УДК 517.972.5
DOI: 10.24160/1993-6982-2019-4-143-146

О задаче продолжения функции внутрь круга в пространствах с весом, имеющим особенность на границе

П.В. Зубков

Доказано, что всякая квадратично-суммируемая со степенным весом в единичном круге функция единственным образом представляется в виде ортогональной суммы аналитической и коаналитической составляющих, поэтому коаналитическую составляющую естественно считать определенной характеристикой неаналитичности функции. Рассмотрена задача о нахождении такого продолжения функции с единичной окружностью внутри круга, чтобы оно наименее уклонялось от весового подпространства Соболева аналитических функций (задача минимизации коаналитического уклонения). Аналогичные коаналитические задачи решались другими авторами в безвесовом случае для единичного круга, полуполосы, произвольной ограниченной односвязной области с гладкой границей. Задача поставлена в пространствах с весом, имеющим степенную особенность на всей границе единичного круга, а граничные значения функций взяты из соответствующего пространства Бесова. Сформулированы известные свойства весовых пространств, в том числе прямая и обратная теоремы о следах функций из рассматриваемых классов. Используя эти свойства, в рамках идей теории монотонных операторов доказана теорема о существовании и единственности решения задачи.

Ключевые слова: весовые пространства, особенность на границе, коаналитическая задача, продолжение функции.

Для цитирования: Зубков П.В. О задаче продолжения функции внутрь круга в пространствах с весом, имеющим особенность на границе // Вестник МЭИ. 2019. № 4. С. 143—146. DOI: 10.24160/1993-6982-2019-4-143-146.

On the Problem of Extending a Function to inside a Circle in Spaces with a Weight Having a Singularity at the Boundary

P.V. Zubkov

It has been proven that any quadratically summable function with a power weight in the unit circle is uniquely represented as an orthogonal sum of its analytic and coanalytic components; therefore, it is natural to consider the coanalytic component of a function as a certain characteristic of its nonanalyticity. The article considers the problem of finding the extension of a function with the unit circle inside the circle that it would have the minimal deviation from the Sobolev weight subspace of analytic functions (the problem of minimizing the coanalytic deviation). Similar coanalytic problems were considered by other researchers in the weightless case for a unit circle, half-band, and an arbitrary bounded simply connected domain with a smooth boundary. The problem is formulated in spaces with a weight having a power singularity at the unit circle entire boundary, and the boundary values of the functions are taken from the corresponding Besov space. The known properties of weight spaces, including the direct and inverse theorems about the traces of functions from the considered classes are formulated. By using these properties, a theorem about the existence and uniqueness of the problem solution is proved in the framework of the ideas of the monotonic operators theory.

Key words: weight spaces, singularity at a boundary, coanalytic problem, function extension.

For citation: Zubkov P.V. On the Problem of Extending a Function to inside a Circle in Spaces with a Weight Having a Singularity at the Boundary. Bulletin of MPEI. 2019;4:143—146. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2019-4-143-146.

Постановка задачи

Пусть $K = \{z \in C^1 \colon |z| < 1\}$ — круг единичного радиуса; $\Gamma = \{z \in C^1 \colon |z| = 1\}$ — граница единичного круга.

В качестве весовой функции на K рассмотрим степенную функцию, имеющую особенность на всей границе Γ, вида $\mu(x, y) = (1 - \rho)^L$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $-1 < L < 1$.

Символом $W^1_{2,L}(K)$ обозначим весовой класс функций, определенных на K, для которых конечна величина

$$f_{W^1_{2,L}(K)} = \left\{ \left\| \nabla f \left(1-\rho\right)^{L/2} \right\|^2_{L_2(K)} + \left\| f \right\|^2_{L_2(K)} \right\}^{1/2},$$

где

$$f^2_{L_2(K)} = \iint_K |f|^2 \, dxdy;$$

$$\left\| \nabla f \left(1-\rho\right)^{L/2} \right\|^2_{L_2(K)} = \iint_K \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 \right) \left(1-\rho\right)^L dxdy$$

— так называемый «весовой интеграл Дирихле».

Перечислим ряд свойств введенного класса $W^1_{2,L}(K)$ функций (приводятся по материалам [1]).

1. Пусть $-1 < L < 1$, тогда справедливо вложение $W^1_{2,L}\left(K\right) \subset B_2^{(1-L)/2}\left(\Gamma\right)$. Это означает, что если $f \in W^1_{2,L}(K)$, то она имеет на границе Γ следы

$$f\big|_\Gamma = f_0 \in B_2^{(1-L)/2}\left(\Gamma\right),$$

и при этом выполняется неравенство

$$\left\| f_0 \right\|_{B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)} \le C \left\| f \right\|_{W^1_{2,L}(K)},$$

где константа C не зависит от функции f, здесь и далее $B_2^\nu(\Gamma)$, $\nu > 0$ — пространство Бесова [2, с. 267—268].

