivees Partielles Du Type Parabolique. J. Math. Appl. 1913;9;6: 305—478.

2. **Baouendi M.S. Grisvard P.** Sur Une Equation D'evolution Changeante De Type. J. Funct. Anal. 1968;2;3: 352—367.

3. **Tersenov S.A.** O Pervoy Kraevoy Zadache dlya Odnogo Parabolicheskogo Uravneniya s Menyayushchimsya Napravleniem Vremeni. Doklady RAN. 1996;348;1: 27—29. (in Russian).

4. **Tersenov S.A.** Parabolicheskie Uravneniya s Menyayushchimsya Napravleniem Vremeni. Novosibirsk: Nauka, 1985. (in Russian).

5. **Pyatkov S.G.** Operator Theory. Nonclassical Problems. Utrecht: VSP, 2002.

6. **Pyatkov S.G.** O Razreshimosti Odnoy Kraevoy Zadachi dlya Parabolicheskogo Uravneniya s Menyayushchimsya Napravleniem Vremeni. Doklady AN SSSR. 1985;285;6: 1322—1327. (in Russian).

7. **Popov S.V.** O Gladkosti Resheniy Parabolicheskikh Uravneniy s Menyayushchimsya Napravleniem Evolyutsii. Doklady RAN. 2005;400;1: 29—31. (in Russian).

8. **Popov S.V.** Kraevaya Zadacha Zhevre dlya Uravneniya Tret'ego Poryadka. Matematicheskie Zametki SVFU. 2017; 24;1:43—56. (in Russian).

9. **Antipin V.I., Popov S.V.** Kraevye Zadachi dlya Uravneniy Tret'ego Poryadka s Menyayushchimsya Napravleniem Vremeni. Vestnik Yuurgu. Seriya «Matematicheskoe Modelirovanie I Programmirovanie». 2012; 14:19—28. (in Russian).

10. **Popov S.V., Potapova S.V.** Gël'derovskie Klassy Resheniy 2*n*-parabolicheskikh Uravneniy s Menyayushchimsya Napravleniem Evolyutsii. Doklady RAN. 2009;424;5: 594—596. (in Russian).

11. **Егоров И.Е., Ефимова Е.С.** Стационарный метод Галеркина для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Математические заметки ЯГУ. 2011. Т. 18 (2). С. 41—47.

12. **Егоров И.Е., Тихонова И.М.** О стационарном методе Галеркина для уравнений смешанного типа второго порядка // Математические заметки ЯГУ. 2010. Т. 17 (2). С. 41—47.

13. **Егоров И.Е.** О модифицированном методе Галеркина для параболических уравнений с меняющимся направлением времени // Узбекский математический журнал. 2013. № 3. С. 33—40.

14. **Петрушко И.М., Черных Е.В.** О начально-краевой задаче для уравнений с меняющимся направлением времени // Вестник МЭИ. 2000. № 6. С. 60—70.

15. **Петрушко И.М.** О первой смешанной задаче для вырождающихся параболических уравнений с меняющимся направлением времени // Вестник МЭИ. 2016. № 1. С. 53—58.

16. **Михайлов В.П.** О граничных значениях решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с гладкой границей // Математический сборник. 1976. Т. 101 (143). С. 163—188.

17. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. Наука. 1967.

18. **Гущин А.К., Михайлов В.П.** О граничных значениях L_p, $p > 1$ решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с гладкой границей // Математический сборник. 1979. Т. 108 (150). С. 3—21.

19. **Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В.** Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

11. **Egorov I.E., Efimova E.S.** Statsionarnyy Metod Galerkina dlya Parabolicheskogo Uravneniya s Menyayuchimsya Napravleniem Vremeni. Matematicheskie Zametki YAGU. 2011;18 (2): 41—47. (in Russian).

12. **Egorov I.E., Tikhonova I.M.** O Statsionarnom Metode Galerkina dlya Uravneniy Smeshannogo Tipa Vtorogo Poryadka. Matematicheskie Zametki YAGU. 2010;17 (2): 41—47. (in Russian).

13. **Egorov I.E.** O Modifitsirovannom Metode Galerkina dlya Parabolicheskikh Uravneniy s Menyayushchimsya Napravleniem Vremeni. Uzbekskiy Matematicheskiy Zhurnal. 2013;3: 33—40. (in Russian).

14. **Petrushko I.M., Chernykh E.V.** O Nachal'no-kraevoy Zadache dlya Uravneniy s Menyayushchimsya Napravleniem Vremeni. Vestnik MEI. 2000;6: 60—70. (in Russian).

15. **Petrushko I.M.** O Pervoy Smeshannoy Zadache dlya Vyrozhdayushchikhsya Parabolicheskikh Uravneniy s Menyayushchimsya Napravleniem Vremeni. Vestnik MEI. 2016;1: 53—58. (in Russian).

16. **Mikhaylov V.P.** O Granichnykh Znacheniyakh Resheniy Ellipticheskikh Uravneniy Vtorogo Poryadka v Oblastyakh s Gladkoy Granitsey. Matematicheskiy Sbornik. 1976;101 (143):163—188. (in Russian).

17. **Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.** Lineynye i Kvazilineynye Uravneniya Parabolicheskogo Tipa. M. Nauka. 1967. (in Russian).

18. **Gushchin A.K., Mikhaylov V.P.** O Granichnykh Znacheniyakh L_p, $p > 1$ Resheniy Ellipticheskikh Uravneniy Vtorogo Poryadka v Oblastyakh s Gladkoy Granitsey. Matematicheskiy Sbornik. 1979;108 (150):3—21. (in Russian).

19. **Egorov I.E., Pyatkov S.G., Popov S.V.** Neklassicheskie Differentsial'no-operatornye Uravneniya. Novosibirsk: Nauka, 2000. (in Russian).

Сведения об авторах:

Петрушко Игорь Мелетиевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: petrushkoim@mpei.ru
Петрушко Максим Игоревич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: petrushkomi@mpei.ru

Information about authors:

Petrushko Igor M. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: petrushkoim@mpei.ru
Petrushko Maksim I. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: petrushkomi@mpei.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *18.01.2018*
The article received to the editor: *18.01.2018*