Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (05.13.18)

УДК 517.958:531.33
DOI: 10.24160/1993-6982-2019-4-127-134

Усредненная модель распространения малых возмущений в конфигурации упругое тело – пороупругая среда для двухскоростного континуума

С.А. Гриценко, А.М. Мейрманов

Статья продолжает серию работ авторов, посвященных усреднению математических моделей, описывающих процессы изотермической акустики в гетерогенной среде с двумя компонентами, разделенными общей границей. Одна из компонент является упругим телом, другая — пороупругой сплошной средой. Пороупругой средой называют упругое тело, пронизанное системой пор, заполненных жидкостью. В качестве исходной модели использована точная математическая модель, полученная на основе классических законов механики сплошной среды. Дифференциальные уравнения модели содержат быстро осциллирующие коэффициенты, появляющиеся в результате перехода к безразмерным переменным. Предполагается, что существуют конечные или бесконечные пределы таких коэффициентов при стремлении к нулю малого параметра эпсилон. Авторы полагают малый параметр эпсилон равным отношению среднего размера пор к характерному размеру рассматриваемой области, от них зависят не только коэффициенты дифференциальных уравнений, но и геометрия рассматриваемой области.

Выведены различные усредненные (предельные) модели с отсутствующими быстроосциллирующими коэффициентами. Для того, чтобы воспользоваться теорией усреднения и известными результатами об усреднении, добавлены упрощающие геометрические предположения о периодичностях и связанностях порового пространства и упругого скелета. Под усредненными моделями понимаются такие краевые задачи для уравнений или систем с относительно медленно меняющимися характеристиками, что решения краевых задач для исходных моделей сходятся (в некотором смысле) к решению соответствующих уравнений для усредненной модели, когда период ε рассматриваемой периодической структуры стремится к нулю. В зависимости от характеристик сплошной среды (жидкость вязкая, слабовязкая, сжимаемая, несжимаемая, скелет сильно деформируемый, упругий, абсолютно твердый и т. д.) предельные режимы получаются различными.

Исследован один из случаев со слабосжимаемой, слабовязкой жидкостью и слабодеформируемым упругим скелетом в одной области и упругим телом в другой. Исходная математическая модель достаточно точно отражает реальный физический процесс, однако настолько сложна, что стандартная схема усреднения для нее не работает. Поэтому в качестве основного инструмента использован метод двухмасштабной сходимости. С одной стороны, часто нельзя вычислить предельные режимы модели даже в терминах слабой сходимости, но это возможно сделать в терминах двухмасштабной сходимости. С другой стороны, последовательность решений, как правило, получается ограниченной, но не компактной, и в этом случае слабый предел последовательности не является удовлетворительным приближением к решению исходной математической модели, а предпочтительнее использовать двухмасштабный предел. Для отдельно взятой пороупругой области или для области, занятой упругим телом, результаты представлены ранее в работах авторов. В данном случае изучается совместное движение упругого тела и пористой упругой среды, и основная проблема заключается в выводе условий на общей границе упругой и пороупругой областей.

Ключевые слова: композитные среды, периодическая структура, уравнения Ламе, уравнения акустики, пороупругость, усреднение периодических структур, двухмасштабная сходимость.

Для цитирования: Гриценко С.А., Мейрманов А.М. Усредненная модель распространения малых возмущений в конфигурации упругое тело – пороупругая среда для двухскоростного континуума // Вестник МЭИ. 2019. № 4. С. 127—134. DOI: 10.24160/1993-6982-2019-4-127-134.

An Averaged Model Describing the Propagation of Small Perturbations in the Elastic Body – Poroelastic Medium Configuration for a Two-Velocity Continuum

S.A. Gritsenko, A.M. Meirmanov

The article continues the series of the authors' papers devoted to averaging of mathematical models describing the isothermal acoustic processes in a heterogeneous medium with two components separated by a common boundary. One of these components is an elastic body, and the other is a poroelastic continuum. Poroelastic medium is understood to mean an elastic body permeated with a system of pores filled with liquid. The exact mathematical model constructed proceeding from the classical laws of continuum mechanics is used as the initial model. The model's differential equations contain rapidly oscillating coefficients that appear in making transition to dimensionless variables. It is assumed that there are finite or infinite limits of these coefficients as the small parameter "epsilon" tends to zero. The small parameter "epsilon" is taken equal to the ratio of the average pore size to the characteristic size of the region under consideration. It should be noted that the coefficients of differential equations and the geometry of the considered region both depend on these parameters.

Various averaged (limit) models that do not contain rapidly oscillating coefficients have been derived. For the possibility of using the averaging theory and the known averaging results, simplifying geometric assumptions about the periodicity and connectivity of the pore space and elastic skeleton are added. Averaged models are understood to mean such boundary value problems for equations or systems with relatively slowly changing characteristics that the solutions of boundary value problems for the initial models converge (in a sense) to the solution of the corresponding equations for the averaged model when the period ε of the considered periodic structure tends to zero. Depending on the characteristics of the continuum (whether the fluid is viscous, low-viscous, compressible, or incompressible; whether the skeleton is highly deformable, elastic, perfectly rigid, etc.), different limit modes are obtained.