2. Пусть $-1 < L < 1$. Если задана функция $f_0 \in B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)$, то существует функция $f \in W^1_{2,L}(K)$, для которой выполнено равенство $f|_\Gamma = f_0$, и справедлива оценка

$$\|f\|_{W^1_{2,L}(K)} \le C\|f_0\|_{B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)}.$$

3. Пусть $-1 < L < 1$, тогда справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_2(K)} \le C\left\{\|f\|_{0L_2(\Gamma)} + \left\|\nabla f(1-\rho)^{L/2}\right\|_{L_2(K)}\right\},$$

где $f|_\Gamma = f_0$, константа C не зависит от f.

4. Обозначим $\dot{W}^1_{2,L}(K)$ замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых в K функций в норме пространства $W^1_{2,L}(K)$, тогда при $-1 < L < 1$

$$\dot{W}^1_{2,L}(K) = \left\{f \in W^1_{2,L}(K) : f|_\Gamma = 0\right\}.$$

5. Пусть $f_0 \in L_2(\Gamma)$ имеет разложение в ряд Фурье на $[0, 2\pi]$, задаваемое формулой

$$f_0(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n\varphi,$$

тогда $f_0 \in B_2^\nu(\Gamma)$, $\nu \ge 0$ в том и только в том случае, если

$$\|f_0\|^2_{B_2^\nu(\Gamma)} = \frac{|\alpha_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\nu}\left(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2\right) < +\infty.$$

В [3] доказано, что всякая суммируемая с квадратом функция в весовом пространстве может быть представлена в виде ортогональной суммы аналитической и коаналитической составляющих

$$f(z) = f_a(z) + f_{ca}(z),$$

поэтому коаналитическую составляющую естественно считать определенной характеристикой неаналитичности функции. В [4] доказана эквивалентность норм весового пространства из [3] и пространства $W^1_{2,L}(K)$, используемого в настоящей работе. В невесовом случае ($L = 0$) коаналитическая задача исследовалась Ю.А. Дубинским для круга единичного радиуса и полуполосы в [5, 6] и Ю.А. Дубинским, А.С. Осипенко для произвольной ограниченной односвязной области с гладкой границей в [7]. Проведенный анализ математических баз данных Math-Net, ZentralMath, MathSciNet, а также баз цитирования РИНЦ и Scopus показал, что в последние годы данная задача не рассматривалась.

Определение. *Мерой неаналитичности или, что то же, коаналитическим уклонением функции* $f(z) \in W^1_{2,L}(K)$ *назовем число*

$$m(f, L) = \|f_{ca}\|^2_{W^1_{2,L}(K)} \equiv$$
$$\equiv \left\|\nabla(f - f_a)(1-\rho)^{L/2}\right\|^2_{L_2(K)} + \|f - f_a\|^2_{L_2(K)}.$$

С учетом этого определения обратимся к постановке задачи продолжения функции $f_0(\varphi) \in B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)$ внутрь единичного круга.

Задача. *Среди всевозможных продолжений*

$$f(z) \in W^1_{2,L}(K), f(z)|_\Gamma = f_0(\varphi),$$

найти то, которое имеет наименьшее коаналитическое уклонение $m(f, L)$.

Иными словами, ставится задача минимизации функционала

$$\|f_{ca}\|^2_{W^1_{2,L}(K)} \to \min,$$

где $f(z) \in W^1_{2,L}(K)$ — всевозможные продолжения фиксированной функции $f_0(\varphi) \in B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)$.

Известно, что в точке минимума вариация функционала $m(f, L)$ равна нулю, в том числе для любой функции $g(z) \in \dot{W}^1_{2,L}(K)$ имеем

$$A(f)g \equiv \iint_K \begin{bmatrix}\nabla(f - f_a)\nabla(\bar{g} - \bar{g}_a)(1-\rho)^L + \\ +(f - f_a)(\bar{g} - \bar{g}_a)\end{bmatrix} dxdy = 0. \quad (1)$$

С учетом этого поставленная задача может быть сформулирована следующим образом: найти функцию $f(z) \in W^1_{2,L}(K)$, удовлетворяющую уравнению

$$A(f) = 0, \quad (2)$$

где $A(f)$ — оператор, ассоциированный с интегральным тождеством (1), при дополнительном условии

$$f(z)|_\Gamma = f_0(\varphi), \quad (3)$$

где функция $f_0(\varphi) \in B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)$.

Существование и единственность наилучшего продолжения

Имеет место

Теорема. *Для любой функции существует единственное решение* $f_0(\varphi) \in B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)$ *задачи (2), (3) или, что то же, задачи минимизации коаналитического уклонения.*

Доказательство как существования, так и единственности решения проводится в рамках идей теории монотонных операторов.

