ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Электротехнические материалы и изделия (05.09.02)

УДК 538.945
DOI: 10.24160/1993-6982-2020-3-55-59

Поведение куперовской пары в потенциальном поле вихря Абрикосова

А.В. Матасов, А.П. Черкасов, И.А. Михайлов

В настоящее время не существует полной теории сверхпроводимости, что влечет за собой ряд важных исследовательских задач и проблем. В частности, исследование поведения динамики сверхпроводящей системы имеет ключевое значение для понимания процессов, происходящих в сверхпроводниках, и их практического применения.
Рассмотрено поведение куперовской пары в потенциальном поле вихря Абрикосова, качественно описана физика процесса. Выполнена оценка характерной длины и энергии системы на основе неопределенности Гейзенберга и квазиклассического метода. Проведено сравнение теоретической и экспериментальной длин когерентности для купратных сверхпроводников, достигнуто хорошее соответствие оценок для многих купратных сверхпроводников.
Полученная оценка длины когерентности указывает на физику процесса, что куперовские пары в сверхпроводящей области вихря можно рассматривать в некотором приближении как газ частиц. Оценки длины когеретности по своей форме напоминают выражение для эффективного диаметра молекулы, если рассматривать лондоновскую длину как длину свободного пробега молекулы, а длину когерентности как эффективный диаметр.
Проанализировано уравнение Шредингера для куперовской пары, выведены зависимости волновой функции частицы в сверхпроводящей и несверхпроводящей областях вихря. Решения получены для двух случаев, когда полная энергия частицы больше или меньше потенциальной. Во втором случае видно, что волновая функция в центре вихря не равняется нулю, а имеет конечное значение, что указывает на возможное квантование энергии куперовской пары во внутренней области вихря Абрикосова. Полученные результаты могут использоваться для построения полной теории сверхпроводимости, быть отправной точкой для построения теории динамики сверхпроводящей системы, что повлечет за собой, в частности, описание вольт-амперных характеристик сверхпроводников второго рода.

Ключевые слова: теория сверхпроводимости, куперовская пара, вихрь Абрикосова, динамика сверхпроводников.

Для цитирования: Матасов А.В., Черкасов А.П., Михайлов И.А. Поведение куперовской пары в потенциальном поле вихря Абрикосова // Вестник МЭИ. 2020. № 3. С. 55—59. DOI: 10.24160/1993-6982-2020-3-55-59.

The Cooper Pair Behavior in the Abrikosov Vortex Potential Field

A.V. Matasov, A.P. Cherkasov, I.A. Mikhailov

At present, there is no complete theory of superconductivity, which entails the need to solve a number of important research tasks and problems. In particular, studying the dynamic behavior of a superconducting system is of key importance for understanding the processes occurring in superconductors and for their practical application.
The behavior of a Cooper pair in the potential field of an Abrikosov vortex is considered, and the process physics is qualitatively described. The system characteristic length and energy are estimated on the basis of the Heisenberg uncertainty and the quasi classical method. The theoretical and experimental coherence lengths for cuprate superconductors are compared with each other, and good agreement of the estimates is achieved for many cuprate superconductors.
The obtained estimate of the coherence length indicates the physics of the process, according to which the Cooper pairs in the vortex superconducting region can be considered in some approximation as a gas of particles. The obtained forms of the coherence length

estimates resemble the expression for the molecule effective diameter if the London length is regarded as the molecule mean free path, and the coherence length as the effective diameter.
The Schrodinger equation for the Cooper pair is analyzed, and the dependences of the wave function of a particle in the vortex superconducting and non-superconducting regions are derived. Solutions are obtained for two cases in which the particle total energy is more or less than its potential energy. In the second case, it can be seen that the wave function at the vortex center does not equal zero, but has a finite value, which points to possible quantization of the Cooper pair energy in the Abrikosov vortex inner region. The obtained results can be used for developing a complete theory of superconductivity and can serve as the starting point for developing a theory of superconducting system dynamics, which will entail, in particular, a description of the current-voltage characteristics of superconductors of the second kind.

Key words: superconductivity theory, Cooper pair, Abrikosov vortex, dynamics of superconductors.

For citation: Matasov A.V., Cherkasov A.P., Mikhailov I.A. The Cooper Pair Behavior in the Abrikosov Vortex Potential Field. Bulletin of MPEI. 2020;3:55—59. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2020-3-55-59.

