МАТЕМАТИКА

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (01.01.02)

УДК 517.548
DOI: 10.24160/1993-6982-2020-2-120-124

Задачи типа Гильберта для уравнения Коши–Римана с сингулярной окружностью в младших коэффициентах

А.Б. Расулов, Ю.С. Федоров

В классе эллиптических систем первого порядка особое место занимает система уравнений Коши–Римана. Подобную систему с младшими членами и с правой частью называют обобщенной системой Коши–Римана (ОСКР). Ее удобно исследовать, осуществляя переход из вещественного пространства в комплексное.
Существует несколько различных математических теорий уравнений, обобщающих методы теории функций комплексного переменного. В первую очередь следует отметить работу Л. Берса, в которой собраны операции интегрирования по комплексному переменному для обобщенной системы типа Коши–Римана. Данный подход получил известное завершение в теории псевдоаналитических функций. В работах Г.Н. Положего развита теория p-аналитических функций, близкая к работам Л. Берса.
Другое, более прогрессивное, направление получило название обобщенных аналитических функций и развивалось школой И.Н. Векуа и его последователей (Б.В. Боярский и др.). В данном случае на основе использования аппарата функционального анализа формируется идея соответствия между функциями комплексного переменного и решениями обобщенного уравнения Коши–Римана. Теория Векуа построена в предположении, что коэффициенты при младших коэффициентах функции принадлежат пространству суммируемых функций со степенью $p > 2$. Коэффициенты указанных систем могут допускать «слабые» особенности, лимитируемые требованием p-интегрируемости. Таким образом, даже уравнения с коэффициентами, обладающие особенностями первого порядка, не охватываются теорией Векуа. Однако иные задачи, младшие коэффициенты которых допускают особенности первого порядка или «сильные» особенности, сводится к ОСКР. В настоящей работе для ОСКР, младшие коэффициенты которой допускают сильную особенность в окружности, решены задачи типа Гильберта.

Ключевые слова: уравнение Коши–Римана, сингулярные окружность и точка, оператор Векуа, задача типа Римана–Гильберта.

Для цитирования: Расулов А.Б., Федоров Ю.С. Задачи типа Гильберта для уравнения Коши–Римана с сингулярной окружностью в младших коэффициентах // Вестник МЭИ. 2020. № 2. С. 120—124. DOI: 10.24160/1993-6982-2020-2-120-124.

Hilbert Type Problems for the Cauchy–Riemann Equation with a Singular Circuit in the Lowest Coefficients

A.B. Rasulov, Yu.S. Fedorov

The Cauchy-Riemann system of equations occupies a special place in the class of first-order elliptic systems. Such a system with lowest terms and a right-hand side is called the generalized Cauchy-Riemann system (GCRS), which can be conveniently studied by making a transition from a real space into a complex space.
There are several different mathematical theories of equations that generalize the methods of the theory of functions of a complex variable. In this regard, the work of L. Bers, in which the integration operations with respect to a complex variable for a generalized system of Cauchy-Riemann type are generalized, should primarily be mentioned. This approach has received a well-known finalization in the theory of pseudo-analytic functions. In the works of G.N. Polozhiy, the theory of p-analytic functions was developed, which is close in its ideas to the works of L. Bers.

Another, more progressive research area, called «generalized analytical functions», was developed by the school of I.N. Vekua and his followers (B.V. Boyarsky and others). Here, the idea of correspondence between the functions of a complex variable and the solutions of the generalized Cauchy–Riemann equation using the functional analysis techniques is developed. The Vekua theory is constructed on the assumption that the coefficients of the function's lowest terms belong to the space of summable functions with degree $p > 2$. The coefficients of such systems may admit «weak» singularities limited by the requirement of p-integrability. Thus, the Vekua theory does not cover even equations with coefficients having first-order singularities. However, other problems, the lowest coefficients of which admit first-order singularities or «strong singularities», boil down to GCRS. In this study, Hilbert type problems are solved for the GCRS the lowest coefficients of which admit strong singularity in a circle.