One of cases involving weakly compressible and low viscous liquid and a weakly deformable elastic skeleton in one region and an elastic body in the other region is investigated. The original mathematical model reflects the real physical process in a fairly accurate manner, but is so complex that the standard averaging scheme does not work for it. Therefore, the two-scale convergence method is used as the main tool. On the one hand, it is often impossible to calculate the model's limit modes even in terms of weak convergence, but it is possible to do so in terms of two-scale convergence. On the other hand, the sequence of solutions is usually bounded but not compact, and in this case the sequence weak limit is not a satisfactory approximation to the solution of the initial mathematical model, and it is more preferable to use a two-scale limit. The results for an individually taken poroelastic region or for a region occupied by an elastic body were presented in the authors' previous papers. In the case considered, the joint motion of an elastic body and porous elastic medium is studied, and the main problem lies in deriving the conditions at the common boundary of the elastic and poroelastic regions.

Key words: composite media, periodic structure, Lame's equations, acoustics equations, poroelasticity, averaging of periodic structures, two-scale convergence.

For citation: Gritsenko S.A., Meirmanov A.M. An Averaged Model Describing the Propagation of Small Perturbations in the Elastic Body – Poroelastic Medium Configuration for a Two-Velocity Continuum. Bulletin of MPEI. 2019;4:127—134. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2019-4-127-134.

Введение и постановка задачи

Построению усредненных характеристик сильно неоднородных сред посвящено большое количество работ. Для построения усредненных моделей часто используется предположение о периодичности структуры включений материала одной фазы в другую. Под усредненными моделями понимают такие краевые задачи для уравнений или систем с относительно медленно меняющимися характеристиками, что решения краевых задач для исходных моделей сходятся (в некотором смысле) к решению соответствующих уравнений для усредненной модели, когда период ε рассматриваемой периодической структуры стремится к нулю.

Впервые с достаточной математической строгостью теорема об усреднении была доказана в 1975 г. Н.С. Бахваловым [1] и почти одновременно Ж. Лионсом и еще несколькими авторами. Появление данных работ связано с бурным развитием асимптотического анализа. Теории усреднения посвящены монографии Н.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко, В.В. Жикова, С.М. Козлова, О.А. Олейник и др. [1 — 4] и целый ряд публикаций [5 — 9]. Авторы [10] решение исходной задачи аппроксимируют решением усредненной задачи, при этом усредненная задача содержит новое нелинейное слагаемое, представляющее вклад процесса, происходящего на границе микроскопической полости. А.С. Шамаев и В.В. Шумилова в [5] рассмотрели математическую модель, описывающую малые колебания комбинированной среды, состоящей из пористого вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей поры.

Метод асимптотических разложений остается мощным инструментом усреднения и в настоящее время. Однако в моделях, имеющих более сложную структуру, чем стандартная модель усреднения, оказывается полезным другой метод. В усреднении многих задач из теории пористых сред, как правило, приходится иметь дело с вычислением пределов следующего вида:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} u_\varepsilon(x)\psi(x)\sigma(x/\varepsilon)dx,$$

где u_ε слабо сходится к u, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$; σ — бесконечно дифференцируемая 1-периодическая функция в R^n.

В общем случае в терминах слабого предела u этот предел вычислить нельзя, но это возможно в терминах двухмасштабной сходимости. Кроме того, в отличие от стандартной схемы усреднения, имеется большое число моделей, в которых последовательность u_ε ограничена, но не компактна в $L_2(\Omega)$. В этих случаях слабый в L_2 предел последовательности $\{u_\varepsilon\}$ не является удовлетворительным приближением к u_ε, и предпочтительно использовать двухмасштабный предел — функцию $u(x, y)$ двух переменных x, y, периодичную по y.

Понятие двухмасштабной сходимости впервые введено в 1989 г. Г. Нгуетсенгом [11 — 13] и в дальнейшем получило развитие в работах G. Allaire [14]. Теории двухмасштабной сходимости посвящены работы В.В. Жикова, также В.В. Жикова и Г.А. Иосифьяна [15, 16]. Метод двухмасштабной сходимости в задачах сейсмики, акустики, фильтрации систематически применяется в статьях А.М. Мейрманова [17, 18]. Основные определения и теоремы о двухмасштабной сходимости подробно описаны в [19].

Приведем основное определение.

Последовательность $\{w^\varepsilon\} \in L_2(\Omega_T)$ называется двухмасштабно сходящейся к функции $W(x, t, y) \in L_2(\Omega_T \times Y)$, 1-периодической по переменной $y \in Y$, если для любой функции $\sigma(x, t, y)$, 1-периодической по y, справедливо равенство:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_T} w^\varepsilon(x,t)\sigma\left(x,t,\frac{x}{\varepsilon}\right) dxdt = \\ = \int\limits_{\Omega_T}\int\limits_{Y} W(x,t,y)\sigma(x,t,y)dydxdt,$$

где $Y = [0, 1)^3$ — ячейка периодичности.

Вывод усредненных уравнений выполняется на основе подхода, предложенного Р. Барриджем, Д. Келлером [20] и Э. Санчес-Паленсия [21]. Используются результаты о разрешимости краевых задач из монографии О.А. Ладыженской, В. А Солонникова, Н.Н. Уральцевой [22].

В работе [23] доказана теорема существования и единственности обобщенного решения для рассматриваемой начально-краевой задачи, получены априорные оценки и выведены усредненные модели для нескольких конфигураций. В статье [24] получена усредненная модель для случая $0 < \lambda_0^{(0)} < \infty$, $0 < \mu_1 < \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$, где $\lambda_0^{(0)}$, μ_1, λ_0 — характеристики среды.