Введение

Теоретическое описание динамики сверхпроводящего состояния в настоящее время рассматривается как движение вихревой решетки [1 — 3]. Данные модели рассматривают механическое движение вихрей с учетом силы вязкого трения, силы пиннинга и сил, связанных с деформацией решетки при движении.

Известный подход для описания динамики сверхпроводников — солитонная теория сверхпроводимости [4 — 6]. Она рассматривает вихрь как особую волну солитонного типа и позволяет получить некоторое соответствие между теоретическими и экспериментальными дифференциальными характеристиками купратных сверхпроводников.

Проанализируем вихрь Абрикосова не как отдельную структуру при движении, а как систему, состоящую из куперовских пар, что учитывает квантовую природу сверхпроводимости, а также может быть удобным способом для учета всех сил, влияющих на вихрь.

Известно, что сопротивление материалов в сверхпроводящем состоянии равно нулю, что связано с тем, что электроны при образовании куперовской пары стремятся занять минимальный энергетический уровень, статистика частиц меняется и они приобретают способность двигаться под действием внешнего поля без сопротивления. Но что может помешать движению таких частиц? Только нормальная несверхпроводящая фаза, источником которой в сверхпроводниках второго рода и является вихрь Абрикосова. Поэтому в качестве потенциальной энергии для частицы выберем его полную энергию.

Оценим характерный размер и энергию квантовой системы с помощью оценки через неопределенность Гейзенберга и квазиклассический метод, а также перейдем к решению уравнения Шредингера для куперовской пары в потенциальном поле вихря Абрикосова.

Оценка характерной длины и энергии куперовской пары через неопределённость Гейзенберга и квазиклассический метод

Получим максимальную кинетическую энергию куперовской пары (пары электронов) через неопределенность Гейзенберга.

Согласно правилу квантования Бора–Зоммерфельда момент импульса частицы квантуется как:

$$\Delta p \Delta r = n\hbar.$$

Отсюда следует, что максимальная кинетическая энергия частицы равна:

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2\hbar^2}{2mr^2}.$$

Найдем величину характерной длины и энергии для куперовской пары через неопределенность Гейзенберга, учитывая потенциальную энергию. Пусть потенциальной энергией для куперовской пары будет энергия вихря Абрикосова. Данное предположение вызвано тем, что, образуясь в сверхпроводнике, пара электронов переходит в состояние с минимально возможной энергией, за счет чего передвигается без сопротивления в сверхпроводниках первого рода, а в сверхпроводниках второго рода пока не достигнет нормальной зоны, источником которой и является вихрь Абрикосова. Следует отметить, что для более точной оценки характерной длины следует учитывать не только энергию вихря Абрикосова, но и взаимодействия, способные изменить ее: силу магнуса, температурный градиент, пиннинг.

Проанализирована простейшая модель нахождения куперовской пары в вихре Абрикосова. Полная энергия одиночного вихря на единицу длины в зависимости от расстояния представляет собой [7]:

$$\frac{dU}{dr} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\lambda^2\mu_0}\ln\left(\frac{\lambda}{r}\right),$$

где Φ_0, λ, μ_0 — квант магнитного потока, лондоновская длина проникновения и магнитная постоянная.

Полная энергия куперовской пары выглядит как:

$$E = Ek + U. \qquad (1)$$

В соответствии с принципом наименьшей энергии для поиска характерной длины частицы определим производную от (1) и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{n^2\hbar^2}{mr^3} + \frac{\Phi_0^2}{4\pi\lambda^2\mu_0}\ln\left(\frac{\lambda}{r}\right) = 0.$$

Получим

$$r^3 = \left(\frac{\pi n_s \ln(\lambda/r)}{4n^2}\right)^{-1},$$

где n_s — концентрация сверхпроводящих электронов.

После разложения логарифма в ряд Тейлора в первом приближении:

$$r^2 \approx \frac{4n^2}{\pi n_s(\lambda - r)} \approx \frac{4n^2}{\pi n_s \lambda}; \quad (2)$$

$$E_k \approx \frac{\hbar^2 \pi n_s \lambda}{8m}. \quad (3)$$

Оценим энергию и характерную длину куперовской пары, используя квазиклассический метод (метод ВКБ).