Key words: Cauchy-Riemann equation, singular circle, singular point, Vekua operator, Riemann-Hilbert type problem.

For citation: Rasulov A.B., Fedorov Yu.S. Hilbert Type Problems for the Cauchy–Riemann Equation with a Singular Circuit in the Lowest Coefficients. Bulletin of MPEI. 2020;2:120—124. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2020-2-120-124.

Интегральные представления решений. Постановка задачи типа Римана–Гильберта

Пусть область D содержит точку $z = 0$ и окружность $L = \{z : |z| = R\}$ и ограничена простым ляпуновским контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $D_0 = G \setminus \{0 \bigcup L\}$ и $D_\varepsilon = D \setminus \{d_{0\varepsilon} \bigcup d_{1\varepsilon}\}$ с малым $\varepsilon > 0$, где $d_{0\varepsilon} = \{z : |z| < \varepsilon\}$ и $d_{1\varepsilon} = \{z : R-\varepsilon < |z| < R+\varepsilon\}$.

В области D_0 рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} - p(z)\frac{a(z)}{\| z| - R|^n} u + \frac{b(z)}{|z|^m}\bar u = f(z), \qquad (1)$$

где $2\partial_{\bar z} = \partial_x + i\partial_y$, $u(z) = u_1(x, y) + iu_2(x, y)$.

Функция $p(z)$ — нормирующий множитель

$$p(z) = p_0(z)\,|p_0(z)|^{-1},\ \ p_0(z) = z(|z| - R).$$

Коэффициенты $a, b \in C(\bar D)$ и правая часть $f \in L^p(D)$, $p > 2$, где $n > 1$; $0 < m < 1$.

Обобщенные системы Коши–Римана с регулярными коэффициентами рассмотрены в монографии И.Н. Векуа [1]. Исследованию задач для (1) с коэффициентами, имеющими особенности первого порядка в изолированной особой точке или линии, посвящены работы Л.Г. Михайлова, З.Д. Усманова, А. Тунгатарова, Н. Бергера, A. Meziani, С.Б. Климентова, А.П. Солдатова, А.Б. Расулова, А. Тунгатарова и др. [2 — 13].

В настоящей работе для обобщенной системы типа Коши–Римана (1), коэффициенты которой допускают сильную особенность в окружности $L = \{z:|z| = R\}$ и слабую в точке $z = 0$, исследованы задачи типа Римана–Гильберта для $\mathbb{C}$-линейной части уравнения (1).

Оказалось, что для корректности задач для дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами мало традиционных условий на границе области. Нужны дополнительные условия на границе некоторого оператора от решений. Они вызваны наличием особой точки(окружности) и ее характером (сингулярностью и сверхсингулярностью). Для построения соответствующего граничного оператора взята информация о решении, полученная с помощью анализа его интегрального представления. Изучено влияние сверхсингулярной точки (окружности) к разрешимости краевых задач, выяснена корректная постановка граничных задач типа Дирихле и Римана–Гильберта. Выяснено, что в краевых условиях в случае $n = 1$ как весовой функции могут присутствовать функции степенного типа, а в случае $n > 1$ — функции экспоненциального типа.

Приведем факты об интегральном представлении решений уравнения (1), касающемся $\mathbb{C}$-линейной части (1).

Под обобщенным решением (1) подразумевается функция $u \in C\left(\bar D \setminus \{0 \bigcup L\}\right)$, имеющая первую обобщенную производную по $\bar z$, принадлежащую классу $L^p(D_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим частный случай уравнения (1) с $b = 0$:

$$u_{\bar z} - Au = f, \qquad (2)$$

где для краткости

$$A(z) = p(z)(\| z| - R|^n)^{-1} a(z),\ \ a(z) \in C(\bar D).$$

В данном случае коэффициент A ограничен в начале координат и имеет сильную неподвижную особенность на окружности L.

