

УДК 621.3.011.713

DOI: 10.24160/1993-6982-2019-5-68-72

Теоретически установленная независимость амплитуд тока и момента синхронной машины с индуктивной нагрузкой от частоты

И.П. Попов

Рассмотрены ток и момент индуктивной синхронной электрической машины при индуктивной нагрузке. Для индуктивной синхронной машины с индуктивной нагрузкой справедлива теорема, что амплитуда тока в индуктивной нагрузке индуктивной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения. Теорема доказывается путем приравнивания второго закона Кирхгофа и закона электромагнитной индукции применительно к вращающейся машине. Также справедлива теорема, что амплитуда вращающего момента для индуктивной синхронной электрической машины с индуктивной нагрузкой не зависит от частоты вращения. Она доказывается путем анализа закона Ампера применительно к вращающейся машине.

Установлено, что при активной нагрузке амплитуды тока и вращающего момента линейно зависят от частоты вращения машины. При емкостной нагрузке амплитуды тока и вращающего момента квадратично зависят от частоты вращения. Установлена зависимость мощности от характера нагрузки машины. Для индуктивной нагрузки реактивная электрическая мощность линейно зависит от частоты, а для резистивной нагрузки зависимость от частоты квадратичная. Для емкостной нагрузки мощность кубично зависит от частоты. Для синхронной емкостной машины с емкостной нагрузкой справедливы следующие теоремы:

амплитуда напряжения на емкостной нагрузке емкостной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения; амплитуда вращающего момента для емкостной синхронной электрической машины с емкостной нагрузкой не зависит от частоты вращения.

Ключевые слова: синхронная машина, индуктивная нагрузка, ток, момент, амплитуда.

Для цитирования: Попов И.П. Теоретически установленная независимость амплитуд тока и момента синхронной машины с индуктивной нагрузкой от частоты // Вестник МЭИ. 2019. № 5. С. 68—72. DOI: 10.24160/1993-6982-2019-5-68-72.

Theoretical Independence of Current and Torque Amplitudes of Synchronous Machine with Inductive Load from Frequency

I.P. Popov

The current and torque of an inductive synchronous electrical machine operating on an inductive load are considered. For an inductive synchronous machine operating on an inductive load, the following theorem is valid: the amplitude of the current through the inductive load of an inductive synchronous electrical machine does not depend on the rotation frequency. This theorem is proved by equating the Kirchhoff second law and the law of electromagnetic induction as applied to a rotating machine. The following theorem is also valid: the torque amplitude for an inductive synchronous electrical machine operating on an inductive load does not depend on the rotation frequency. This theorem is proved by analyzing the Ampere law as applied to a rotating machine.

It has been established that with an active load, the current and torque amplitudes depend linearly on the machine rotation frequency. With the machine operating on a capacitive load, the current and torque amplitudes are quadratic functions of the rotation frequency. The dependence of the machine power on the nature of its load is established. For an inductive load, the reactive electrical power is a linear function of the frequency; for a resistive load, the machine power is a quadratic function of the frequency; and for a capacitive load, its power is a cubic function of the frequency. For a synchronous capacitive machine operating on a capacitive load, the following theorems are valid:

The voltage amplitude across the capacitive load of a capacitive synchronous electrical machine does not depend on the rotation frequency. The torque amplitude for a capacitive synchronous electrical machine operating on a capacitive load does not depend on the rotation frequency.

Key words: synchronous machine, inductive load, current, torque, amplitude.

For citation: Popov I.P. Theoretical Independence of Current and Torque Amplitudes of Synchronous Machine with Inductive Load from Frequency. Bulletin of MPEI. 2019;5:68—72. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2019-5-68-72.

Введение

Представляет интерес поведение синхронных электрических машин при различном характере нагрузки. Для индуктивной синхронной электрической машины это зависимость амплитуды тока и вращающего момента от нагрузки, для емкостной синхронной электрической машины — зависимость амплитуды напряжения и вращающего момента.

Анализ состояния вопроса. Потокосцепление обмотки вращающейся электрической машины равно

$$\psi = \Psi_m \cos \omega t.$$

Электродвижущая сила (ЭДС) обмотки определяется выражением

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = \omega \Psi_m \sin \omega t,$$

а амплитуда ЭДС $E_m = \omega \Psi_m$ зависит от частоты, в связи с чем может возникнуть интуитивное предположение, что амплитуды тока и вращающего момента для индуктивной синхронной электрической машины [1 — 16] (амплитуды напряжения и вращающего момента для емкостной машины [17, 18]) также зависят от частоты. В действительности это происходит не всегда. Существенную роль в этом играет характер нагрузки электрической машины.