Он предусматривает, что в любой потенциальной яме энергию частицы в некотором приближении можно представить как энергию, при которой эта частица находилась в яме с бесконечно высокими стенками [8]. Используем данное утверждение для поставленной задачи, для этого приравняем выражение для энергии частицы в бесконечной яме полной энергии уединенного вихря:

$$E_n \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mr_n^2} n^2;$$

$$E_n \approx U;$$

$$\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mr_n^2} n^2 \approx \frac{\Phi_0^2 r_n}{4\pi\lambda^2 \mu_0} \ln\left(\frac{e\lambda}{r_n}\right).$$

В первом приближении

$$r^2 \approx \frac{2\pi n^2}{n_s(e\lambda - r)} \approx \frac{2\pi n^2}{e n_s \lambda}; \quad (4)$$

$$E_n \approx \frac{\hbar^2 \pi n_s e\lambda}{4m}. \quad (5)$$

Применим полученные оценки (2) — (5) к некоторым купратным сверхпроводникам (таблица) [9, 10]. Причем квантовое число n выберем для наиболее точного совпадения расчетной и экспериментальной длины когерентности.

В таблице представлены экспериментальные значения лондоновской длины λ_c и длины когерентности ξ_c для купратных сверхпроводников. Индекс «c» показывает, что данные длины измеряли при соответствующем направлении внешнего магнитного поля, согласно общепринятым обозначениям. Найдем полученные выражения для характерного размера частицы (2), (4) как длину когерентности при соответствующей лондоновской длине. Обозначим длину (2) как ξ_{hg}, длину (4) — как ξ_{wkb}, числа n — n_{hg}, n_{wkb}, соответственно.

Из данных таблицы видно, что оценки связи (2), (4) применимы не для всех купратных сверхпроводников. Они перестают работать при значениях лондоновской длины проникновения порядка десятков микрометров.

Стоит отметить, что сам вид оценок (2), (4) напоминает выражение для эффективного диаметра молекулы, если считать длину когерентности диаметром молекулы, а лондоновскую длину проникновения — длиной свободного пробега данной молекулы.

Уравнение Шредингера для куперовской пары в потенциальном поле вихря Абрикосова

Вихрь Абрикосова представляет собой систему из двух цилиндров, вложенных друг в друга, внутренний цилиндр представляет собой нормальную фазу с радиусом, равным длине когерентности ξ, а внешний — сверхпроводящую фазу с радиусом, равным лондоновской длине проникновения λ.

Рассмотрим внутреннюю $0 < r < \xi$ и внешнюю $\xi < r < \lambda$ области вихря.

Стационарное уравнение Шредингера имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = E\psi.$$

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (6)$$

Ввиду цилиндрической симметрии вихря последний член (6) равен нулю. Также при изучении случая

Сравнение экспериментальной длины когерентности ξ_c с теоретической ξ_{wkb}, ξ_{hg} для некоторых купратных сверхпроводников

Материал	λ_c, нм	ξ_c, нм	n_{wkb}	ξ_{wkb}, нм	E_n,эВ	n_{hg}	ξ_{hg}, нм	E_k, эВ
$La_{1,83}Sr_{0,17}CuO_4$	2000	0,30	1	0,40	2,30	1	0,30	0,42
$YBa_2Cu_3O_{7-x}$	800	0,30	1	0,26	5,75	1	0,19	1,06
$BiSr_2CaCu_2O_8$	500	0,20	1	0,20	9,20	1	0,15	1,69
$Tl_2Ba_2CuO_{6+x}$	2000	0,20	1	0,40	2,30	1	0,30	0,42
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+x}$	700	0,19	1	0,24	6,57	1	0,18	1,209
$HgBa_2CaCu_2O_{6+x}$	800	0,40	2	0,51	5,75	2	0,38	1,06
$Bi_2Sr_2CuO_6$	800	1,50	6	1,53	5,75	8	1,52	1,06
$HgBa_2CuO_{4+x}$	450	1,20	6	1,15	10,22	8	1,40	1,88
$Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+x}$	15000,,,150000	0,10	1	>6,64	<0,30	1	>4,9	<0,056
$Tl_2Ba_2CaCu_2O_{8+x}$	>25000	0,70	1	>8,5	<0,18	1	>6,3	<0,03
$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10+x}$	>20000	0,50	1	>7,6	<0,23	1	>5,6	<0,04

$z \ll r$, справедливого для сверхпроводящих пленок, можно приравнять к 0 изменение по z.

