# МАТЕМАТИКА

## Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (01.01.02)

УДК 517.95
DOI: 10.24160/1993-6982-2019-4-135-142

# Предельный переход в интегро-дифференциальных уравнениях с нулевым оператором дифференциальной части и несколькими быстро изменяющимися ядрами

М.А. Бободжанова, В.Ф. Сафонов, О.Д. Туйчиев

Рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение с нулевым оператором дифференциальной части и несколькими быстро изменяющимися ядрами. Изучен предельный переход его решения при стремлении малого параметра к нулю. Аналогичная задача анализировалась ранее для одного быстро изменяющегося ядра. В случае нескольких быстро изменяющихся ядер исследование сопряжено с довольно тонким анализом регуляризованного асимптотического решения, алгоритм построения которого ранее не разрабатывался. Непосредственное обобщение идей работы с одним быстро изменяющимся ядром малоэффективно, так как наличие нескольких спектральных значений ядра интегрального оператора существенно изменяет алгоритм метода регуляризации С.А. Ломова, делая его менее обозримым. Известно, что при исследовании предельного перехода при стремлении малого параметра к нулю в сингулярно возмущенных задачах обычно строится главный член асимптотики, для вычисления которого в случае интегро-дифференциальных уравнений с нулевым оператором дифференциальной части надо решить первые две итерационные задачи, возникающие в процессе построения асимптотики, при наличии известной правой части третьей итерационной системы. В случае одного быстро изменяющегося ядра построение такого решения не составляет особого труда, поскольку эквивалентная интегро-дифференциальная система имеет порядок, равный двум. В случае нескольких ядер этот порядок больше двух, что заметно усложняет построение решений соответствующих итерационных задач. Основные идеи проводимого обобщения и тонкости, возникающие при разработке соответствующего алгоритма метода регуляризации, полностью просматриваются в случае двух быстро изменяющихся ядер, поэтому в работе представлен именно этот случай.
Показано, что предельное решение существенно зависит от числа спектральных значений интегрального оператора, и точное решение исходной задачи стремится к предельному на всем рассматриваемом отрезке времени, что подтверждает эффект отсутствия в задаче пограничного слоя.

*Ключевые слова:* интегро-дифференциальные уравнения, регуляризация интеграла.

*Для цитирования:* Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф., Туйчиев О.Д. Предельный переход в интегро-дифференциальных уравнениях с нулевым оператором дифференциальной части и несколькими быстро изменяющимися ядрами // Вестник МЭИ. 2019. № 4. С. 135—142. DOI: 10.24160/1993-6982-2019-4-135-142.

# The Limiting Transition in Integro-Differential Equations Containing a Null Operator in the Differential Part and Several Rapidly Varying Kernels

M.A. Bobodzhanova, V.F. Safonov, O.D. Tuychiev

An integro-differential equation with a null operator in the differential part and several rapidly varying kernels is considered. The limiting transition of its solution with the small parameter tending to zero is studied. Earlier, a similar problem was considered for one rapidly varying kernel. In the case of several rapidly varying kernels, the investigation of this problem involves a rather subtle analysis of a regularized asymptotic solution, an algorithm for construction of which was previously developed.

An attempt to directly generalize the ideas of the study that dealt with one rapidly changing kernel is inefficient, because the presence of several spectral values of the integral operator's kernels involves the need to essentially change Lomov's regularization method algorithm, which becomes less observable. It is known that in studying the limit transition with a small parameter tending to zero in singularly perturbed problems, the asymptotics main term is usually constructed. For calculating this term in the case of integro-differential equations with a null operator in the differential part, it is necessary to solve the first two iteration problems arising in constructing the asymptotics, provided that there is a knowm right-hand side of the third iteration system. In the case of a single rapidly changing kernel, construction of such solution is quite straightforward, because the equivalent integro-differential system is of the second order. If there are several kernels, this order is greater than two, a circumstance that adds noticeably more difficulty to construction of solutions for the corresponding iterative problems. The basic ideas of the generalization and subtleties that arise in developing the corresponding regularization method algorithm are fully seen in the case of two rapidly varying kernels; this is why it is exactly this case that is presented in the article.
It is shown that the limit solution depends essentially on the number of integral operator spectral values, and that the exact solution of the initial problem tends to the limit solution on the entire considered time interval, a result that confirms the boundary layer lacking effect in the problem.

*Key words:* integro-differential equations, regularization of an integral.

*For citation:* Bobodzhanova M.A., Safonov V.F., Tuychiev O.D. The Limiting Transition in Integro-Differential Equations Containing a Null Operator in the Differential Part and Several Rapidly Varying Kernels. Bulletin of MPEI. 2019;4:135—142. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2019-4-135-142.

## Введение

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\sum_{j=1}^{r}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta} K_j(t,s)y(s,\varepsilon)ds+$$
$$+h(t),\ y(0,\varepsilon)=y^0,\ t\in[0,T],$$

с нулевым оператором дифференциальной части и несколькими быстро изменяющимися ядрами и изучим предельный переход его решения $y = (t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$. Аналогичная задача рассмотрена в [1, 2] для одного быстро изменяющегося ядра. В случае нескольких быстро изменяющихся ядер алгоритм построения регуляризованных асимптотических решений [3, 4] до настоящего времени не был развит. Непосредственное обобщение идей [1] на этот случай малоэффективно, так как наличие нескольких спектральных значений $\mu_j(t)$ ядра интегрального оператора существенно усложняет алгоритм метода регуляризации С.А. Ломова. В случае одного быстро изменяющегося ядра построение регуляризованного асимптотического решения не составляет особого труда, поскольку эквивалентная интегродифференциальная система имеет порядок, равный двум. В случае задачи (1) с $r \geq 2$ этот порядок увеличивается до $r + 1$, что заметно усложняет построение решений соответствующих итерационных задач, а значит, и самого асимптотического решения. Основные идеи обобщения на случай $r \geq 2$ полностью просматриваются в случае двух быстро изменяющихся ядер, поэтому в настоящей работе ради сокращения выкладок считаем, что в (1) $r = 2$. Заметим, что задача (1) не рассматривалась с точки зрения других методов асимптотического интегрирования (например, методов [5 — 7].