Выведена усредненная модель для конфигурации $0 < \lambda_0^{(0)} < \infty$, $\mu_1 = \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$. Указанные характеристики появляются в диффференциальных уравнениях модели при переходе к безразмерным переменным:

$$x \to \frac{x}{L};\ t \to \frac{t}{\tau};\ \mathbf{F} \to \frac{\mathbf{F}}{g};\ \rho \to \frac{\rho}{\rho^0},$$

где L — характерный размер рассматриваемой физической области; τ — время физического процесса; $\mathbf{F}$ — заданный вектор распределенных массовых сил; g — ускорение силы тяжести; ρ^0 — плотность воды.

Приведенная модель содержит быстро осциллирующие коэффициенты:

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2};\ \alpha_\mu = \frac{2\mu}{g\tau L\rho^0};\ \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{gL\rho^0};$$

$$\bar{\alpha}_\mu = \frac{\alpha_\mu}{\alpha_\tau};\ \bar{\alpha}_\lambda = \frac{\alpha_\lambda}{\alpha_\tau},$$

где μ — динамическая вязкость жидкости; λ — постоянная Ламе.

После перехода к безразмерным переменным в модели появляется малый параметр ε. Полагаем его равным отношению среднего размера пор l к характерному размеру рассматриваемой области L. Причем от ε зависят не только коэффициенты дифференциальных уравнений $\bar{\alpha}_\mu$, $\bar{\alpha}_\lambda$, $\bar{\alpha}_{\lambda^0}$, но и геометрия рассматриваемой области. Пусть существуют (конечные или бесконечные) пределы:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\alpha}_\mu(\varepsilon) = \mu_0;\ \lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\alpha}_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0;\ \lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}(\varepsilon) = \lambda_0^{(0)};$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{\alpha}_\mu(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \mu_1;\ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{\alpha}_\lambda(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \lambda_1;\ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \lambda_1^{(0)}.$$

Здесь верхний индекс (0) у коэффициента (например, $\lambda_0^{(0)}$) означает принадлежность к области $\Omega^{(s)}$.

В настоящей работе рассматривается математическая модель акустики в среде с двумя компонентами, разделенными общей границей S^0 для случая $\mu_0 = 0$, $0 < \lambda_0^{(0)} < \infty$, $\mu_1 = \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$.

Одна из компонент представляет собой упругое тело $\Omega^{(s)}$, другая — пороупругую среду Ω, состоящую из твердого скелета Ω_s и порового пространства Ω_f, заполненного слабосжимаемой слабовязкой жидкостью. Упругие свойства твердого материала в $\Omega^{(s)}$ и Ω могут различаться.

Рассматриваемая ограниченная область $Q \in R^3$ представляет собой единичный куб $Q = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$, в котором пороупругая среда занимает область $\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0, a)$, $0 < a < 1$, а область $\Omega^{(s)}$ (упругое тело) — открытое дополнение области Ω: $Q = \Omega \cup \Omega^{(s)} \cup S^{(0)}$, $S^{(0)} = \partial\Omega \cup \partial\Omega^{(s)}$.

Движение смеси в области Ω при $t > 0$ описывается системой уравнений:

$$\left(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2}\right)p + \nabla\mathbf{w} = 0; \tag{1}$$

$$\left(\rho_f\chi^\varepsilon + \left(1-\chi^\varepsilon\right)\rho_s\right)\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla\mathbf{P} + \rho^\varepsilon\mathbf{F}; \tag{2}$$

$$\mathbf{P} = \chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu\mathbf{D}\left(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\right) + \left(1-\chi^\varepsilon\right)\bar{\alpha}_\lambda\mathbf{D}\left(x,\mathbf{w}\right) - p\mathbf{I}. \tag{3}$$

Движение упругого тела $\Omega^{(s)}$ при $t > 0$ описывается уравнениями Ламе:

$$\frac{1}{\left(\overline{c}_s^{(0)}\right)^2}p + \nabla \mathbf{w} = 0; \tag{4}$$

$$\rho_s^{(0)}\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \mathbf{P}^{(s)} + \rho_s^{(0)}\mathbf{F}; \tag{5}$$

$$\mathbf{P}^{(s)} = \overline{\alpha}_\lambda^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}) - p\mathbf{I}, \tag{6}$$

где $\mathbf{D}(x,\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^*\right)$ — симметрическая часть тензора $\nabla\mathbf{w}$.

В уравнениях модели $\mathbf{w}$ (перемещение) и p (давление) — неизвестные функции, все остальные функции являются заданными. Параметры $\overline{\alpha}_\lambda^{(0)}$, $\overline{c}_s^{(0)}$ — безразмерные постоянные Ламе для упругого тела в области Ω^s; $\overline{c}_s$, $\overline{c}_f$ — скорости звука в твердой и жидкой частях; $\mathbf{P}(s)$ — тензор напряжений в упругом теле; $\rho_s^{(0)}$ — безразмерная плотность упругого тела; $\rho^\varepsilon = \rho_f\chi^\varepsilon + (1 + \chi^\varepsilon)\rho_s$; ρ_f, ρ_s — безразмерные плотности твердого скелета и жидкости в порах, соотнесенные со средней плотностью воды ρ^0.

На общей границе $S^{(0)}$ выполняются условия непрерывности перемещений

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(x,t) = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \mathbf{w}(x,t) \tag{7}$$

и нормальных компонент моментов:

$$\lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{P}^{(s)}(x,t)\mathbf{n}(x^0) = \lim_{\substack{x\to x^0 \\ x\in\Omega}} \mathbf{P}\ (x,t)\mathbf{n}(x^0). \tag{8}$$

Замыкают задачу однородные граничные условия

$$\mathbf{w}(x,t) = 0;\ (x,t)\in S_T = S\times(0,T) \tag{9}$$

на границе $S = \partial Q$, и однородные начальные условия:

$$\mathbf{w}(x,0) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(x,0) = 0;\ x\in Q. \tag{10}$$

Характеристическая функция порового пространства Ω_f в Ω выражается соотношением:

$$\chi^\varepsilon(x) = \zeta(x)\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где $\zeta(x)$ — характеристическая функция области Ω в Q.