Проанализируем внутреннюю область вихря. В ней в первом приближении можно положить, что потенциальная энергия вихря Абрикосова U не зависит от расстояния при условии, что длина когерентности много меньше лондоновской глубины проникновения. Тогда то же самое верно для полной энергии частицы E. Получим исходное уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+U\psi=E\psi. \qquad (7)$$

Приведем (7) к форме уравнения Бесселя:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+k^2\psi=0;\\&k^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)=\frac{2m}{\hbar^2}E_k.\end{aligned} \qquad (8)$$

Вычислим E_k через правило квантования Бора–Зоммерфельда (момент импульса для куперовской пары квантуется на расстоянии порядка длины когерентности):

$$p\xi=n\hbar;$$

$$E_k=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2m\xi^2}n^2.$$

Возьмем случай, когда $E > U$, тогда k — положительное, и уравнение (8) имеет следующее решение:

$$\psi(r)=C_1J_0(kr)+C_2Y_0(kr),$$

где J_0, Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Второе слагаемое обладает бесконечным значением при $r = 0$, что физически не имеет смысла, поэтому $C_2 = 0$. Ввиду правила нормировки для квадрата волновой функции первое слагаемое не может быть больше 1, следовательно, $C_1 = 0$. Таким образом, волновая функция для частицы во внутренней области вихря Абрикосова выглядит следующим образом:

$$\psi(r)=J_0\left(\frac{nr}{\xi}\right). \qquad (9)$$

Но какую волновую функцию мы получили? Куперовская пара не существует во внутренней области вихря, поэтому результирующая функция (9) — есть волновая функция двух взаимодействующих электронов до превращения в куперовскую пару. Чтобы получить волновую функцию куперовской пары, используем двухжидкостную модель частиц в сверхпроводнике:

$$\psi_s^2+\psi_n^2=1.$$

Тогда выражение для квадрата волновой функции куперовской пары:

$$\psi_s^2(r)=1-J_0^2\left(\frac{nr}{\xi}\right).$$

Для случая, когда $E < U$ уравнение (8) имеет следующее решение:

$$\psi(r)=C_1I_0(kr)+C_2K_0(kr),$$

где I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

У второго слагаемого бесконечное значение при $r = 0$, что физически не имеет смысла, поэтому $C_2 = 0$. C_1 найдем из условия, в котором при $r = \xi$, $\psi_2 = 1$, тогда $C_1 = I_0(n)^{-1}$. Зависимость квадрата волновой функции частицы во внутренней области равна:

$$\psi(r)=\frac{1}{I_0(n)}I_0\left(\frac{nr}{\xi}\right). \qquad (10)$$

Как видно из (10), данное решение характерно тем, что волновая функция при $r = 0$ не обращается в ноль, как в первом случае, а имеет некоторое конечное значение, которое стремится к нулю с ростом n.

Во внешней области вихря Абрикосова потенциальная энергия сильно меняется, но волновая функция почти постоянна, поэтому уравнение Шредингера (7) примет вид:

$$(U-E)\psi=0. \qquad (11)$$

Из (11) следует, что кинетическая энергия куперовской пары во внешней области вихря равна нулю. Другой физический смысл этого уравнения заключается в равенстве нулю волновой функции пары электронов в данной области.

Заключение

По полученным оценкам связи лондоновской длины и длины когерентности можно сделать следующие выводы.

Выражения (2), (4) напоминают по форме выражение для эффективного диаметра молекулы, если считать лондоновскую длину длиной свободного пробега молекулы в газе, а длину когерентности — эффективным диаметром молекулы. Это указывает на физику движения куперовской пары. Можно полагать в первом приближении, что мы имеем свободный газ из куперовских пар в сверхпроводящей области вихря. Данный результат может быть использован для улучшения моделей динамики сверхпроводящего состояния;

Связь характерных длин не работает при большом значении λ. Для решения данной проблемы следует ввести эффективную лондоновскую длину или длину когерентности с учетом параметра решетки материала и длиной свободного пробега электрона. В зависимости от механизма сверхпроводимости эффективные длины могут различаться.

По полученным решениям уравнения Шредингера можно заключить, что полученные зависимости волновой функции от расстояния во внутренней области вихря соответствуют качественным соображениям.

Для более точной модели следует включить в потенциальную энергию другие взаимодействия, связанные с вихрем.

Решение выражения (10) доказывает, что волновая функция куперовской пары в центре вихря не равна нулю, что является новым качественным результатом.

Полученные данные можно использовать для построения более точной модели, а также вывода теоретических зависимостей вольт-амперных характеристик сверхпроводников.