## Эквивалентная интегродифференциальная система и ее регуляризация

Предположим выполненными следующие условия:

1. $h(t),\mu_j(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C})$, $K_j(t,s)\in C^\infty(0\le s\le t\le T,\mathbb{C}),\ j=1,2;$
2. $\mu_1(t)\neq\mu_2(t)\ \forall t\in[0,T];$
3. $\mu_j(t)\neq 0, \operatorname{Re}\mu_j(t)\le 0,\ j=1,2,\ \forall t\in[0,T].$

Введем две новые неизвестные функции:

$$z_j=\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta} K_j(t,s)y(s,\varepsilon)ds,\quad j=1,2.$$

Дифференцируем их по $t$:

$$\frac{dz_j}{dt}=K_j(t,t)y+\frac{\mu_j(t)}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}\times$$
$$\times K_j(t,s)y(s,\varepsilon)ds+\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}\frac{\partial K_j(t,s)}{\partial t}y(s,\varepsilon)ds\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\varepsilon\frac{dz_j}{dt}=\mu_j(t)z_j+\varepsilon K_j(t,t)y+$$
$$+\varepsilon\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}\frac{\partial K_j(t,s)}{\partial t}y(s,\varepsilon)ds,\ j=1,2.$$

Вместо (1) получим систему

$$\varepsilon\frac{dw}{dt}=A(t)w+\varepsilon A_1(t)w+\varepsilon\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_1(\theta)d\theta}G_1(t,s)w(s,\varepsilon)ds+$$
$$+\varepsilon\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_2(\theta)d\theta}G_2(t,s)w(s,\varepsilon)ds+H(t),\quad w(0,\varepsilon)=\begin{pmatrix}y^0\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $w = \{y, z_1, z_2\}$, $H(t) = \{h(t), 0, 0\}$, а матрицы $A(t)$, $A_1(t)$, $G_j(t, s)$ имеют вид:

$$A(t)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&\mu_1(t)&0\\0&0&\mu_2(t)\end{pmatrix};\quad A_1(t)=\begin{pmatrix}0&0&0\\K_1(t,t)&0&0\\K_2(t,t)&0&0\end{pmatrix};$$

$$G_1(t,s)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\partial K_1(t,s)}{\partial t} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ G_2(t,s)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial K_2(t,s)}{\partial t}\end{pmatrix}.$$

Поскольку спектр $\sigma(A(t))=\{0,\ \mu_1(t),\ \mu_2(t)\}$ матрицы $A(t)$ имеет только два ненулевых собственных значения $\mu_j(t)$, то регуляризацию задачи (2) проведем с помощью переменных

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_j(\theta)d\theta\equiv\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\ j=1,2. \qquad (3)$$

Для расширения $\tilde{w}=\{y(t,\tau,\varepsilon),\ z_1(t,\tau,\varepsilon),\ z_2(t,\tau,\varepsilon)\}$ получим следующую систему:

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\mu_1(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_2}-A(t)\tilde{w}-\varepsilon A_1(t)\tilde{w}-$$
$$-\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}G_j(t,s)\tilde{w}\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds= \qquad (4)$$
$$=H(t),\ \tilde{w}(0,0,\varepsilon)=\left\{y^0,0,0\right\}\times$$
$$\times\Big(\tau=(\tau_1,\tau_2),\ \psi(t)=\big(\psi_1(t),\psi_1(t)\big)\Big).$$

Однако задачу (4) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не проведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde{w}=\sum_{j=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}G_j(t,s)\tilde{w}\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds.$$

Для регуляризации оператора $J\tilde{w}$ введем класс $M_\varepsilon=U|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}$, асимптотически инвариантный относительно оператора $J$ [1, с. 62]. При этом в качестве $U$ возьмем пространство вектор-функций $w(t,\tau)$, представляемых суммами вида

$$w(t,\tau)=w_1(t)e^{\tau_1}+w_2(t)e^{\tau_2}+$$
$$+w_0(t),w_j(t)\in C([0,T],\mathbb{C}^3),\ j=0,1,2. \qquad (5)$$

Покажем, что класс $M_\varepsilon$ асимптотически инвариантен относительно оператора $J$. Для этого надо доказать, что образ $Jw(t,\tau)$ на функциях вида (5) представим в виде ряда

$$Jw(t,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\big(w_1^{(k)}(t)e^{\tau_1}+w_1^{(k)}(t)e^{\tau_2}+w_0^{(0)}(t)\big)|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}, \qquad (6)$$

сходящегося асимптотически к $Jw$ (при $\varepsilon\to+0$) равномерно по $t\in[0,T]$. Подставим (5) в $Jw(t,\tau)$:

$$Jw(t,\tau)=\sum_{j=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}\sum_{k=1}^{2}G_j(t,s)w_k(s)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\mu_k(\theta)d\theta}ds+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}G_j(t,s)w_0(s)ds. \qquad (7)$$