Чтобы воспользоваться теорией усреднения и методом двухмасштабной сходимости, нужно ввести упрощающие геометрические предположения.

1. Пусть $\chi(y)$ — 1-периодическая функция, а $Y_s = \{y\in Y : \chi(y) = 0\}$ — твердая часть единичного куба $Y = (0, 1)^3 \in R^3$, пусть жидкая часть $Y_f = \{y \in Y : \chi(y) = 1\}$ — открытое дополнение твердой части. Пусть $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ и γ — связная липшицева поверхность.

2. Области E_f^ε, E_s^ε— периодические повторения в R^3 элементарных ячеек $Y_f^\varepsilon = \varepsilon Y_f$, $Y_s^\varepsilon = \varepsilon Y_s$.

3. Поровое пространство $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_f^\varepsilon$ и твердый скелет $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_s^\varepsilon$ — периодические повторения в Ω элементарных ячеек εY_f, εY_s. Липшицева граница $\Gamma^\varepsilon = \Omega_f^\varepsilon \cap \Omega_s^\varepsilon$ — периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

4. Y_s и Y_f — связные множества.

5. Твердый скелет Ω_s^ε — связная область.

6. Поровое пространство Ω_f^ε— связная область.

Пусть

$$\int_{Q_T}\left(\left|\mathbf{F}(x,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{F}(x,t)}{\partial t}\right|^2\right)dxdt = F^2 < \infty.$$

Определим обобщенное решение задачи (1) — (10).

Определение. *Назовем пару функций* ($\mathbf{w}^\varepsilon$, p^ε), *таких, что* $\mathbf{w}^\varepsilon \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$, $p^\varepsilon \in L_2(Q_T)$, *обобщенным решением задачи (1) — (10), если они удовлетворяют уравнению неразрывности*

$$\left((1-\zeta)\frac{1}{\left(\overline{c}_s^{(0)}\right)^2} + \zeta\left(\frac{\chi^\varepsilon}{\overline{c}_f^2} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\overline{c}_s^2}\right)\right)p^\varepsilon + \nabla\mathbf{w}^\varepsilon = 0$$

почти всюду в Q_T *и интегральному тождеству*

$$\begin{aligned}\int_{Q_T}\rho_{(s)}^\varepsilon\left(\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{F}\varphi\right)dxdt = \\ = \int_{Q_T}\left(\zeta\mathbf{P} + (1-\zeta)\mathbf{P}^{(s)}\right):\mathbf{D}(x,\varphi)dxdt\end{aligned} \tag{11}$$

для всех функций φ, *таких, что*

$$\varphi\in\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}(Q_T);\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}\in L_2(\Omega_T);\quad \varphi(x,t) = 0, x\in Q.$$

Здесь и далее $\mathbf{B}:\mathbf{C} = \mathrm{tr}(\mathbf{BC}^T)$, где $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — тензоры второго ранга;

$$\rho_{(s)}^\varepsilon = (1-\zeta)\rho_s^{(0)} + \zeta\left(\rho_f\chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\rho_s\right).$$

Основные результаты.

Теорема. *Пусть* ($\mathbf{w}^\varepsilon$, p^ε) *— обобщенное решение задачи (1) — (10),* $0 < \lambda_0^{(0)} < \infty$, $\mu_1 = \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$ *и* $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbf{E}_{\Omega s}(\mathbf{w}^\varepsilon)$ *— продолжение из* Ω_s^ε *в* Ω. *Тогда пределы* $\mathbf{w}$ *и* p *последовательностей* $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ *и* $\{p^\varepsilon\}$ *удовлетворяют в области* $\Omega_T^{(s)}$ *системе Ламе:*

$$\frac{1}{\left(\overline{c}_s^{(0)}\right)^2}p + \nabla\mathbf{w} = 0; \tag{12}$$

$$\rho_s^{(0)}\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla\left(\lambda_0^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}) - p\mathbf{I}\right) + \rho_s^{(0)}\mathbf{F}, \tag{13}$$

граничному и начальному условиям:

$$\mathbf{w}(x,t) = 0;\ x\in S_T\setminus\partial\Omega_T;$$

$$\mathbf{w}(x,0) = \frac{\partial\mathbf{w}(x,0)}{\partial t} = 0;\ x\in Q.$$

В области Q_T предел $\mathbf{w}_s$ (перемещение твёрдой компоненты сплошной среды) последовательности $\{\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$ удовлетворяет усредненному уравнению

$$\hat{\rho}\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2} = \nabla\left(\lambda_0 \mathbf{N}_3^s : \mathbf{D}(x, \mathbf{w}_s)\right) + \hat{\rho}\mathbf{F} \qquad (14)$$

с начально-краевыми условиями:

$$\mathbf{w}_s(x,0) = \frac{\partial \mathbf{w}_s(x,0)}{\partial t} = 0; \quad x \in \Omega;$$

$$\mathbf{w}_s(x,t) = 0; \quad x \in \partial\Omega \setminus S^{(0)}; \quad t \in (0,T).$$

На общей границе $S_T^{(0)}$ выполняются условия непрерывности

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(x,t) = \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega}} \mathbf{w}_s(x,t); \qquad (15)$$