В представлении общего решения последнего уравнения и в его описании существенную роль играет интегральный оператор И.Н. Векуа [1]

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D \frac{f(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z}$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, $p > 2$. Здесь и далее $d_2\zeta$ — элемент площади.

Известно, что этот оператор ограничен из $L^p(D)$ в соболевское пространство $W^{1,p}(D)$, и имеет место вложение $W^{1,p}(D) \subseteq C^\alpha(\bar D)$ с показателем Гельдера $\alpha = (p - 2)/p$. В частности, этот оператор компактен в пространстве $L^p(D)$. В дальнейшем, когда точное значение α несущественно, используем класс $H(\bar D)$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера с некоторым показателем [4]. Аналогичный оператор по области D_ε обозначим T_ε и используем по отношению к коэффициенту $f = A$.

Если функции $A, f \in L^p(D)$, то $\Omega_0 = TA \in W^{1,p}(D)$ является решением уравнения $(\Omega_0)_{\bar z} - A = 0$. Следовательно, для функции $U_0 = e^{-\Omega_0}U$ получим соотношение

$$(U_0)_{\bar z} = e^{-\Omega_0}U_{\bar z} - Ae^{-\Omega_0}U = e^{-\Omega_0}f.$$

Придем к представлению

$$U = e^{\Omega_0}\left(\varphi + T\left(e^{-\Omega_0}f\right)\right]$$

с произвольной аналитической в D функцией $\varphi \in C(\bar{D})$. Данная процедура получения общего решения хорошо известна [1].

В общем случае сингулярного коэффициента A ее также можно применить при условии, что известно некоторое решение уравнения $\Omega_{\bar{z}} = A$ в области D_0. Следующая лемма описывает одно из таких решений [12] .

Лемма 1. *В предположении*

$$A_0(z) = p(z)\left(a(z) - a(R)\right)\left(\| z| - R|^n\right)^{-1} \in L^p(D),\ n > 1 \quad (3)$$

сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon A)(z),\quad z \ne L$$

существует и определяет функцию, которая представима в виде

$$\Omega(z) = -\frac{2a(R)}{(n-1)\| z| - R|^{n-1}} + h(z),$$

где $h(z) \in H(\bar{D})$ *определяется равенством*

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{1}{\pi i}\frac{a(R)}{(n-1)}\int_{\partial G}\frac{1}{|\rho - R|^{n-1}}\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

С помощью леммы по обычной процедуре [1] придем к следующему представлению.

Теорема 1.

Пусть выполнено условие (3) и $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$. *Тогда общее решение (2) в классе* $C(\bar{D}\setminus\Gamma)$ *выражается формулой*

$$U = e^{\Omega}\left[\varphi + T\left(e^{-\Omega} f\right)\right], \quad (4)$$

где $\varphi \in C(\bar{D}\setminus\{L\})$ *аналитична в области* $C(D\setminus\{L\})$.

Утверждение показывает, что

$$U = O(1)e^{-\frac{a(R)}{\|z|-R|^{n-1}}},\quad \text{где } |z| \to R.$$

Для уравнения (2) в классе

$$u,\ e^{\frac{a(R)}{\|z|-R|^{n-1}}}u \in C^{\mu}(\bar{D}),\quad 0 < \mu < 1 - 2/p \quad (5)$$

ставится краевая задача типа Римана-Гильберта:

$$\mathrm{re}Ge^{\frac{a(R)}{\|z|-R|^{n-1}}}u\Big|_{\Gamma} = g, \quad (6)$$

где $G, g \in C^{\nu}(\Gamma)$, причем G всюду отлична от нуля.

Решение задачи типа Римана–Гильберта

Предварительно напомним хорошо известные результаты [6] относительно классической задачи Римана–Гильберта для аналитических функций

$$\mathrm{re}G\varphi\Big|_{\Gamma} = g, \quad (7)$$

где функция $G \in C^{\nu}(\Gamma)$ всюду отлична от нуля.

Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$, и функция $\zeta = \alpha(z)$ осуществляет конформное отображение области D на единичный круг $|\zeta| < 1$. Тогда по теореме Келлога [14] данная функция принадлежит классу $C^{1,\nu}(\bar{D})$. Считая контур Γ ориентированным против часовой стрелки, введем индекс Коши

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}\arg G\Big|_{\Gamma} \quad (8)$$

функции G, так что функция

$$a(t) = \frac{1}{2}\arg\left[-\frac{\overline{G(t)}[\alpha(t)]^{2\kappa}}{G(t)}\right] \in C^{\nu}(\Gamma). \quad (9)$$

Рассмотрим аналитическую в D функцию

$$X(z) = e^{A(z)};\ \ \mathrm{Im}A\Big|_{\Gamma} = a. \quad (10)$$

В силу (9) функция A, а вместе с ней X принадлежат классу $C^{\nu}(\Gamma)$.

Введем в $C^{\nu}(\bar{D})$ конечномерное пространство $P(D)$ всех аналитических в D функций вида

$$p(z) = X(z)\sum_{k=0}^{-2\kappa} c_k\left[\alpha(z)\right]^k,\quad z \in D, \quad (11)$$

где $c_k \in \mathbb{C}$ и $\overline{c_k} = c_{2\kappa - k}$, $0 \le k \le -2\kappa$.

Здесь и ниже сумма по пустому множеству индексов равна нулю так, что размерность этого пространства над полем $\mathbb{R}$ составляет

$$\dim P = \begin{cases} 0; & \kappa \ge 1; \\ -2\kappa + 1; & \kappa \le 0. \end{cases}$$

Введем в $C^{\nu}(\Gamma)$ конечномерное пространство $Q(\Gamma)$ всех функций вида

$$q(t) = \frac{i[\alpha(t)]}{G(t)X(t)}\sum_{k=0}^{2\kappa-2} c_k[\alpha(t)]^k,\quad t \in \Gamma, \quad (12)$$

где $c_k \in \mathbb{C}$ и $\overline{c_k} = c_{-2\kappa-k}$, $0 \le k \le 2\kappa - 2$.

Очевидно, размерность этого пространства над полем $\mathbb{R}$ равна

$$\dim Q = \begin{cases} 2\kappa - 1; & \kappa \ge 1; \\ 0; & \kappa \le 0. \end{cases}$$

Заметим, что функции $q \in Q$ являются вещественными.

Введем ограниченный интегральный оператор I, действующий из пространства $C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, вещественных функций в пространство $C^{\mu}(\bar{D})$ аналитических в D функций по формуле

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{X(z)K(z,t)\varphi(t)\alpha'(t)dt}{G(t)X^{+}(t)[\alpha(t) - \alpha(z)]},\quad z \in D, \quad (13)$$

где $K(z, t) = 1$ при $\kappa \ge 1$ и

$$2K(z,t) = 1 + \left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(z)}\right]^{1-2\kappa},\quad \kappa \le 0.$$

Положим для краткости

$$\langle g,q\rangle=\int_\Gamma g(t)q(t)d_1t,$$

где d_1t — элемент длины дуги.

В указанных обозначениях разрешимость задачи (7) можно описать следующим образом.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma\in C^{1,\nu}$ *и* $G\in C^{\nu}(\Gamma)$, *тогда в обозначениях (8) — (13) условия ортогональности*

$$\langle g,q\rangle=0;\quad q\in Q(\Gamma) \tag{14}$$

необходимы и достаточны для разрешимости задачи (7), и при их выполнении все ее решения задаются формулой

$$\varphi=Ig+p;\quad p\in P(D). \tag{15}$$

Согласно теореме 2 при $\kappa\le 0$ пространство $Q=0$, и условия (14) отсутствуют, так что задача безусловно разрешима, а размерность ее ядра равна $-2\kappa+1$. При $\kappa\ge 1$ однородная задача имеет только нулевое решение, а число линейно независимых условий равно $2\kappa-1$. Во всех случаях индекс задачи равен $-2\kappa+1$.