Применяя операцию интегрирования по частям, получим следующее разложение:

$$Jw(t,\tau)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}\int_0^t G_1(t,s)w_1(s)ds+$$
$$+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(\theta)d\theta}\int_0^t G_2(t,s)w_2(s)ds+$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon^{m+1}\Bigg\{\Bigg[\Big(I_{12}^m\big(G_1(t,s)w_2(s)\big)\Big)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(\theta)d\theta}-$$
$$-\Big(I_{12}^m\big(G_1(t,s)w_2(s)\big)\Big)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}\Bigg]+$$
$$+\Bigg[\Big(I_{21}^m\big(G_2(t,s)w_1(s)\big)\Big)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}- \qquad (8)$$
$$-\Big(I_{21}^m\big(G_2(t,s)w_1(s)\big)\Big)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(\theta)d\theta}\Bigg]+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\Bigg[\begin{matrix}\Big(I_{j0}^m\big(G_j(t,s)w_0(s)\big)\Big)_{s=t}-\\ -\Big(I_{j0}^m\big(G_j(t,s)w_0(s)\big)\Big)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}\end{matrix}\Bigg]\Bigg\},$$

где введены операторы:

$$I_{12}^0=\frac{1}{\mu_2(s)-\mu_1(s)};\ I_{12}^m=\frac{1}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{12}^{m-1},$$
$$I_{21}^0=\frac{1}{\mu_1(s)-\mu_2(s)};\ I_{21}^m=\frac{1}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{12}^{m-1}, \qquad (9)$$
$$I_{j0}^0=\frac{1}{-\mu_j(s)};\ I_{j0}^m=\frac{1}{-\mu_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{j0}^{m-1};$$
$$j=1,2,m=1,2,3,....$$

Нетрудно показать [4], что ряд справа в (8) сходится к $Jw(t,\varepsilon)$ (при $\varepsilon\to+0$) равномерно по $t\in[0,T)$.

Введем операторы порядка (по $\varepsilon$) $R_m: U\to U$:

$$R_0w(t,\tau)=e^{\tau_1}\int_0^t G_1(t,s)w_1(s)ds+$$
$$+e^{\tau_2}\int_0^t G_2(t,s)w_2(s)ds;$$
$$R_{m+1}w(t,\tau)=(-1)^m\Bigg\{\Bigg[\Big(I_{12}^m\big(G_1(t,s)w_2(s)\big)\Big)_{s=t}e^{\tau_2}-$$
$$-\Big(I_{12}^m\big(G_1(t,s)w_2(s)\big)\Big)_{s=0}e^{\tau_1}\Bigg]+\Bigg[\Big(I_{21}^m\big(G_2(t,s)w_1(s)\big)\Big)_{s=t}e^{\tau_1}- \qquad (10)$$
$$-\Big(I_{21}^m\big(G_2(t,s)w_1(s)\big)\Big)_{s=0}e^{\tau_2}\Bigg]+\sum_{j=1}^{2}\Bigg[\Big(I_{j0}^m\big(G_j(t,s)w_0(s)\big)\Big)_{s=t}-$$
$$-\Big(I_{j0}^m\big(G_j(t,s)w_0(s)\big)\Big)_{s=0}e^{\tau_j}\Bigg]\Bigg\},\quad m\geq 0,\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}.$$

тогда образ $Jw(t,\tau)$ можно записать в виде:

$$J\,w(t,\tau)=R_0\,w(t,\tau)+\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}R_{m+1}\,w(t,\tau), \tag{11}$$

где $\tau=\dfrac{\psi(t)}{\varepsilon}$.

Проведем расширение оператора $J$ на рядах вида:

$$\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k\,w_k(t,\tau) \tag{12}$$

с коэффициентами $w_k(t,\tau)\in U$, $k\geq -1$.

**Определение 1.** Формальным расширением $\tilde{J}$ оператора $J$ на рядах вида (12) называется оператор

$$\tilde{J}\,\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)\overset{\text{def}}{=}\sum_{\nu=-1}^{\infty}\varepsilon^{\nu}\sum_{s=-1,\,\nu-s\geq 0}^{\nu}R_{\nu-s}\,w_s(t,\tau). \tag{13}$$

Несмотря на то, что расширение $\tilde{J}$ оператора $J$ определено формально, им вполне можно пользоваться при построении асимптотического решения конечного порядка по $\varepsilon$. Теперь легко выписать регуляризованную (по отношению к (1)) задачу:

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\mu_1(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_2}-A(t)\tilde{w}-\varepsilon A_1(t)\tilde{w}-\\-\varepsilon\tilde{J}\tilde{w}=H(t),\ \tilde{w}(0,0,\varepsilon)=\left\{y^0,0,0\right\}.\end{gathered} \tag{14}$$

### Разрешимость итерационных задач и асимптотическая сходимость формальных решений к точному

Подставив ряд (12) в (14) и приравняв коэффиценты при одинаковых степенях $\varepsilon$, получим следующие итерационные задачи:

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\mu_1(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_2}-A(t)\tilde{w}-\varepsilon A_1(t)\tilde{w}-\\-\varepsilon\tilde{J}\tilde{w}=H(t),\ \tilde{w}(0,0,\varepsilon)=\left\{y^0,0,0\right\}.\end{gathered} \tag{$15_{-1}$}$$

$$\begin{gathered}L_0\,w_0(t,\tau)=-\frac{\partial w_{-1}}{\partial t}+A_1(t)w_{-1}+\\+R_0\,w_{-1}+H(t),w_0(0,0)=w^0;\end{gathered} \tag{$15_0$}$$

$$\begin{gathered}L_0\,w_1(t,\tau)=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+A_1(t)w_0+\\+R_0\,w_0+R_1\,w_{-1},w_1(0,0)=0;\end{gathered} \tag{$15_1$}$$

$$\begin{gathered}L_0\,w_k(t,\tau)=-\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t}+A_1(t)w_{k-1}+R_0\,w_{k-1}+\\+R_1\,w_{k-2}+\ldots+R_k\,w_{-1},\ w_k(0,0)=0,k\geq 1.\end{gathered} \tag{$15_k$}$$