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega^{(s)}}} \left(\lambda_0^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}(x,t)) - p(x,t)\mathbf{I}\right)\mathbf{n}(x^0) = \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in\Omega}} \left(\lambda_0 \mathbf{N}_3^s : \mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s(x,t))\right)\mathbf{n}(x^0). \qquad (16)$$

Здесь $\hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s$, $m = \int\limits_Y \chi(y)dy$*, симметричный положительно определенный тензор четвертого ранга* $\mathbf{N}_3^s$*, описывается (23).*

В теореме использованы следующие обозначения: $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbf{E}_{\Omega_s^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon)$, где $\mathbf{E}_{\Omega_s^\varepsilon} : \mathbf{W}_2^1(\Omega_s^\varepsilon) \to \mathbf{W}_2^1(\Omega)$ — оператор продолжения из Ω_s^ε в Ω, такой, что $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon$ в $\Omega_s^\varepsilon \times (0, T)$ и

$$\int\limits_\Omega \left|\mathbf{w}_s^\varepsilon\right|^2 dx \le C_0 \int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} \left|\mathbf{w}^\varepsilon\right|^2 dx;$$

$$\int\limits_\Omega \left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s^\varepsilon)\right|^2 dx \le C_0 \int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} \left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\right|^2 dx.$$

Продолжение выполнено на основе известной леммы К. Конки о продолжении [25].

Доказательство теоремы

В [24] для обобщенного решения ($\mathbf{w}^\varepsilon$, p^ε) задачи (1) — (10) получена следующая априорная оценка:

$$\max_{0<t<T}\int\limits_\Omega \left(\left|p^\varepsilon(x,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon(x,t)}{\partial t}\right|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda \left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\right|^2\right)dx +$$

$$+\max_{0<t<T}\int\limits_{\Omega^{(s)}} \left(\begin{array}{l}\left|p^\varepsilon(x,t)\right|^2 + \left|\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon(x,t)}{\partial t}\right|^2 + \\ +(1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}\left|\mathbf{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)\right|^2\end{array}\right)dx +$$

$$+\max_{0<t<T}\int\limits_\Omega \left(\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial p^\varepsilon(x,t)}{\partial t}\right|^2 + \left|\dfrac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon(x,t)}{\partial t^2}\right|^2 + \\ +(1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda\left|\mathbf{D}\left(x,\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right)\right|^2\end{array}\right)dx +$$

$$+\max_{0<t<T}\int\limits_{\Omega^{(s)}} \left(\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial p^\varepsilon(x,t)}{\partial t}\right|^2 + \left|\dfrac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon(x,t)}{\partial t^2}\right|^2 + \\ +(1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}\left|\mathbf{D}\left(x,\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right)\right|^2\end{array}\right)dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega_T} \chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu\left(\left|\mathbf{D}\left(x,\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right)\right|^2 + \left|\mathbf{D}\left(x,\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)\right|^2\right)dxdt \le C_0,$$

где постоянная C_0 не зависит от ε и параметров $\bar{\alpha}_\mu$, $\bar{\alpha}_\lambda$, $\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}$.

Полученная априорная оценка позволяет найти слабые и двухмасштабные пределы последовательностей $\{p^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{D}(x, \mathbf{w}_s^\varepsilon)\}$. Двухмасштабные пределы $P(x, t, y)$ и $\mathbf{W}$ последовательностей $\{p^\varepsilon\}$ и $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ выражаются формулами:

$$P(x,t,y) = (1-\varsigma)\,p + \varsigma\chi(y)\,p_f(x,t) + \varsigma(1-\chi(y))\,P_s(x,t,y);$$

$$\mathbf{W}(x,t,y) = \mathbf{w}_s(x,t).$$

Двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$ равен $\mathbf{w}_s(x, t)$, а двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbf{D}(x, \mathbf{w}_s^\varepsilon)\}$ —

$$\mathbf{D}\left(x,\mathbf{w}_s(x,t)\right) + \mathbf{D}\left(y,\mathbf{U}(x,t,y)\right),$$

где $\mathbf{U}(x, t, y)$ — некоторая неизвестная функция, подлежащая определению.

Перейдя к пределу в интегральном тождестве (11), получим

$$\int\limits_{Q_T}\left(\begin{array}{l}(1-\zeta)\lambda_0^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}) + \\ +\zeta\lambda_0\left((1-m)\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s) + \left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U})\right\rangle_{Y_s}\right)\end{array}\right) : \mathbf{D}(x,\varphi)dxdt = \int\limits_{Q_T}\int\limits_Y \rho_{(s)}(x,y)\left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{W}(x,t,y)}{\partial t^2}\right)\varphi(x,t)dydxdt. \qquad (17)$$

для любой гладкой функции φ, равной нулю, на границе ∂Q.

В (17)

$$\rho_{(s)}(x,y) = \left(1-\zeta(x)\right)\rho_s^{(0)} + \zeta(x)\left(\rho_f\chi(y) + (1-\chi(y))\rho_s\right).$$

Предельное уравнение неразрывности в форме интегрального тождества примет вид:

$$\int\limits_{Q_T}\left(\eta\int\limits_Y\left(\begin{array}{l}\dfrac{1-\zeta}{\left(c_s^{(0)}\right)^2} + \\ +\zeta\left(\dfrac{\chi}{\left(c_f\right)^2} + \dfrac{1-\chi}{\left(c_s\right)^2}\right)\end{array}\right)\frac{\partial P}{\partial t}dy - \nabla\eta\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}\right)dxdt = 0 \qquad (18)$$

для любой гладкой функции η.