Рассмотрим задачу (5), (6). Из (4) следует, что аналитическая функция φ определяется по u однозначно и восстанавливается по формуле

$$\varphi=e^{\frac{a(R)}{\|z|-R|^{n-1}}-h}u+Te^{\frac{a(R)}{\|z|-R|^{n-1}}-h}f,$$

Следовательно, при $\mu<\mu_0$ соответствие между решением u уравнения (1) из класса (5) и аналитический в D функцией $\varphi\in C^{\mu}(\bar D)$ будет взаимно однозначным.

Из последней формулы для φ и условий задачи типа Римана–Гильберта (5), (6) придем к задаче:

$$\mathrm{re}G_1\varphi\big|_\Gamma=g_1, \tag{16}$$

где функция $G_1\in C^{\nu}(\Gamma)$ всюду отлична от нуля, причем

$$G_1=Ge^h,\quad g_1=g+\mathrm{Re}Ge^hTe^{\frac{a(R)}{\|z|-R|^{n-1}}-h}f. \tag{17}$$

Видно, что функция $G_1\in C^{\nu}(\Gamma)$ всюду отлична от нуля, причем $\mathrm{Ind}G=\mathrm{Ind}G_1$.

В приведенных обозначениях о разрешимости задачи (5), (6) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma\in C^{1,\nu}$ *и* $G_1\in C^{\nu}(\Gamma)$. *Тогда в обозначениях (8) — (13), (17) условия ортогональности*

$$\langle g_1,q\rangle=0;\quad q\in Q(\Gamma) \tag{18}$$

необходимы и достаточны для разрешимости задачи (5), (6), и при их выполнении все ее решения задаются формулой

$$\varphi=Ig_1+p;\quad p\in P(D). \tag{19}$$

Согласно этой теореме при $\kappa\le 0$ пространство $Q=0$, и условия (18) отсутствуют, так что задача безусловно разрешима, а размерность ее ядра равна $-2\kappa+1$. При $\kappa\ge 1$ однородная задача имеет только нулевое решение, а число линейно независимых условий составляет $2\kappa-1$. Во всех случаях индекс задачи — $-2\kappa+1$

Подставив значения φ из (19) в интегральное представление (4), получим решение задачи:

$$u=e^{\Omega}[Ig_1+p+T(e^{-\Omega}f)].$$

Литература

1. **Векуа И.Н.** Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.

2. **Михайлов Л.Г.** Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд-во ТаджикНИИНТИ, 1963.

3. **Усманов Д.** Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе: Изд-во АН Тадж. ССР, 1993.

4. **Тунгатаров А., Абдыманапов С.А.** Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. Алматы: Ғылым, 2005.

5. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

6. **Begehr H, Dao-Qing Dai.** On Continuous Solutions of a Generalized Cauchy-Riemann System with More than One Singularity // J. Differential Equations. 2004. V. 196. Pp. 67—90.

7. **Meziani A.** Representation of Solutions of a Singular CR Equation in the Plane // Complex Var. and Elliptic Eq. 2008. V. 53. Pp. 1111—1130.

8. **Гончаров А.Л., Климентов С.Б.** Построение нелокальных решений обобщённых систем Коши–

References

1. **Vekua I.N.** Obobshchennye Analiticheskie Funktsii. M.: Fizmatgiz, 1959. (in Russian).

2. **Mikhaylov L.G.** Novye Klassy Osobykh Integral'nykh Uravneniy i Ikh Primenenie k Differentsial'nym Uravneniyam s Singulyarnymi Koeffitsientami. Dushanbe: Izd-vo TadzhikNIINTI, 1963. (in Russian).

3. **Usmanov D.** Obobshchennye Sistemy Koshi–Rimana s Singulyarnoy Tochkoy. Dushanbe: Izd-vo AN Tadzh. SSR, 1993. (in Russian).

4. **Tungatarov A., Abdymanapov S.A.** Nekotorye Klassy Ellipticheskikh Sistem na Ploskosti s Singulyarnymi Koeffitsientami. Almaty: Ғylym, 2005. (in Russian).

