# МАТЕМАТИКА

## Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (01.01.02)

УДК 05.13.01;01.01.02
DOI: 10.24160/1993-6982-2019-2-118-120

## О целых решениях одного класса дифференциально-разностных уравнений

В.А. Подкопаева, Ю.С. Фёдоров, А.Я. Янченко

В ряде вопросов теоретической информатики задачи сводятся к исследованию решений алгебраических дифференциально-разностных уравнений. К настоящему времени достаточно хорошо исследованы только подобные линейные уравнения. В общем случае поиск и анализ решений представляет пока непреодолимые трудности, поэтому в ряде исследований изучаются только решения, принадлежащие к наперёд заданному классу функций (например, целых). В этом направлении в России и за рубежом получены результаты, описывающие (в той или иной степени) решения для определённых классов алгебраических дифференциальных уравнений. Для нелинейных алгебраических дифференциально-разностных уравнений результаты (даже для достаточно узких классов функций — например, многочленов) отсутствуют.
Описаны возможные решения (являющиеся целыми функциями конечного порядка) нелинейных алгебраических дифференциально-разностных уравнений достаточно общего вида. Показано, что уравнения определённой структуры могут иметь целыми решениями только квазимногочлены.
Доказательство основано на использовании техники работы с целыми функциями, разработанной авторами в последние годы.

*Ключевые слова:* дифференциально-разностные уравнения, целые функции.

*Для цитирования:* Подкопаева В.А., Фёдоров Ю.С., Янченко А.Я. О целых решениях одного класса дифференциально-разностных уравнений // Вестник МЭИ. 2019. № 2. С. 118—120. DOI: 10.24160/1993-6982-2019-2-118-120.

## On Integer Solutions of a Class of Differential-Difference Equations

V.A. Podkopaeva, Yu.S. Fedorov, A.Ya. Yanchenko

Problems dealt with in a number of theoretical computer science matters are reduced to studying the solutions of algebraic differential-difference equations. By now, only linear equations of this sort have been studied to a fairly good extent. In the general case, a search for and an analysis of their solutions still involve insurmountable difficulties. Therefore, in a number of studies, solutions belonging to a predetermined class of functions (e.g. integer ones) are only considered. In Russia and abroad, results describing (to some or other degree) solutions for certain classes of algebraic differential equations have been obtained in this problem area. However, no results are available for nonlinear algebraic differential-difference equations, even for quite narrow classes of functions, e.g., polynomials.
The article describes possible solutions (which are integer functions of a finite order) for nonlinear algebraic differential-difference equations of a fairly general kind. It is shown that equations of a certain structure can have integer solutions only in the form of quasipolynomials.
The proof is based on using the techniques of dealing with integer functions that has recently been developed by the authors.

*Key words:* differential-difference equations, integer functions.

*For citation:* Podkopaeva V.A., Fedorov Yu.S., Yanchenko A.Ya. On Integer Solutions of a Class of Differential-Difference Equations. Bulletin of MPEI. 2019;2:118—120. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2019-2-118-120.

Исследование алгебраических дифференциальных (или дифференциально-разностных) уравнений в комплексной области считается классической задачей теории дифференциальных уравнений. При этом почти все имеющиеся к настоящему времени результаты относятся либо к линейным уравнениям, либо к конкретным уравнениям второго порядка (например, уравнение Пенлеве [1]). Одним из немногих общих результатов является теорема Эрмита [1], описывающая решение уравнения $P(y, y') = 0$ для многочленов $P$ ранга 0.

К настоящему времени нет никаких подходов к решению уравнений $P\left(z, y, y', ..., y^{(n)}\right)$ в общем случае.

В последние десятилетия появился ряд результатов по исследованию решений алгебраических дифференциальных уравнений, относящихся к какому-либо наперёд заданному классу функций. Так, рассматриваются решения, являющиеся целыми функциями (имеют приложения в теории трансцендентных чисел) [2 — 4]. Более подробно с полученными результатами можно ознакомиться в монографии [5]. Отметим, что к настоящему моменту все результаты получены только для дифференциальных уравнений.

Впервые описаны целые решения достаточно большого класса дифференциально-разностных уравнений.

**Теорема.** *Пусть m, n — натуральные.*

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} d_i y^{(i)} + y^2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} C_{ij}(z) y^{(i)}(z + j) = 0,$$

где $\left\{C_{ij}(z)\right\}$ — многочлены с комплексными коэффициентами; $\{d_i\}$ — комплексные числа, не все из которых нулевые.

Тогда, если данное уравнение имеет решение, являющееся целой функцией конечного порядка $f(z)$, то при некотором натуральном $N$ $f(z) = \sum_{k=1}^{N} Q_k(z)\, e^{\alpha_k z}$, где $\{Q_k(z)\}$ — многочлены с комплексными коэффициентами; $\{\alpha_k\}$ — комплексные числа.