Соотношения (17), (18) дают уравнения Ламе (12), (13):

$$\frac{1}{\left(\overline{c}_s^{(0)}\right)^2}p+\nabla\mathbf{w}=0;$$

$$\rho_s^{(0)}\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}=\nabla\left(\lambda_0^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w})-p\mathbf{I}\right)+\rho_s^{(0)}\mathbf{F}$$

в области $\Omega_T^{(s)}$.

В работе [17] доказано, что в пороупругой области Ω_T предельные функции w_s и p_f удовлетворяют макроскопическим уравненям неразрывности

$$\frac{m}{c_f^2}p_f+m\nabla\mathbf{w}_s=\left\langle\nabla_y\mathbf{U}\right\rangle_{Ys} \tag{19}$$

и баланса моментов

$$\begin{aligned}&\nabla\left(\lambda_0\mathbf{N}^{(0)}:\left((1-m)\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s)+\left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U})\right\rangle_{Ys}\right)\right)-\\&-m\nabla p_f+\hat{\rho}\mathbf{F}=0\end{aligned} \tag{20}$$

и микроскопическому уравнению баланса моментов

$$\nabla_y\left((1-\chi)\left(\mathbf{N}^{(0)}:\left(\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s)+\mathbf{D}(y,\mathbf{U})\right)+\frac{1}{\lambda_0}p_f\mathbf{I}\right)\right)=0, \tag{21}$$

где

$$\mathbf{N}^{(0)}=\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{J}^{ij}\otimes\mathbf{J}^{ij}+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I};$$

$$\mathbf{J}^{ij}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{e_i}\otimes\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i\right).$$

Используя макроскопическое уравнение неразрывности (19), перепишем (20) и (21) в виде:

$$\begin{aligned}&\nabla_y((1-\chi)\left(\mathbf{D}(y,\mathbf{U})\right)+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\left(\nabla_y\mathbf{U}\right)\mathbf{I}+\\&+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\left\langle\nabla_y\mathbf{U}\right\rangle_{Ys}\mathbf{I}+\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s)+\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\left(\nabla\mathbf{w}_s\right)\mathbf{I})=0;\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&\nabla((1-m)\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s)+\left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U})\right\rangle_{Ys}+\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\left\langle\nabla_y\mathbf{U}\right\rangle_{Ys}\mathbf{I}+\\&+\left((1-m)\frac{c_s^2}{\lambda_0}+m\frac{c_f^2}{\lambda_0}\right)\left(\nabla\mathbf{w}_s\right)\mathbf{I})+\frac{1}{\lambda_0}\hat{\rho}\mathbf{F}=0.\end{aligned}$$

Полагая в (22)

$$\mathbf{U}(x,t,y)=\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{U}_3^{(i,j)}(y)D_{ij}(x,t)+\mathbf{U}_3^{(0)}(y)\left(\nabla\mathbf{w}_s\right),$$

придем к следующим периодическим начально-краевывым задачам на ячейке :

$$\nabla_y\left((1-\chi)\left(\begin{aligned}&\mathbf{D}(y,\mathbf{U_3^{(ij)}})+\mathbf{J^{ij}}+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\left(\nabla_y\mathbf{U_3^{(ij)}}\right)\mathbf{I}+\\&+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\left\langle\nabla_y\mathbf{U_3^{(ij)}}\right\rangle_{\mathbf{Ys}}\mathbf{I}\end{aligned}\right)\right)=0;$$

$$\nabla_y\left((1-\chi)\left(\begin{aligned}&\mathbf{D}(y,\mathbf{U_3^{(0)}})+\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\mathbf{I}+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\left(\nabla_y\mathbf{U_3^{(0)}}\right)\mathbf{I}+\\&+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\left\langle\nabla_y\mathbf{U_3^{(0)}}\right\rangle_{\mathbf{Ys}}\mathbf{I}\end{aligned}\right)\right)=0.$$

Однозначная разрешимость этих задач при выполнении условия нормировки

$$\left\langle\mathbf{U_3^{(ij)}}\right\rangle_{\mathbf{Ys}}=\left\langle\mathbf{U_3^{(0)}}\right\rangle_{\mathbf{Ys}}=0$$

следует из энергетических тождеств:

$$\begin{aligned}&\int_{Ys}\left(\left(\mathbf{D}(y,\mathbf{U_3^{(ij)}})+\mathbf{J^{ij}}\right):\mathbf{D}(y,\mathbf{U_3^{(ij)}})+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\left(\nabla_y\mathbf{U_3^{(ij)}}\right)^2\right)dy+\\&+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\left(\int_{Ys}\nabla_y\mathbf{U_3^{(ij)}}dy\right)^2=0;\\&\int_{Ys}\left(\left(\mathbf{D}(y,\mathbf{U_3^{(0)}})\right):\mathbf{D}(y,\mathbf{U_3^{(ij)}})+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\left(\nabla_y\mathbf{U_3^{(0)}}\right)^2\right)dy+\\&+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\left(\int_{Ys}\nabla_y\mathbf{U_3^{(0)}}dy\right)^2+\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\int_{Ys}\nabla_y\tilde{\mathbf{U}}^0dy=0.\end{aligned}$$

Введя обозначение

$$\begin{aligned}&\mathbf{N_3^s}=(1-m)\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{J}^{ij}\otimes\mathbf{J}^{ij}+\left((1-m)\frac{c_s^2}{\lambda_0}+m\frac{c_f^2}{\lambda_0}\right)\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}+\\&+\sum_{i,j=}^{3}\left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U_3^{(ij)}})\right\rangle_{\mathbf{Ys}}\otimes\mathbf{J}^{ij}+\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\sum_{i,j=}^{3}\left\langle\nabla\mathbf{U_3^{(ij)}}\right\rangle_{\mathbf{Ys}}\mathbf{I}\otimes\mathbf{J}^{ij}+\\&+\left\langle\mathbf{D}(y,\mathbf{U_3^{(0)}})\right\rangle_{\mathbf{Ys}}\otimes\mathbf{I}+\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\left\langle\nabla\mathbf{U_3^{(0)}}\right\rangle_{\mathbf{Ys}}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I},\end{aligned} \tag{23}$$

получим усредненное уравнение баланса моментов (14).