5. **Muskhelishvili N.I.** Singulyarnye Integral'nye Uravneniya. M.: Nauka, 1968. (in Russian).

6. **Begehr H, Dao-Qing Dai.** On Continuous Solutions of a Generalized Cauchy-Riemann System with More than One Singularity. J. Differential Equations. 2004;196: 67—90.

7. **Meziani A.** Representation of Solutions of a Singular CR Equation in the Plane. Complex Var. and Elliptic Eq. 2008;53:1111—1130.

8. **Goncharov A.L., Klimentov S.B.** Postroenie Nelokal'nykh Resheniy Obobshchennykh Sistem Koshi–Ri-

Римана с сингулярной точкой // Тез. докл. Междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти. Абрау-Дюрсо, 1998. С. 185—187.

9. **Расулов А.Б., Солдатов А.П.** Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 637—650.

10. **Расулов А.Б., Бободжанова М.А., Федоров Ю.С.** Представление общего решения уравнения типа Коши–Римана с сингулярной окружностью и особой точкой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2016. № 3. С. 1—16.

11. **Расулов А.Б.** Интегральные представления и краевые задачи для обобщенной системы Коши–Римана со сверхсингулярными многообразиями // Вестник МЭИ. 2012. № 6. С. 23—30.

12. **Akhmed-Zaki D.K., Tungatarov A.** About One System of First Order Partial Differential Equations with Singular Lines // Proc. IV Congress of the Turkic World Mathematical Soc. Azerbaijan, 2011. P. 144.

13. **Reissig M., Timofeev A.** Dirichlet Problems for Generalized Cauchy–Riemann Systems with Singular Coefficients // Complex Variables. 2005. V. 50. No. 7 (11). Pp. 653—672.

14. **Goluzin G.M.** Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Providence: AMS, 1969.

mana s Singulyarnoy Tochkoy. Tez. Dokl. Mezhdunar. Shkoly-seminara po Geometrii i Analizu Pamyati. Abrau-Dyurso, 1998:185—187. (in Russian).

9. **Rasulov A.B., Soldatov A.P.** Kraevaya Zadacha dlya Obobshchennogo Uravneniya Koshi–Rimana s Singulyarnymi Koeffitsientami. Differentsial'nye Uravneniya. 2016;52;5:637—650. (in Russian).

10. **Rasulov A.B., Bobodzhanova M.A., Fedorov Yu.S.** Predstavlenie Obshchego Resheniya Uravneniya Tipa Koshi–Rimana s Singulyarnoy Okruzhnost'yu i Osoboy Tochkoy. Differentsial'nye Uravneniya i Protsessy Upravleniya. 2016;3:1—16. (in Russian).

11. **Rasulov A.B.** Integral'nye Predstavleniya i Kraevye Zadachi dlya Obobshchennoy Sistemy Koshi–Rimana so Sverkhsingulyarnymi Mnogoobraziyami. Vestnik MEI. 2012;6:23—30. (in Russian).

12. **Akhmed-Zaki D.K., Tungatarov A.** About One System of First Order Partial Differential Equations with Singular Lines. Proc. IV Congress of the Turkic World Mathematical Soc. Azerbaijan, 2011:144.

13. **Reissig M., Timofeev A.** Dirichlet Problems for Generalized Cauchy–Riemann Systems with Singular Coefficients. Complex Variables. 2005;50;7 (11): 653—672.

14. **Goluzin G.M.** Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Providence: AMS, 1969. (in Russian).

Сведения об авторах:

Расулов Абдурауф Бабаджанович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: rasulov_abdu@rambler.ru
Федоров Юрий Сергеевич — доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: FedorovYS@mpei.ru

Information about authors:

Rasulov Abdurauf B. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: rasulov_abdu@rambler.ru
Fedorov Yuriy S. — Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: FedorovYS@mpei.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *21.05.2019*
The article received to the editor: *21.05.2019*