При доказательстве теоремы использована техника работы с целыми функциями [6]. В частности, существенными являются следующие утверждения [7, 8].

**Предложение.** Пусть $h(z)$ — целая функция, и при некотором $\rho > 0$

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\ln \ln \max\limits_{|z|\le R} |h(z)|}{\ln R} \le \rho.$$

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $R_0 = R_0(\varepsilon) > 0$, такое, что при всяком $R > R_0$ и любом $H > 0$ из кольца $C_R = \{2R \le |z| \le 3R\}$ можно выбросить конечное число кружков с общей суммой радиусов не более $2H$ так, что при всяком $z \in C_R$, но вне выброшенных кружков при любом натуральном $n$ справедлива оценка:

$$\frac{h^{(n)}(z)}{h(z)} \le \sigma\left(1 + R^{\rho+\varepsilon-1} \ln R + \frac{R^{\rho+\varepsilon} \ln R}{H}\right),$$

где $\sigma$ — постоянная, зависящая только от $n$; $h(z)$, $\varepsilon$ — функции.

**Лемма 1.** Пусть $\delta \in (0; 1)$; $R > 20^{1/\delta}$; $B_R$ — конечное множество кружков с общей суммой радиусов менее, чем $2R^{1-\delta}$, лежащее в кольце $\{2R \le |z| \le 3R\}$.

Тогда найдётся число $R_1 \in (2R; 3R)$ такое, что окружность $\beta_{R_1} = \{z: |z| = R_1\}$ не пересекается со множеством $B_R$.

## Литература

1. **Голубев В.В.** Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1950.

2. **Гельфонд А.О.** Трансцендентные и алгебраические числа. М.: Гостехиздат, 1953.

3. **Рочев И.П.** Обобщение теорем Гельфонда и Вальдшмидта о целозначных целых функциях // Математический сборник. 2011. Т. 202. № 8. С. 117—138.

4. **Welter M.** Sur un Theorem de Gelfond-Selberg et Une Conjecture de Bundschu-Shiokawa // Acta Arith. 2005. V. 116. No. 4. Pp. 363—385.

5. **Горбузов В.Н.** Целые решения алгебраических дифференциальных уравнений. Гродно: ГРБУ, 2006.

6. **Левин Б.Я.** Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.

7. **Подкопаева В.А., Янченко А.Я.** О целых решениях одного класса нелинейных разностных уравнений // Естественные и технические науки. 2017. № 7. С. 106—108.

## References

1. **Golubev V.V.** Lektsii po Analiticheskoy Teorii Differentsial'nykh Uravneniy. M.: GITTL, 1950. (in Russian).

2. **Gel'fond A.O.** Transtsendentnye i Algebraicheskie Chisla. M.: Gostekhizdat, 1953. (in Russian).

3. **Rochev I.P.** Obobshchenie Teorem Gel'fonda i Val'dshmidta o Tseloznachnykh Tselykh Funktsiyakh. Matematicheskiy Sbornik. 2011;202;8:117—138. (in Russian).

4. **Welter M.** Sur un Theorem de Gelfond-Selberg et Une Conjecture de Bundschu-Shiokawa. Acta Arith. 2005; 116;4:363—385.

5. **Gorbuzov V.N.** Tselye Resheniya Algebraicheskikh Differentsial'nykh Uravneniy. Grodno: GRBU, 2006. (in Russian).

6. **Levin B.Ya.** Raspredelenie Korney Tselykh Funktsiy. M.: GITTL, 1956. (in Russian).

7. **Podkopaeva V.A., Yanchenko A.Ya.** O Tselykh Resheniyakh Odnogo Klassa Nelineynykh Raznostnykh Uravneniy. Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki. 2017;7: 106—108. (in Russian).

8. **Янченко А.Я., Подкопаева В.А.** О целых функциях — решениях одного класса алгебраических дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 1284—1291.

8. **Yanchenko A.Ya., Podkopaeva V.A.** O Tselykh Funktsiyakh — Resheniyakh Odnogo Klassa Algebraicheskikh Differentsial'nykh Uravneniy. Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. 2018;15:1284—1291. (in Russian).

**Сведения об авторах:**

**Подкопаева Виктория Александровна** — старший преподаватель кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: vapodk@yandex.ru.
**Фёдоров Юрий Сергеевич** — доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: FedorovYS@mpei.ru
**Янченко Александр Яковлевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: YanchhekoAY@mpei.ru

**Information about authors:**

**Podkopaeva Viktoriya A.** — Senior Lecturer of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: vapodk@yandex.ru.
**Fedorov Yuriy S.** — Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: FedorovYS@mpei.ru
**Yanchenko Aleksandr Ya.** — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: YanchhekoAY@mpei.ru

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
**Conflict of interests:** the authors declare no conflict of interest

**Статья поступила в редакцию:** *19.01.2018*
**The article received to the editor:** *19.01.2018*