Переходя к формулировке теорем о нормальной и однозначной разрешимостях итерационных задач ($15_k$), вычислим собственные векторы $\varphi_j(t)$ и $\chi_j(t)$ матриц $A(t)$ и $A^*(t)$. Они выглядят как:

$$\begin{gathered}\varphi_0(t)=\{1,0,0\};\ \varphi_1(t)=\left\{\frac{1}{\mu_1(t)},1,0\right\};\\ \varphi_2(t)=\left\{\frac{1}{\mu_2(t)},0,1\right\};\ \chi_0(t)=\left\{1,-\frac{1}{\overline{\mu}_1(t)},-\frac{1}{\overline{\mu}_2(t)}\right\};\\ \chi_1(t)=\{0,1,0\};\ \chi_2(t)=\{0,0,1\},\end{gathered} \tag{$16_0$}$$

причем $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ соответствуют собственным значениям $\lambda_0(t)\equiv\lambda_1(t)\equiv\mu_1(t)$, $\lambda_2(t)\equiv\mu_2(t)$ матрицы $A(t)$ а $\chi_0(t)$, $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ — собственным значениям $\overline{\lambda}_0(t)\equiv 0,\overline{\lambda}_1(t)\equiv\overline{\mu}_1(t),\ \overline{\lambda}_2(t)\equiv\overline{\mu}_2(t)$ матрицы $A^*(t)$.

Каждая из итерационных систем ($15_k$) имеет вид:

$$L_0w(t,\tau)\equiv\mu_1(t)\frac{\partial w}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial w}{\partial\tau_2}-A(t)w=P(t,\tau), \tag{16}$$

где $P(t)=P_1(t)e^{\tau_1}+P_2(t)e^{\tau_2}+P_0(t)\in U$.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия 1 — 3 и $P(t,\tau)\in U$. Для того, чтобы система (16) имела решение в пространстве $U$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(P_j(t),\chi_j(t))\equiv 0,\ j=0,1,2,\ \forall t\in[0,T]. \tag{17}$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичного утверждения в [1]. При этом при выполнении условий ортогональности (17) система (16) имеет следующее решение в пространстве $U$:

$$\begin{aligned}w(t,\tau)=&\left[\begin{gathered}\alpha_1(t)\varphi_1(t)+\frac{\left(P_1(t),\chi_0(t)\right)}{\mu_1(t)}\varphi_0(t)+\\+\frac{\left(P_1(t),\chi_2(t)\right)}{\mu_1(t)-\mu_2(t)}\varphi_2(t)\end{gathered}\right]e^{\tau_1}+\\&+\left[\begin{gathered}\alpha_2(t)\varphi_2(t)+\frac{\left(P_2(t),\chi_0(t)\right)}{\mu_2(t)}\varphi_0(t)+\\+\frac{\left(P_2(t),\chi_1(t)\right)}{\mu_2(t)-\mu_1(t)}\varphi_1(t)\end{gathered}\right]e^{\tau_2}+\\&+\left[\begin{gathered}\alpha_0(t)\varphi_0(t)+\frac{\left(P_0(t),\chi_1(t)\right)}{-\mu_1(t)}\varphi_1(t)+\\+\frac{\left(P_0(t),\chi_2(t)\right)}{-\mu_2(t)}\varphi_2(t)\end{gathered}\right]\equiv\\&\equiv\sum_{j=0}^{2}\left[\alpha_j(t)\varphi_j(t)+\sum_{k=0,k\neq j}^{2}p_{jk}(t)\varphi_k(t)\right]e^{\tau_j},\end{aligned} \tag{18}$$

где $\alpha_j(t)\in C^{\infty}\left([0,T],\mathbb{C}^1\right)$ — произвольные функции; $p_{jk}(t)\equiv\dfrac{\left(P_j(t),\chi_k(t)\right)}{\mu_j(t)-\mu_k(t)},\ j,k=0,1,2$ ради удобства обозначим $\tau_0=0$; через (,) обозначено скалярное произведение в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$.

Рассмотрим систему (17) при дополнительных условиях

$$
\begin{aligned}
& w(0,0)=w^{*}; \\
& <-\frac{\partial w}{\partial t}+A_1(t)w+R_0\,w+Q(t,\tau),\chi_j(t)e^{\tau_j}>\equiv 0, \\
& j=1,2,\forall t\in[0,T]; \\
& <-\frac{\partial w}{\partial t}+A_1(t)w+R_0\,w+Q(t,\tau), \\
& \chi_0(t)>\equiv 0\ \ \forall t\in[0,T],
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где $Q(t,\tau)=Q_1(t)e^{\tau_1}+Q_2(t)e^{\tau_2}+Q_0(t)$ — известная функция класса $U$; $w^{*}\in\mathbb{C}^3$ — постоянный вектор; через $<,>$ обозначено скалярное (при каждом $t\in[0,T]$) произведение в пространстве $U$:

$$
\begin{aligned}
& <w(t,u),v(t,u)>\equiv<\sum_{j=1}^{2}w_j(t)e^{\tau_j}+w_0(t),\sum_{j=1}^{2}v_j(t)e^{\tau_j}+ \\
& +v_0(t)>\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=0}^{2}(w_k(t),v_k(t)).
\end{aligned}
$$

Имеет место следующее утверждение (доказательство выполнено по схеме работы [1]).