Цель исследования — показать, при каком характере нагрузки параметры синхронной электрической машины не зависят от частоты.

Задачи работы — получить доказательные на уровне теорем результаты.

Актуальность исследования обусловлена широким распространением синхронных электрических машин, используемых, в частности, в качестве генераторов.

Ток и момент индуктивной синхронной электрической машины при индуктивной нагрузке

Пусть нагрузкой фазы индуктивной синхронной электрической машины является катушка индуктивности. Суммарную индуктивность катушки и обмотки машины обозначим как L , число витков обмотки — n , длину активной части витка — l , индукцию магнитного поля в рабочем зазоре — B , угол поворота ротора — φ , частоту вращения — $\omega = d\varphi/dt$, ток — i , число полюсов — два, диаметр ротора — D_r . Активные электрические и механические потери не учитываются.

Для синхронной машины с индуктивной нагрузкой справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Амплитуда тока в индуктивной нагрузке индуктивной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения.

Доказательство. При указанных допущениях справедливо равенство (второй закон Кирхгофа и закон электромагнитной индукции применительно к вращающейся машине):

$$Bln \frac{D_r}{2} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = L \frac{di}{dt}. \quad (1)$$

Интегрирование данного выражения дает

$$i = -\frac{Bln}{L} \frac{D_r}{2} \cos \varphi + I_0 = -I_m \cos \varphi + I_0.$$

Начальный ток I_0 положим равным нулю. Амплитуда тока

$$I_m = \frac{Bln}{L} \frac{D_r}{2}$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Теорема 2. Амплитуда вращающегося момента для индуктивной синхронной электрической машины с индуктивной нагрузкой не зависит от частоты вращения.

Доказательство. При указанных допущениях вращающийся момент в соответствии с законом Ампера (применительно к вращающейся машине) равен:

$$\begin{aligned} \mu &= Blni \frac{D_r}{2} \sin \varphi = -Bln \frac{Bln}{L} \frac{D_r}{2} \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = \\ &= -\frac{(Bln)^2}{L} \frac{D_r^2}{8} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Амплитуда вращающегося момента

$$M_m = \frac{(Bln)^2}{L} \frac{D_r^2}{8}$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Правомерен вопрос о том, как обстоит дело при ином характере нагрузки синхронной электрической машины?

Ток и момент при ином характере нагрузки

При активной нагрузке аналог уравнения (1) имеет вид

$$Bln \frac{D_r}{2} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = Ri.$$

Амплитуда тока

$$I_m = \frac{Bln}{R} \frac{D_r}{2} \omega$$

от частоты вращения ω зависит (линейно).

Вращающийся момент равен

$$\begin{aligned} \mu &= Blni \frac{D_r}{2} \sin \varphi = Bln \frac{Bln}{R} \frac{D_r}{2} \omega \sin \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = \\ &= \frac{(Bln)^2}{R} \frac{D_r^2}{8} \omega \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Амплитуда вращающегося момента

$$M_m = \frac{(Bln)^2}{R} \frac{D_r^2}{8} \omega$$

от частоты вращения ω зависит (линейно).

При емкостной нагрузке [19, 20] аналог уравнения (1) имеет вид:

$$Bln \frac{D_r}{2} \omega \sin \omega t = \frac{1}{C} \int_0^t idt.$$

Дифференцирование этого выражения дает

$$i = BlnC \frac{D_r}{2} \omega^2 \cos \omega t.$$

Амплитуда тока

$$I_m = BlnC \frac{D_r}{2} \omega^2$$

от частоты вращения ω зависит (квадратично).

Вращающий момент равен

$$\begin{aligned}\mu &= Blni \frac{D_r}{2} \sin \varphi = BlnBlnC \frac{D_r}{2} \omega^2 \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = \\ &= (Bln)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^2 \sin 2\varphi.\end{aligned}$$

Амплитуда вращающего момента

$$M_m = (Bln)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^2$$

от частоты вращения ω зависит (квадратично).

Зависимость мощности от характера нагрузки

Для индуктивной нагрузки реактивная электрическая мощность равна

$$Q = I^2 X_L = I^2 \omega L = \frac{(Bln)^2 D_r^2}{L} \omega, \quad (2)$$

где I — действующее значение тока.

Механическая мощность

$$Q_M = M\omega = \frac{(Bln)^2 D_r^2}{L} \omega. \quad (3)$$

Выражения (2) и (3) совпали.