Существование. Сведем, прежде всего, задачу к случаю нулевой функции на границе. Именно, пусть $h(z)W^1_{2,L}(K)$ — какое-либо фиксированное продолжение функции $f_0(\varphi)$, т. е. $h(z)|_\Gamma = f_0(\varphi)$ (свойство 2 весовых пространств). Положим $u(z) = f(z) - h(z)$. Тогда функция $u(z) \in \dot{W}^1_{2,L}(K)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$A(u + h)g(z) = 0,$$

где $g(z) \in \dot{W}^1_{2,L}(K)$, $g(z)|_\Gamma = 0$ произвольна.

Заметим, что $A(u + h)$ действует из $\dot{W}^1_{2,L}(K)$ в сопряженное пространство $\left(\dot{W}^1_{2,L}(K)\right)^*$ и является деминепрерывным оператором.

Пусть $\psi^1(z)$, $\psi^2(z)$, … — базисная система в пространстве $\dot{W}^1_{2,L}(K)$. Приближенное решение $u^N(z)$, $N = 1, 2, \ldots$, найдем в виде:

$$u^N(z) = C_1^N\psi_1(z) + \ldots + C_N^N\psi^N(z),$$

где неизвестные постоянные $C_1^N, \ldots, C_N^N$ определяются из нелинейной системы моментных уравнений Галеркина:

$$A(u^N + h)\psi^j(z) = 0,\; j = 1, \ldots, N. \qquad (4)$$

В силу свойства монотонности оператора $A(u^N + h)$ система (4) однозначно разрешима, при этом для коаналитических составляющих $u^N_{ca}(z)$ имеем оценку:

$$\left\|u^N_{ca}\right\|_{W^1_{2,L}(K)} \le M, \qquad (5)$$

где $M > 0$ — постоянная, не зависящая от N.

Покажем, что и для аналитических составляющих $u^N_a(z)$ справедлива аналогичная оценка. Действительно, из оценки (5) и свойства 1 рассматриваемых весовых пространств, следует, что для всех N

$$\left\| u^N_{ca}(z)\big|_\Gamma \right\|_{B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)} \le M_1\left\|u^N_{ca}\right\|_{W^1_{2,L}(K)} \le M_2,$$

где $M_1 > 0$ — постоянная.

Отсюда, учитывая, что $u^N_a(z)\big|_\Gamma + u^N_{ca}(z)\big|_\Gamma = 0$, найдем, что и

$$\left\| u^N_a(z)\big|_\Gamma \right\|_{B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)} \le M_2,$$

где $M_2 > 0$ не зависит от N.

Следует заметить, что для аналитической составляющей справедлива оценка

$$\left\|u^N_a\right\|_{W^1_{2,L}(K)} \le M_3\left\| u^N_a(z)\big|_\Gamma \right\|_{B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)} \le M_4,\; M_4 > 0.$$

Доказательство этого факта изложим в лемме.

Лемма. *Имеет место следующая оценка*

$$\left\|f_a\right\|_{W^1_{2,L}(K)} \le C\left\| f_a(z)\big|_\Gamma \right\|_{B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)} \qquad (6)$$

для любой функции $f(z) \in W^1_{2,L}(K)$ *при условии, что* $\left\| f_a(z)\big|_\Gamma \right\|_{B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)}$ *конечна.*

Доказательство леммы.

Во-первых, заметим, что в силу свойств 5 и 3 весовых пространств достаточно получить оценку только для весового интеграла Дирихле аналитической функции

$$\left\|\nabla f_a(1-\rho)^{L/2}\right\|^2_{L_2(K)} \le C\left\|f_a\big|_\Gamma\right\|^2_{B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)}.$$

Используя представление аналитической в круге K функции

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

и равенство Парсеваля, после несложных вычислений прийдем к следующему соотношению:

$$\left\|\nabla f_a(1-\rho)^{L/2}\right\|^2_{L_2(K)} \le C_1\sum_{n=1}^{\infty} n\left|c_n\right|^2 \frac{(2n)!}{(L+1)(L+2)\ldots(L+2n)}.$$

Очевидно, что при $L = 0$ доказываемое неравенство справедливо.

Пусть $-1 < L < 1$, $L \ne 0$, тогда, воспользовавшись формулой Эйлера-Гаусса [8, с. 812]

$$\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)} \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$$

при $n \to \infty$ ($\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера), получим

$$\left\|\nabla f_a(1-\rho)^{L/2}\right\|^2_{L_2(K)} \le C_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left|c_n\right|^2 L\Gamma(L)}{(2n)^L} \le$$

$$\le C_3\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-L}\left|c_n\right|^2 \le C_4\left\|f_a\big|_\Gamma\right\|^2_{B_2^{(1-L)/2}(\Gamma)}.$$

Таким образом, оценка (6) и лемма доказаны.