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия 1 — 3 и вектор-функция $P(t,\tau)\in U$ удовлетворяет условиям (17). Тогда система (16) при дополнительных условиях (19) однозначно разрешима в $U$. При этом функции $\alpha_j(t)$ в решении (18) задач (16), (19) находятся из распадающейся системы уравнений:*

$$
\begin{aligned}
& \dot\alpha_0(t)=\big(A_1(t)\varphi_0(t),\chi_0(t)\big)\alpha_0(t)+q_0(t), \\
& \dot\alpha_1(t)=\big(A_1(t)\varphi_1(t)-\dot\varphi_1(t),\chi_1(t)\big)\alpha_1(t)+ \\
& +\int_0^t\big(G_1(t,s)\varphi_1(s),\chi_1(t)\big)\alpha_1(s)ds+q_1(t); \\
& \dot\alpha_2(t)=\big(A_1(t)\varphi_2(t)-\dot\varphi_2(t),\chi_2(t)\big)\alpha_2(t)+ \\
& +\int_0^t\big(G_2(t,s)\varphi_2(s),\chi_2(t)\big)\alpha_2(s)ds+q_2(t), \\
& \Leftrightarrow \alpha_s(0)=\big(w^{*},\chi_s(0)\big)-\sum_{s=0,s\neq j}^{2}p_{js}(0),\ s=0,1,2.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

*где:*

$$
q_0(t)\equiv\left(Q_0(t)-\sum_{k=1}^{2}p_{0k}(t)\dot\varphi_k(t)+\sum_{k=0}^{1}p_{0k}(t)A_1(t)\varphi_k(t),\chi_0(t)\right),
$$

$$
\begin{aligned}
& q_1(t)\equiv\Bigg(Q_1(t)-\sum_{k=0,k\neq1}^{2}p_{1k}(t)\dot\varphi_k(t)+\sum_{k=0,k\neq1}^{2}p_{1k}(t)A_1(t)\varphi_k(t)+ \\
& +\sum_{k=0.k\neq1}^{2}\int_0^t p_{1k}(s)G_1(t,s)\varphi_k(s)ds,\chi_1(t)\Bigg);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& q_2(t)\equiv\Bigg(Q_2(t)-\sum_{k=0}^{1}p_{2k}(t)\dot\varphi_k(t)+\sum_{k=0}^{1}p_{2k}(t)A_1(t)\varphi_k(t)+ \\
& +\sum_{k=0}^{1}\int_0^t p_{2k}(s)G_2(t,s)\varphi_k(s)ds,\chi_2(t)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Так же, как и в [2, с.70 — 75], можно доказать следующую теорему об асимптотической сходимости формальных решений к точным.

**Теорема 3.** *Пусть для системы (2) выполнены условия 1 — 3, тогда при $\varepsilon=(0,\varepsilon_0]$ ($\varepsilon>0$ достаточно мало) у системы (2) есть единственное решение $w(t,\varepsilon)\in C^1([0,T],\mathbb{C}^3)$, и имеет место оценка:*

$$
\|w(t,\varepsilon)-w_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,T]}\le c_N\varepsilon^{N+1},\ N=-1,0,1,...,
$$

*где $w_{\varepsilon,N}(t)$ — сужение (при $\tau=\dfrac{\psi(t)}{\varepsilon}$) $N$-ой частичной суммы ряда (12) (с коэффициентами $w_k(t,\tau)\in U$, удовлетворяющими итерационным задачам ($15_k$)); постоянная $c_N>0$ не зависит от $\varepsilon$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.*

Поскольку решение $y(t,\varepsilon)$ исходной задачи (1) является первой компонентой вектор-функции $w(t,\varepsilon)$, то для него (при условиях 1 — 3) также справедлива оценка

$$
\|y(t,\varepsilon)-y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,T]}\le c_N\varepsilon^{N+1},N=-1,0,1,...;
$$

$c_N>0$ не зависит от $\varepsilon$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

**Предельный переход в задаче (1)**

Согласно теореме 3

$$
\begin{aligned}
& w(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}w_{-1}(t,\tau)+w_0(t,\tau)+\varepsilon F_1(t,\varepsilon); \\
& \big(\tau=\psi(t)/\varepsilon\big),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $\left\|F_1(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,T]}\le c_0\ \big(\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]\big)$.

Следовательно, для изучения предельного перехода в (2) следует найти решения $w_{-1}(t,\tau)$, $w_0(t,\tau)$ итерационных задач ($15_{-1}$) и ($15_0$). Сделаем это, используя формулы (18), (20).

Поскольку в первой итерационной задаче ($15_{-1}$) функции $p_{jk}(t)\equiv p_{jk}^{(-1)}(t)\equiv 0\big(j=1,2,k=0,1,2\big)$, то ее решение в пространстве $U$ (см. (18)) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
& w_{-1}(t,\tau)=\alpha_1^{(-1)}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_1}+ \\
& +\alpha_2^{(-1)}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_2}+\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где $\alpha_j^{(-1)}(t)\in C^{\infty}[0,T]$ — пока неизвестные скалярные функции.

Подчиняя (22) начальному условию $w_{-1}(0,0)=0$, получим:

$$
\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^{(-1)}(0)\varphi_j(0)=0\Leftrightarrow\alpha_j^{(-1)}(0)=0,\ j=0,1,2. \tag{23}
$$

При этом следующая итерационная задача ($15_0$) примет вид:

$$
\begin{aligned}
& Lw_0(t,\tau)=\sum_{j=1}^{2}[\big(-\alpha_j^{(-1)}(t)\varphi_j(t)\big)^{\cdot}+ \\
& +\alpha_j^{(-1)}(t)A_1(t)\varphi_j(t)]e^{\tau_j}+ \\
& +\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^t G_i(t,s)\alpha_i^{(-1)}(s)\varphi_i(t)ds\right)e^{\tau_i}+ \\
& +\big(-\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)\big)^{\cdot}+\alpha_0^{(-1)}(t)A_1(t)\varphi_0(t)+H(t).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

По теореме 1 эта система разрешима в пространстве $U$ тогда и только тогда, когда выполняются условия ортогональности (см. (17)):

$$\left(\left(-\alpha_i^{(-1)}(t)\varphi_i(t)\right)^{\bullet}+\alpha_i^{(-1)}(t)A_1(t)\varphi_i(t)+\right.$$
$$\left.+\int_0^t G_i(t,s)\alpha_i^{(-1)}(s)\varphi_i(t)ds,\chi_i(t)\right)\equiv 0, i=1,2;$$
$$\left(\left(-\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)\right)^{\bullet}+\alpha_0^{(-1)}(t)A_1(t)\varphi_0(t)+H(t),\chi_0(t)\right)\equiv 0.$$