Мощность линейно зависит от частоты. Для резистивной нагрузки активная электрическая мощность составляет

$$P = I^2 R = \frac{(Bln)^2 D_r^2}{R} \omega^2. \quad (4)$$

Механическая мощность

$$P_M = M\omega = \frac{(Bln)^2 D_r^2}{R} \omega^2. \quad (5)$$

Разумеется, (4), (5) совпадают. Мощность квадратично зависит от частоты.

Для емкостной нагрузки реактивная электрическая мощность выглядит как:

$$Q = I^2 X_C = I^2 \frac{1}{\omega C} = (Bln)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^3. \quad (6)$$

Механическая мощность

$$Q_C = M\omega = (Bln)^2 C \frac{D_r^2}{8} \omega^3. \quad (7)$$

Выражения (6) и (7) совпали. Мощность кубично зависит от частоты.

Напряжение и момент емкостной синхронной электрической машины при емкостной нагрузке

Дуальным аналогом индуктивной синхронной электрической машины является емкостная синхронная электрическая машина.

В соответствии с законом магнитоэлектрической индукции (дуальный аналог закона электромагнитной индукции) ток равен

$$i = Dbv, \quad (8)$$

где D — электрическая индукция (электрическое смещение) в рабочем зазоре; b — ширина электрода; v — линейная скорость.

Выражение (8) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= Db \frac{dx}{dt}; \quad dq = Db dx; \\ \int_0^q dq &= Db \int_0^x dx; \quad q = Dbx.\end{aligned}$$

С учетом последнего уравнения сила, действующая на электрод, выглядит как

$$F = qE = q \frac{u}{x} = Db u. \quad (9)$$

Это дуальный аналог закона Ампера для электрического (магнитоэлектрического) взаимодействия. Здесь E — напряженность электрического поля; u — напряжение.

Электрический ток составляет

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (10)$$

Формулы (8), (9) могут быть получены из электромагнитных аналогов путем простой дуально-инверсной замены величин $e \rightarrow i$, $B \rightarrow D$, $l \rightarrow b$, $i \rightarrow u$.

Теорема 3. Амплитуда напряжения на емкостной нагрузке емкостной синхронной электрической машины не зависит от частоты вращения.

Доказательство. Для вращательной машины уравнение для тока с учетом (8), (10) имеет вид:

$$Db \frac{D_r}{2} \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = C \frac{du}{dt}.$$

Интегрирование этого выражения дает

$$u = -\frac{Db D_r}{C} \frac{d\varphi}{2} \cos \varphi + U_0 = -U_m \cos \varphi + U_0. \quad (11)$$

Амплитуда напряжения

$$U_m = \frac{Db D_r}{C} \quad (12)$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Теорема 4. Амплитуда вращающего момента для емкостной синхронной электрической машины с емкостной нагрузкой не зависит от частоты вращения.

Доказательство. Вращающий момент в соответствии с (9), (11), (12) применительно к вращающейся машине равен

$$\begin{aligned}\mu &= Db u \frac{D_r}{2} \sin \varphi = -Db U_m \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = \\ &= -Db \frac{Db D_r}{C} \frac{d\varphi}{2} \cos \varphi \frac{D_r}{2} \sin \varphi = -\frac{D^2 b^2 D_r^2}{C} \sin 2\varphi.\end{aligned}$$

Амплитуда вращающего момента

$$M_m = \frac{D^2 b^2}{C} \frac{D_r^2}{8}$$

от частоты вращения ω не зависит. Теорема доказана.

Заключение

Вопреки возможному интуитивному предположению, для индуктивной синхронной электрической

машины с индуктивной нагрузкой амплитуды тока и вращающего момента от частоты вращения не зависят. Однако, при другом характере нагрузки зависимость существует.

Для емкостной синхронной электрической машины с емкостной нагрузкой амплитуды напряжения и вращающего момента от частоты вращения не зависят.

Полученные результаты рекомендуется использовать при проектировании электрических систем.