Литература

1. **Fedirko V.A., Kasatkin A.L., Polyakov S.V.** Vortex Escape from Columnar Defect in a Current-loaded Superconductor // J. Low Temperature Phys. 2018. V. 192. Iss. 5 — 6. Pp. 359—374.
2. **Tsvetkovskii V. e. a.** Mechanics of Vortex Escape from Extended Linear Defect in 3D-anisotropic Superconductor // J. Phys. 2006. V. 43. Pp. 639—642.
3. **Дорофеев Г.Л.** Влияние пиннинга вихревых нитей на вольт-амперные характеристики сверхпроводников // Физика низких температур. 1979. Т. 5. № 4. С. 344—351.
4. **Tkachov G.** Soliton Defects and Topological 4π-periodic Superconductivity from an Orbital Magnetic Field Effect in Edge Josephson Junctions // J. Phys.: Condensed Matter. 2019. V. 31 (17). Pp. 1—18.
5. **Marychev P.M.** The Fluctuation Formation of Phase Solitons in Superconducting Two-band Bridges // Phys. Solid State. 2018. V. 60. Iss. 11. Pp. 2150—2156.
6. **Marychev P.M., Vodolazov D.Yu.** Soliton Induced Critical Current Oscillations in Two-band Superconducting Bridges // Phys. Rev. B. 2017. V. 97. Pp. 1—6.
7. **Де Жен П.** Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.
8. **Scheck F.** Quantum Physics. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
9. **Kleiner R., Buckel W.** Superconductivity an Introduction. Berlin: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co, 2016.
10. **Ципенюк Ю.М.** Физические основы сверхпроводимости. М.: Изд-во МФТИ, 1996.

References

1. **Fedirko V.A., Kasatkin A.L., Polyakov S.V.** Vortex Escape from Columnar Defect in a Current-loaded Superconductor. J. Low Temperature Phys. 2018;192;5 — 6: 359—374.
2. **Tsvetkovskii V. e. a.** Mechanics of Vortex Escape from Extended Linear Defect in 3D-anisotropic Superconductor. J. Phys. 2006;43:639—642.
3. **Dorofeev G.L.** Vliyanie Pinninga Vikhrevykh Nitey na Vol't-ampernye Kharakteristiki Sverkhprovodnikov. Fizika Nizkikh Temperatur. 1979;5;4;344—351. (in Russian).
4. **Tkachov G.** Soliton Defects and Topological 4π-periodic Superconductivity from an Orbital Magnetic Field Effect in Edge Josephson Junctions. J. Phys.: Condensed Matter. 2019;31 (17):1—18.
5. **Marychev P.M.** The Fluctuation Formation of Phase Solitons in Superconducting Two-band Bridges. Phys. Solid State. 2018;60;11:2150—2156.
6. **Marychev P.M., Vodolazov D.Yu.** Soliton Induced Critical Current Oscillations in Two-band Superconducting Bridges. Phys. Rev. B. 2017;97:1—6.
7. **De Zhen P.** Sverkhprovodimost' Metallov i Splavov. M.: Mir, 1968. (in Russian).
8. **Scheck F.** Quantum Physics. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
9. **Kleiner R., Buckel W.** Superconductivity an Introduction. Berlin: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co, 2016.
10. **Tsipenyuk Yu.M.** Fizicheskie Osnovy Sverkhprovodimosti. M.: Izd-vo MFTI, 1996. (in Russian).

Сведения об авторах:

Матасов Антон Владимирович — аспирант кафедры физики и технологии электротехнических материалов и компонентов НИУ «МЭИ», e-mail: matasov_av93@mail.ru
Черкасов Анатолий Петрович — кандидат технических наук, доцент кафедры физики и технологии электротехнических материалов и компонентов НИУ «МЭИ», e-mail: CherkasovAP@mpei.ru
Михайлов Иван Андреевич — магистрант кафедры физики и технологии электротехнических материалов и компонентов НИУ «МЭИ», e-mail: i.mikhaylov1996@gmail.com

Information about authors:

Matasov Anton V. — Ph.D.-student of Physics and Technology of Electrical Engineering Materials and Components Dept., NRU MPEI, e-mail: matasov_av93@mail.ru
Cherkasov Anatoliy P. — Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of Physics and Technology of Electrical Engineering Materials and Components Dept., NRU MPEI, e-mail: CherkasovAP@mpei.ru
Mikhailov Ivan A. — Undergraduate of Physics and Technology of Electrical Engineering Materials and Components Dept., NRU MPEI, e-mail: i.mikhaylov1996@gmail.com

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *14.10.2019*
The article received to the editor: *14.10.2019*