Подробнее запишем эту систему, учитывая, что $H(t)=\{h(t),0,0\}$, и вид $(16_0)$ собственных векторов $\chi_j(t)$ и $\varphi_j(t)$:

$$\dot\alpha_1^{(-1)}(t)=\left(A_1(t)\varphi_1(t)-\dot\varphi_1(t),\chi_1(t)\right)\alpha_1^{(-1)}(t)+$$
$$+\int_0^t\left(G_1(t,s)\varphi_1(s),\chi_1(t)\right)\alpha_1^{(-1)}(s)ds;$$
$$\dot\alpha_2^{(-1)}(t)=\left(A_1(t)\varphi_2(t)-\dot\varphi_2(t),\chi_2(t)\right)\alpha_2^{(-1)}(t)+$$
$$+\int_0^t\left(G_2(t,s)\varphi_2(s),\chi_2(t)\right)\alpha_2^{(-1)}(s)ds.$$
$$\dot\alpha_0^{(-1)}(t)=\left(A_1(t)\varphi_0(t),\chi_0(t)\right)\alpha_0^{(-1)}(t)+h(t),$$

Поскольку начальные условия (23) для данной системы нулевые, то

$$\alpha_j^{(-1)}(t)\equiv 0, j=1,2;$$
$$\alpha_0^{(-1)}(t)=\int_0^t e^{\int_s^t\left(A_1(\theta)\varphi_0(\theta),\chi_0(\theta)\right)d\theta}h(s)ds\Rightarrow$$
$$\Rightarrow w_{-1}(t,\tau)=\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)\equiv \tag{25}$$
$$\equiv\left(\int_0^t e^{\int_s^t\left(A_1(\theta)\varphi_0(\theta),\chi_0(\theta)\right)d\theta}h(s)ds\right)\varphi_0(t).$$

Уточним вид системы (24):

$$Lw_0(t,\tau)=-\left(\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)\right)^{\bullet}+$$
$$+A_1(t)\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)+H(t)\equiv P_0^{(0)}(t); \tag{$24_0$}$$
$$w_0(0,0)=w^0.$$

Заметим, что в силу того, что все $\alpha_j^{(-1)}(0)=0$ $(j=0,1,2)$ имеет место равенство $P_0^{(0)}(0)=0$. Действительно,

$$P_0^{(0)}(0)=-\left(\dot\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)+\alpha_0^{(-1)}(t)\dot\varphi_0(t)\right)|_{t=0}+$$
$$+A_1(0)\alpha_0^{(-1)}(0)\varphi_0(0)+H(0)=$$
$$=-\dot\alpha_0^{(-1)}(0)\varphi_0(0)+H(0)=$$
$$=-\left[\left(A_1(t)\varphi_0(t)-\dot\varphi_0(t),\chi_0(t)\right)\alpha_0^{(-1)}(t)+h(t)\right]_{t=0}\times$$
$$\times\varphi_0(0)+H(0)=-h(0)\varphi_0(0)+H(0)=$$
$$+-\left\{h(0),0,0\right\}+\left\{h(0),0,0\right\}=0.$$

В силу выполнения условий ортогональности (17), система (24) имеет следующее решение (см. (18)):

$$w_0(t,\tau)=\alpha_1^{(0)}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_1}+$$
$$+\alpha_2^{(0)}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_2}+\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t)+$$
$$+p_{01}^{(0)}(t)\varphi_1(t)+p_{02}^{(0)}\varphi_2(t),\ p_{0k}^{(0)}(t)\equiv \tag{26}$$
$$\equiv\frac{\left(P_0^{(0)}(t),\chi_k(t)\right)}{-\mu_k(t)},\ k=1,2.$$

Начальное условие $w_0(0,0)=w^0$ (с учетом того, что $P_0^{(0)}(0)=0$) приводит к системе

$$\alpha_1^{(0)}(0)\varphi_1(0)+\alpha_2^{(0)}(0)\varphi_2(0)+\alpha_0^{(0)}(0)\varphi_0(0)=w^0,$$

из которой находим значения $\alpha_j^{(0)}(0)$:

$$\alpha_j^{(0)}(0)=\left(w^0,\chi_j(0)\right), j=0,1,2\Leftrightarrow$$
$$\alpha_1^{(0)}(0)=\left(\left\{y^0,0,0\right\},\left\{0,1,0\right\}\right)=0;$$
$$\alpha_2^{(0)}(0)=\left(\left\{y^0,0,0\right\},\left\{0,0,1\right\}\right)=0; \tag{27}$$
$$\alpha_0^{(0)}(0)=\left(\left\{y^0,0,0\right\},\left\{1,-1/\bar\mu_1(0),-1/\bar\mu_2(0)\right\}\right)=y^0.$$

Окончательное вычисление скалярных функций $\alpha_j^{(0)}(t)$ осуществляется на следующем шаге при подчинении правой части системы

$$Lw_1(t,\tau)=-\frac{\partial w_0}{\partial t}+A_1(t)w_0+R_0w_0+R_1w_{-1} \tag{$15_1$}$$