Литература

1. **Bianchi N., Bolognani S., Bon D., Dai Pre M.** Rotor Flux-Barrier Design for Torque Ripple Reduction in Synchronous Reluctance and PM-assisted Synchronous Reluctance Motors // IEEE Trans. Ind. Appl. 2009. V. 45. No. 3. Pp. 921—928.
2. **Boglietti A., Cavagnino A., Pastorelli M., Vagati A.** Experimental Comparison of Induction and Synchronous Reluctance Motors Performance // Conf. Record of the 2005 Industry Appl. Conf. Fortieth IAS Annual Meeting. 2005. V. 1. Pp. 474—479.
3. **Bomela X.B., Kamper M.J.** Effect of Stator Chording and Rotor Skewing on Performance of Reluctance Synchronous Machine // IEEE Trans. Ind. Appl. 2002. No. 1. Pp. 91—100.
4. **Oprea C., Dziechciarz A., Martis C.** Comparative Analysis of Different Synchronous Reluctance Motor Topologies // Proc. Intern. Conf. Environment and Electrical Eng. Palermo, 2015.
5. **Fratta A., Troglia G.P., Vagati A., Villata F.** Torque Ripple Evaluation of High-performance Synchronous Reluctance Machines // IEEE Trans. Ind. Appl. Mag. 1995. V. 1. No. 4. Pp. 14—22.
6. **Haataja J.A.** Comparative Performance Study of Four Pole Induction Motors and Synchronous Reluctance Motor in Variable Speed Drives. Lappeenranta: Lappeenranta University of Technology, 2003.
7. **Ho Lee J., Lee K., Hyun Cho Y., Won Yun T.** Characteristics Analysis and Optimum Design of Anisotropy Rotor Synchronous Reluctance Motor Using Coupled Finite Element Method and Response Surface Methodology // IEEE Trans. Magnetics. 2009. V. 45. Pp. 4696—4699.
8. **Hofmann H., Sanders S.R.** High-speed Synchronous Reluctance Machine with Minimized Rotor Loss // IEEE Trans. Industry Appl. 2000. V. 36. No. 2. Pp. 531—539.
9. **Hortman M.B.** Implementation and Evaluation of a Full-order Observer for a Synchronous Reluctance Motor. Georgia: School of Electrical and Computer Engineering Georgia Institute of Technology, 2004.
10. **Hossein A., Abolfazl V.** Rotor Geometry Parameter Optimization of Synchronous Reluctance Motor Using Taguchi Method // Przegląd Elektrotechniczny. 2013. V. 89. Pp. 197—201.
11. **Hudak P., Hrabovcova V., Rafajdus P.** Geometrical Dimension Influence of Multi-barrier Rotor on Reluctance

References

1. **Bianchi N., Bolognani S., Bon D., Dai Pre M.** Rotor Flux-Barrier Design for Torque Ripple Reduction in Synchronous Reluctance and PM-assisted Synchronous Reluctance Motors. IEEE Trans. Ind. Appl. 2009; 45;3: 921—928.
2. **Boglietti A., Cavagnino A., Pastorelli M., Vagati A.** Experimental Comparison of Induction and Synchronous Reluctance Motors Performance. Conf. Record of the 2005 Industry Appl. Conf. Fortieth IAS Annual Meeting. 2005;1: 474—479.
3. **Bomela X.B., Kamper M.J.** Effect of Stator Chording and Rotor Skewing on Performance of Reluctance Synchronous Machine. IEEE Trans. Ind. Appl. 2002;1: 91—100.
4. **Oprea C., Dziechciarz A., Martis C.** Comparative Analysis of Different Synchronous Reluctance Motor Topologies. Proc. Intern. Conf. Environment and Electrical Eng. Palermo, 2015.
5. **Fratta A., Troglia G.P., Vagati A., Villata F.** Torque Ripple Evaluation of High-performance Synchronous Reluctance Machines. IEEE Trans. Ind. Appl. Mag. 1995;1; 4:14—22.
6. **Haataja J.A.** Comparative Performance Study of Four Pole Induction Motors and Synchronous Reluctance Motor in Variable Speed Drives. Lappeenranta: Lappeenranta University of Technology, 2003.
7. **Ho Lee J., Lee K., Hyun Cho Y., Won Yun T.** Characteristics Analysis and Optimum Design of Anisotropy Rotor Synchronous Reluctance Motor Using Coupled Finite Element Method and Response Surface Methodology. IEEE Trans. Magnetics. 2009;45:4696—4699.
8. **Hofmann H., Sanders S.R.** High-speed Synchronous Reluctance Machine with Minimized Rotor Loss. IEEE Trans. Industry Appl. 2000;36;2:531—539.
9. **Hortman M.B.** Implementation and Evaluation of a Full-order Observer for a Synchronous Reluctance Motor. Georgia: School of Electrical and Computer Engineering Georgia Institute of Technology, 2004.
10. **Hossein A., Abolfazl V.** Rotor Geometry Parameter Optimization of Synchronous Reluctance Motor Using Taguchi Method. Przegląd Elektrotechniczny. 2013;89: 197—201.
11. **Hudak P., Hrabovcova V., Rafajdus P.** Geometrical Dimension Influence of Multi-barrier Rotor on Reluctance

Synchronous Motor Performances // Intern. Symp. Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion. 2006. Pp. 346—351.