Продолжим доказательство теоремы. В конечном итоге получим оценку

$$\left\|u^N\right\|_{W^1_{2,L}(K)} \le M_5,$$

где $M_5 > 0$ не зависит от N.

Обычными рассуждениями устанавливаем, что предельная точка $u(z)$ последовательности $u^N(z)$ удовлетворяет интегральному тождеству (4). Существование решения доказано.

Единственность. Действительно, пусть функции $f(z) \in W^1_{2,L}(K)$ и $g(z) \in W^1_{2,L}(K)$ — два решения задачи (2), (3). Тогда, исходя из тождества (1), стандартно получим, что их коаналитические составляющие равны, т. е. $f_{ca}(z) \equiv g_{ca}(z)$. Отсюда, учитывая, что

$$\left(f(z) - g(z)\right)\big|_\Gamma = 0,$$

получим, что $f_a(z)\big|_\Gamma = g_a(z)\big|_\Gamma$. Следовательно, в силу леммы $f_a(z) \equiv g_a(z)$, и, тем самым, $f(z) \equiv g(z)$. Единственность, а вместе с ней и теорема полностью доказаны.

Литература

1. **Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В.** Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Известия

References

1. **Nikol'skiy S.M., Lizorkin P.I., Miroshin N.V.** Vesovye Funktsional'nye Prostranstva i Ikh Prilozheniya k Is-sledovaniyu Kraevykh Zadach dlya Vyrozhdayushchikh-sya Ellipticheskikh Uravneniy. Izvestiya Vysshikh Ucheb-

высших учебных заведений. Серия «Математика». 1988. Т. 315. № 8. С. 4—30.

2. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука. Физматлит, 1996.

3. **Зубков П.В.** Аналитическая нелинейная задача в круге в пространствах с весом, имеющим особенность на границе // Вестник МЭИ. 2008. № 6. С. 71—80.

4. **Зубков П.В.** Эквивалентные нормы в пространствах с весом, имеющим особенность на границе области // Вестник МЭИ. 2017. № 6. С. 178—180.

5. **Дубинский Ю.А.** О продолжении функции с наименьшим коаналитическим уклонением // Математические заметки. 1998. Т. 64. № 1. С. 45—57.

6. **Дубинский Ю.А.** Об одной задаче наилучшего продолжения периодической функции // Доклады АН. 1998. Т. 360. № 1. С. 10—12.

7. **Дубинский Ю.А., Осипенко А.С.** Нелинейные аналитические и коаналитические задачи (L_p-теория, клиффордов анализ, примеры) // Математический сборник. 2000. Т. 191. № 1. С. 65—102.

8. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2006.

nykh zavedeniy. Seriya «Matematika». 1988;315;8:4—30. (in Russian).

2. **Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skiy S.M.** Integral'nye Predstavleniya Funktsiy i Teoremy Vlozheniya. M.: Nauka. Fizmatlit, 1996. (in Russian).

3. **Zubkov P.V.** Analiticheskaya Nelineynaya Zadacha v Kruge v Prostranstvakh s Vesom, Imeyushchim Osobennost' na Granitse. Vestnik MEI. 2008;6:71—80. (in Russian).

4. **Zubkov P.V.** Ekvivalentnye Normy v Prostranstvakh s Vesom, Imeyushchim Osobennost' Na Granitse Oblasti. Vestnik MEI. 2017;6:178—180. (in Russian).

5. **Dubinskiy Yu.A.** O prodolzhenii Funktsii s Naimen'shim Koanaliticheskim Ukloneniem. Matematicheskie Zametki. 1998;64;1:45—57. (in Russian).

6. **Dubinskiy Yu.A.** Ob Odnoy Zadache Nailuchshego Prodolzheniya Periodicheskoy Funktsii. Doklady AN. 1998; 360;1:10—12. (in Russian).

7. **Dubinskiy Yu.A., Osipenko A.S.** Nelineynye Analiticheskie i Koanaliticheskie Zadachi (L_p-teoriya, Kliffordov Analiz, Primery). Matematicheskiy Sbornik. 2000;191;1:65—102. (in Russian).

8. **Fikhtengol'ts G.M.** Kurs Differentsial'nogo i Integral'nogo Ischisleniya. M.: Fizmatlit, 2006. (in Russian).

Сведения об авторе:

Зубков Павел Валерьевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: ZubkovPV@mpei.ru

Information about author:

Zubkov Pavel V. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: ZubkovPV@mpei.ru

Статья поступила в редакцию: *03.10.2018*
The article received to the editor: *03.10.2018*