условиям ортогональности (17). Вид оператора $R_0$ выписан в первом выражении (10). Требуется явный вид оператора $R_1$. Полагая $m=0$, во втором выражении (10), будем иметь:

$$R_1w_{-1}(t,\tau)=\left[\left(\frac{G_1(t,s)w_0^{(-1)}(s)}{-\mu_1(s)}\right)_{s=t}-\right.$$
$$-\left(\frac{G_1(t,s)w_0^{(-1)}(s)}{-\mu_1(s)}\right)_{s=0}e^{\tau_1}+\left(\frac{G_2(t,s)w_0^{(-1)}(s)}{-\mu_2(s)}\right)_{s=t}-$$
$$\left.-\left(\frac{G_2(t,s)w_0^{(-1)}(s)}{-\mu_2(s)}\right)_{s=0}e^{\tau_2}\right]-\left\{\left[\left(\frac{G_1(t,s)w_2^{(-1)}(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\right)_{s=t}\times\right.\right.$$
$$\left.\times e^{\tau_2}-\left(\frac{G_1(t,s)\ w_2^{(-1)}(s)}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\right)_{s=0}e^{\tau_1}\right]+$$
$$\left.+\left[\left(\frac{G_2(t,s)\ w_2^{(-1)}(s)}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\right)_{s=t}e^{\tau_1}-\left(\frac{G_2(t,s)\ w_2^{(-1)}(s)}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\right)_{s=0}e^{\tau_2}\right]\right\}.$$

Поскольку $w_{-1}(t,\tau)=\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)$, то

$$w_0^{(-1)}(t)=\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t), w_1^{(-1)}(t)=w_2^{(-1)}(t)\equiv 0,$$

поэтому в правой части выражения для $R_1w_{-1}(t,\tau)$ выражение в фигурной скобке исчезает, и получается более простое выражение для $R_1 w_{-1}(t, \tau)$ с учетом того, что $\alpha_j^{(-1)}(0) = 0$:

$$R_1 w_{-1}(t,\tau) = \frac{G_1(t,t)\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)}{-\mu_1(t)} + \frac{G_2(t,t)\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)}{-\mu_2(t)}.$$

Система ($15_1$) примет вид:

$$\begin{aligned} Lw_1(t,\tau) &= \sum_{j=1}^{2}\left[\left(-\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)\right)^{\bullet} + \alpha_j^{(0)}(t)A_1(t)\varphi_j(t)\right]e^{\tau_j} + \\ &+\sum_{i=1}^{2}\left(\int_0^t G_i(t,s)\alpha_i^{(0)}(s)\varphi_i(t)ds\right)e^{\tau_i} - \\ &-\left(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t) + p_{01}^{(0)}(t)\varphi_1(t) + p_{02}^{(0)}\varphi_2(t)\right)^{\bullet} + \\ &+A_1(t)\left(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t) + p_{01}^{(0)}(t)\varphi_1(t) + p_{02}^{(0)}\varphi_2(t)\right) + \\ &+\frac{G_1(t,t)\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)}{-\mu_1(t)} + \frac{G_2(t,t)\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)}{-\mu_2(t)}. \end{aligned}$$

Подчинив ее правую часть условиям ортогональности (17), придем к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &-\left(\alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)\right)^{\bullet} + \alpha_j^{(0)}(t)A_1(t)\varphi_j(t) + \\ &+\int_0^t G_j(t,s)\alpha_j^{(0)}(s)\varphi_j(s)ds = 0,\ j = 1,2, \\ &-\left(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t)\right)^{\bullet} + \alpha_0^{(0)}(t)A_1(t)\varphi_0(t) + f_0(t) = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned} f_0(t) &\equiv (\left(p_{01}^{(0)}(t)\varphi_1(t)\right)^{\bullet} + \left(p_{02}^{(0)}(t)\varphi_2(t)\right)^{\bullet} + \\ &+A_1(t)[p_{01}^{(0)}(t)\varphi_1(t) + p_{02}^{(0)}(t)\varphi_2(t)] + \\ &+\frac{G_1(t,t)\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)}{-\mu_1(t)} + \frac{G_2(t,t)\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)}{-\mu_2(t)}, \chi_0(t)). \end{aligned}$$

Поскольку (см. (27)) $\alpha_j^{(0)}(0) = 0, j = 1, 2$; $\alpha_0^{(0)}(0) = 0 = y_0$, то система (28) имеет следующее решение ($\dot{\varphi}_0(t) \equiv 0$):

$$\begin{aligned} &\alpha_j^{(0)}(t) \equiv 0,\ j = 1,2; \\ &\alpha_0^{(0)}(t) = \exp\left(\int_0^t \left(A_1(\theta)\varphi_0(\theta), \chi_0(\theta)\right)d\theta\right)y^0 + \\ &+\int_0^t \exp\left(\int_s^t \left(A_1(\theta)\varphi_0(\theta), \chi_0(\theta)\right)d\theta\right)f_0(s)ds. \end{aligned} \tag{29}$$

Таким образом, в равенстве (21) полностью найдены $w_{-1}(t, \tau)$, $w_0(t, \tau)$:

$$\begin{aligned} w_{-1}(t,\tau) &= \alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t) \equiv \\ &\equiv \left(\int_0^t e^{\int_s^t \left(A_1(\theta)\varphi_0(\theta), \chi_0(\theta)\right)d\theta} h(s)ds\right)\varphi_0(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_0(t,\tau) &= \alpha_1^{(0)}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_1} + \\ &+\alpha_2^{(0)}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_2} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t) + \\ &+p_{01}^{(0)}(t)\varphi_1(t) + p_{02}^{(0)}\varphi_2(t), \end{aligned} \tag{30}$$

где $\tau = \psi(t)/\varepsilon$; $p_{0k}^{(0)}(t) \equiv \dfrac{\left(P_0^{(0)}(t), \chi_k(t)\right)}{-\mu_k(t)}$, $k = 1,2$; $P_0^{(0)}(t) =$

$$= -\left(\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t)\right)^{\bullet} + A_1(t)\alpha_0^{(-1)}(t)\varphi_0(t) + H(t).$$