12. **Kolehmainen J.** Synchronous Reluctance Motor with Form Blocked Rotor // IEEE Trans. Energy Conversion. 2010. Pp. 450—456.

13. **Haataja J.** A Comparative Performance Study of Four-pole Induction Motors and Synchronous Reluctance Motors in Variable Speed Drives. Lappeenranta: Lappeenranta University of Technology, 2003.

14. **Kamper M.J., Van der Merwe F.S., Williamson S.** Directnite Element Design Optimization of the Cageless Reluctance Synchronous Machine // IEEE Trans. Energy Conversion. 1996. V. 11. No. 3. Pp. 547—555.

15. **Moghaddam R.R.** Synchronous Reluctance Machine (SynRM) Design // Thesis in Power Electrical Eng. Royal Institute of Technology, 2007.

16. **Moghaddam R.R., Magnussen F., Sadarangani Ch.** Theoretical and Experimental Reevaluation of Synchronous Reluctance Machine // IEEE Trans. Industrial Electronics. 2010. V. 57. No. 1. Pp. 6—13.

17. **Попов И.П.** Свободные гармонические колебания в электрических системах с однородными реактивными элементами // Электричество. 2013. № 1. С. 57—59.

18. **Попов И.П.** Зависимость реактивного сопротивления пьезоэлектрического преобразователя от механических параметров его нагрузки // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 5 (87). С. 94—98.

19. **Попов И.П.** Емкостно-инертное устройство // Известия Санкт-Петербургского гос. электротехн. ун-та «ЛЭТИ». 2015. Т. 2. С. 43—45.

20. **Попов И.П.** Вращательные инертно-емкостные устройства // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия «Технические науки». 2011. № 3 (31). С. 187—192.

Synchronous Motor Performances. Intern. Symp. Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion. 2006:346—351.

12. **Kolehmainen J.** Synchronous Reluctance Motor with Form Blocked Rotor. IEEE Trans. Energy Conversion. 2010:450—456.

13. **Haataja J.** A Comparative Performance Study of Four-pole Induction Motors and Synchronous Reluctance Motors in Variable Speed Drives. Lappeenranta: Lappeenranta University of Technology, 2003.

14. **Kamper M.J., Van der Merwe F.S., Williamson S.** Directnite Element Design Optimization of the Cageless Reluctance Synchronous Machine. IEEE Trans. Energy Conversion. 1996;11;3:547—555.

15. **Moghaddam R.R.** Synchronous Reluctance Machine (SynRM) Design. Thesis in Power Electrical Eng. Royal Institute of Technology, 2007.

16. **Moghaddam R.R., Magnussen F., Sadarangani Ch.** Theoretical and Experimental Reevaluation of Synchronous Reluctance Machine. IEEE Trans. Industrial Electronics. 2010;57;1:6—13.

17. **Попов И.П.** Svobodnye Garmonicheskie Kolebaniya v Elektricheskikh Sistemakh s Odnorodnymi Reaktivnymi Elementami. Elektrichestvo. 2013;1:57—59. (in Russian).

18. **Попов И.П.** Zavisimost' Reaktivnogo Soprotivleniya P'ezoelektricheskogo Preobrazovatelya ot Mekhanicheskikh Parametrov Ego Nagruzki. Nauchno-tekhnicheskij Vestnik Informatsionnykh Tekhnologiy, Mekhaniki i Optiki. 2013;5 (87):94—98. (in Russian).

19. **Попов И.П.** Emkostno-inertnoe Ustroystvo. Izvestiya Sankt-Peterburgskogo Gos. Elektrotekhn. Un-ta «LETI». 2015;2:43—45. (in Russian).

20. **Попов И.П.** Vrashchatel'nye Inertno-emkostnye Ustroystva. Vestnik Samarskogo Gos. Tekhn. Un-ta. Seriya «Tekhnicheskie Nauki». 2011;3 (31):187—192. (in Russian).

Сведения об авторе:

Попов Игорь Павлович — старший преподаватель Курганского государственного университета, Курган, e-mail: ip.popov@yandex.ru

Information about author:

Popov Igor P. — Senior Lecturer of Kurgan State University, Kurgan, e-mail: ip.popov@yandex.ru

Статья поступила в редакцию: 06.11.2018

The article received to the editor: 06.11.2018