Соотношения (17), (18) дают условия непрерывности (15) и (16):

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\x\in\Omega^{(s)}}}\mathbf{w}(x,t)=\lim_{\substack{x\to x^0\\x\in\Omega}}\mathbf{w}_s(x,t);$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{x\to x^0\\x\in\Omega^{(s)}}}\left(\lambda_0^{(0)}\mathbf{D}(x,\mathbf{w}(x,t))-p(x,t)\mathbf{I}\right)\mathbf{n}(x^0)=\\&=\lim_{\substack{x\to x^0\\x\in\Omega}}\left(\lambda_0\mathbf{N}_3^s:\mathbf{D}(x,\mathbf{w}_s(x,t))\right)\mathbf{n}(x^0)\end{aligned}$$

на общей границе $S_T^{(0)}$.

Литература

1. **Бахвалов Н.С.** Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Доклады АН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 516—519.
2. **Бахвалов Н.С. Панасенко Г.П.** Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984.
3. **Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.** Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
4. **Беляев А.Ю.** Усреднение в задачах теории фильтрации. М.: Наука, 2004.
5. **Shamaev A.S., Shumilova V.V.** Homogenization of Acoustic Equations for a Partially Perforated Elastic Material with Slightly Viscous Fluid // Журнал Сибирского федерального ун-та. Серия «Математика и физика. 2015. № 8 (3). С. 356—370.
6. **Жиков В.В., Пастухова С.Е.** Усреднение монотонных операторов с условиями коэрцитивности и роста переменного порядка // Математические заметки. 2011. Т. 90. № 1. С. 53—69.
7. **Zhikov V.V.** Homogenization of a Navier–Stokes Type System for Electrorheological Fluid // Complex Variables and Elliptic Equations. 2011. V. 56. No. 7 — 9. Pp. 545—558.
8. **Pastukhova S.E.** Estimates in Homogenization of Parabolic Equations with Locally Periodic Coefficients // Asymptot. Anal. 2010. V. 66. No. 3 — 4. Pp. 207—228.
9. **Krylova A.S., Sandrakov G.V.** Homogenization of Spectral Problem on Small-periodic Networks // Журнал математической физики, анализа, геометрии. 2012. V. 8. No. 4. Pp. 336—356.
10. **Егер В., Нойс-Раду М., Шапошникова Т.А**. Об усреднении уравнения диффузии в перфорированной области с нелинейным условием на поток на границе полостей и масштабами задачи, приводящими к новому нелинейному соотношению между краевыми условиями и эффективным распределением источников-стоков // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2011. Вып. 28. С. 161—181.
11. **Nguetseng, G.** A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. Pp. 608—623.
12. **Nguetseng G.** Asymptotic Analysis for a Stiff Variational Problem Arising in Mechanic. // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. Pp .1394—1414.
13. **Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.** Two-scale Convergence // Int. J. Pure and Appl. Math. 2002. V. 2. No. 1. Pp. 35—86.
14. **Allaire G.** A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. Pp. 1482—1518.
15. **Жиков В.В.** Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Математический сборник. 2000. Т. 191. № 7. С. 31—72.

References

1. **Bakhvalov N.S.** Osrednenie Differentsial'nykh Uravneniy s Chastnymi Proizvodnymi s Bystro Ostsilliruyushchimi Koeffitsientami. Doklady AN SSSR. 1975; 221;3:516—519. (in Russian).
2. **Bakhvalov N.S. Panasenko G.P.** Osrednenie Protsessov v Periodicheskikh Sredakh. Matematicheskie Zadachi Mekhaniki Kompozitsionnykh Materialov. M.: Nauka, 1984. (in Russian).
3. **Zhikov V.V., Kozlov S.M., Oleynik O.A.** Usrednenie Differentsial'nykh Operatorov. M.: Nauka, 1993. (in Russian).
4. **Belyaev A.Yu.** Usrednenie v Zadachakh Teorii Fil'tratsii. M.: Nauka, 2004. (in Russian).
5. **Shamaev A.S., Shumilova V.V.** Homogenization of Acoustic Equations for a Partially Perforated Elastic Material with Slightly Viscous Fluid. Zhurnal Sibirskogo Federal'nogo Un-ta. Seriya «Matematika i Fizika. 2015;8 (3):356—370.
6. **Zhikov V.V., Pastukhova S.E.** Usrednenie Monotonnykh Operatorov s Usloviyami Koertsitivnosti i Rosta Peremennogo Poryadka. Matematicheskie Zametki. 2011;90;1:53—69. (in Russian).
7. **Zhikov V.V.** Homogenization of a Navier–Stokes Type System for Electrorheological Fluid. Complex Variables and Elliptic Equations. 2011;56;7 — 9:545—558.
8. **Pastukhova S.E.** Estimates in Homogenization of Parabolic Equations with Locally Periodic Coefficients. Asymptot. Anal. 2010;66;3 — 4:207—228.
9. **Krylova A.S., Sandrakov G.V.** Homogenization of Spectral Problem on Small-periodic Networks. Zhurnal Matematicheskoy Fiziki, Analiza, Geometrii. 2012;8;4: 336—356.
10. **Eger V., Noys-Radu M., Shaposhnikova T.A.** Ob Usrednenii Uravneniya Diffuzii v Perforirovannoy Oblasti s Nelineynym Usloviem na Potok na Granitse Polostey i Masshtabami Zadachi, Privodyashchimi k Novomu Nelineynomu Sootnosheniyu Mezhdu Kraevymi Usloviyami i Effektivnym Raspredeleniem Istochnikov-Stokov. Trudy Seminara im. I.G. Petrovskogo. 2011;28: 161—181. (in Russian).
11. **Nguetseng, G.** A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization. SIAM J. Math. Anal. 1989;20:608—623.
12. **Nguetseng G.** Asymptotic Analysis for a Stiff Variational Problem Arising in Mechanic.. SIAM J. Math. Anal. 1990; 21:1394—1414.
13. **Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.** Two-scale Convergence. Int. J. Pure and Appl. Math. 2002;2;1: 35—86.
14. **Allaire G.** A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization. SIAM J. Math. Anal. 1992;23:1482—1518.
15. **Zhikov V.V.** Ob Odnom Rasshirenii i Primenenii Metoda Dvukhmasshtabnoy Skhodimosti. Matematicheskiy Sbornik. 2000;191;7:31—72. (in Russian).