Ясно, что для существования конечного предела $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} w(t,\varepsilon)$ необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} &w_{-1}(t,\tau) \equiv 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\int_0^t e^{\int_s^t \left(A_1(\theta)\varphi_0(\theta), \chi_0(\theta)\right)d\theta} h(s)ds\right)\varphi_0(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_0^t e^{\int_s^t \left(A_1(\theta)\varphi_0(\theta), \chi_0(\theta)\right)d\theta} h(s)ds \equiv 0. \end{aligned}$$

Это тождество выполняется тогда и только тогда, когда $h(t) \equiv 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} &\alpha_0^{(-1)}(t) \equiv 0;\ P_0^{(0)}(t) \equiv 0;\ p_{0k}(t) \equiv 0(k = 1,2);\ f_0(t) \equiv 0; \\ &\alpha_0^{(0)}(t) = e^{\int_0^t \left(A_1(\theta)\varphi_0(\theta), \chi_0(\theta)\right)d\theta} y^0 \equiv y^0 e^{-\int_0^t \left(\frac{K_1(\theta,\theta)}{\mu_1(\theta)} + \frac{K_2(\theta,\theta)}{\mu_2(\theta)}\right)d\theta}; \\ &w_0(t,\tau) = y^0 e^{-\int_0^t \left(\frac{K_1(\theta,\theta)}{\mu_1(\theta)} + \frac{K_2(\theta,\theta)}{\mu_2(\theta)}\right)d\theta} \varphi_0(t). \end{aligned}$$

Из (21) вытекает следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия 1, 2, тогда для того, чтобы имел место предельный переход,*

$$\left\| y(t,\varepsilon) - \left(y^0 e^{-\int_0^t \left(\frac{K_1(\theta,\theta)}{\mu_1(\theta)} + \frac{K_2(\theta,\theta)}{\mu_2(\theta)}\right)d\theta}\right)\right\|_{C[0,T]} \to 0\ (\varepsilon \to +0),$$

*необходимо и достаточно, чтобы* $h(t) \equiv 0$ $\left(\forall t \in [0,T]\right)$.

Заметим, что если $h(t) \not\equiv 0$ на отрезке $[0, T]$, то указанный предельный переход невозможен. В этом случае следует показать, что существует равномерный по $t \in [0, T]$ асимптотический предельный режим при $\varepsilon \to +0$ [8, с. 528]. Отметим, что равномерный переход, указанный в теореме 4, справедлив на всем отрезке $[0, T]$. Это означает, что в задачах типа (1) отсутствует пограничный слой в окрестности точки $t = 0$.

### Литература

1. **Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф.** Асимптотический анализ сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем с нулевым оператором дифференциальной части // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 519—536.

2. **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Интегральные уравнения Вольтерра с быстро изменяющимися ядрами и их асимптотическое интегрирование // Математический сборник. 2001. Т. 192. № 8. С. 53—78.

3. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

4. **Ломов С.А., Ломов И.С.** Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.

5. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

6. **Иманалиев М.И.** Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегродифференциальных уравнений. Фрунзе: Илим, 1972.

7. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.** Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 41. № 7. С. 799—851.

8. **Бободжанова М.А.** Сингулярно возмущенные интегродифференциальные системы с нулевым оператором дифференциальной части // Вестник МЭИ. 2010. № 6. С.63—72.

### References

1. **Bobodzhanova M.A., Safonov V.F.** Asimptoticheskiy Analiz Singulyarno Vozmushchennykh Integrodifferentsial'nykh Sistem s Nulevym Operatorom Differentsial'noy Chasti. Differentsial'nye Uravneniya. 2011;47;4:519—536. (in Russian).

2. **Bobodzhanov A.A., Safonov V.F.** Integral'nye Uravneniya Vol'terra s Bystro Izmenyayushchimisya Yadrami i Ikh Asimptoticheskoe Integrirovanie. Matematicheskiy Sbornik. 2001;192;8:53—78. (in Russian).

3. **Lomov S.A.** Vvedenie v Obshchuyu Teoriyu Singulyarnykh Vozmushcheniy. M.: Nauka, 1981. (in Russian).

4. **Lomov S.A., Lomov I.S.** Osnovy Matematicheskoy Teorii Pogranichnogo Sloya. M.: Izd-vo MGU, 2011. (in Russian).

5. **Vasil'eva A.B., Butuzov V.F.** Asimptoticheskie Razlozheniya Resheniy Singulyarno Vozmushchennykh Uravneniy. M.: Nauka, 1973. (in Russian).

6. **Imanaliev M.I.** Asimptoticheskie Metody v Teorii Singulyarno Vozmushchennykh Integrodifferentsial'nykh Uravneniy. Frunze: Ilim, 1972. (in Russian).

7. **Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N.** Kontrastnye Struktury v Singulyarno Vozmushchennykh Zadachakh. Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki. 2011;41;7:799—851. (in Russian).

8. **Bobodzhanova M.A.** Singulyarno Vozmushchennye Integrodifferentsial'nye Sistemy s Nulevym Operatorom Differentsial'noy Chasti. Vestnik MEI. 2010;6: 63—72. (in Russian).



**Сведения об авторах:**

**Бободжанова Машхура Абдухафизовна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: BobojanovaMA@mpei.ru
**Сафонов Валерий Федорович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: SafonovVF@mpei.ru
**Туйчиев Олим Джураевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики Худжандского государственного университета им. академика Бободжана Гафурова (Таджикистан)

**Information about authors:**

**Bobodzhanova Mashkhura A.** — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: BobojanovaMA@mpei.ru
**Safonov Valeriy F.** — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: SafonovVF@mpei.ru
**Tuychiev Olim D.** — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Informatics Dept., Khujand State University Named after Academician Bobojan Gafurov (Tadjikistan)



**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
**Conflict of interests:** the authors declare no conflict of interest

**Статья поступила в редакцию:** *25.07.2018*
**The article received to the editor:** *25.07.2018*