16. **Жиков В.В., Иосифьян Г.А.** Введение в теорию двухмасштабной сходимости // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 281—332.

17. **Мейрманов А.М.** Уравнения акустики в упругих пористых средах // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13. № 2. С. 98—110.

18. **Meirmanov A.M.** Derivation of Equations of Seismic and Acoustic Wave Propagation and Equations of Filtration Via Homogenization of Periodic Structures // J. Math. Sci. 2009. V. 163. No. 2. Pp. 111—172.

19. **Мейрманов А.М., Гриценко С.А., Герус А.А.** Усредненные модели изотермической акустики в конфигурации «жидкость – пороупругая среда» // Сибирские электронные математические известия. 2016. № 13. С. 49—74.

20. **Burridge R., Keller J.B.** Poroelasticity Equations Derived from Microstructure // J. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 70. No. 4. Pp. 1140—1146.

21. **Sanchez-Palencia E.** Non-homogeneous Media and Vibration Theory // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1980. V. 129.

22. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

23. **Мейрманов А.М., Герус А.А., Гриценко С.А.** Усредненные модели изотермической акустики в конфигурации «упругое тело – пороупругая среда» // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 12. С. 3—19.

24. **Гриценко С.А., Мейрманов А.М.** О модели изотермической акустики для двухкомпонентной среды // Вестник МЭИ. 2017. № 6. С. 146—151.

25. **Conca C.** On the Application of the Homogenization Theory to a Class of Problems Arising in Fluid Mechanics // Math. Appl. 1985. V. 64. Pp. 31—75.

16. **Zhikov V.V., Iosif'yan G.A.** Vvedenie v Teoriyu Dvukhmasshtabnoy Skhodimosti. Trudy Seminara im. I.G. Petrovskogo. 2013;29:281—332. (in Russian).

17. **Meyrmanov A.M.** Uravneniya Akustiki v Uprugikh Poristykh Sredakh. Sibirskiy Zhurnal Industrial'noy Matematiki. 2010;13;2:98—110. (in Russian).

18. **Meirmanov A.M.** Derivation of Equations of Seismic and Acoustic Wave Propagation and Equations of Filtration Via Homogenization of Periodic Structures. J. Math. Sci. 2009;163;2:111—172.

19. **Meyrmanov A.M., Gritsenko S.A., Gerus A.A.** Usrednennye Modeli Izotermicheskoy Akustiki v Konfiguratsii «Zhidkost' – Porouprugaya Sreda». Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya. 2016;13:49—74. (in Russian).

20. **Burridge R., Keller J.B.** Poroelasticity Equations Derived from Microstructure. J. Acoust. Soc. Am. 1981;70; 4:1140—1146.

21. **Sanchez-Palencia E.** Non-homogeneous Media and Vibration Theory. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1980;129.

22. **Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.** Lineynye i Kvazilineynye Uravneniya Parabolicheskogo Tipa. M.: Nauka, 1967. (in Russian).

23. **Meyrmanov A.M., Gerus A.A., Gritsenko S.A.** Usrednennye Modeli Izotermicheskoy Akustiki v Konfiguratsii «Uprugoe Telo – Porouprugaya Sreda». Matematicheskoe Modelirovanie. 2016;28;12:3—19. (in Russian).

24. **Gritsenko S.A., Meyrmanov A.M.** O Modeli Izotermicheskoy Akustiki dlya Dvukhkomponentnoy Sredy. Vestnik MEI. 2017;6:146—151. (in Russian).

25. **Conca C.** On the Application of the Homogenization Theory to a Class of Problems Arising in Fluid Mechanics. Math. Appl. 1985;64:31—75.

Сведения об авторах:

Гриценко Светлана Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: sv.a.gritsenko@gmail.com
Мейрманов Анварбек Мукатович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Белгородского государственного национального исследовательского университета, e-mail: anvarbek@list.ru

Information about authors:

Gritsenko Svetlana A. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: sv.a.gritsenko@gmail.com
Meirmanov Anvarbek M. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Differential Equations Dept., Belgorod State University, e-mail: anvarbek@list.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *24.07.2018*
The article received to the editor: *24.07.2018*