МАТЕМАТИКА

Математическая логика, алгебра и теория чисел (01.01.06)

УДК 511.4
DOI: 10.24160/1993-6982-2020-4-136-143

Оценки многочленов от значений *E*-функций

В.А. Горелов

В теории трансцендентных чисел одним из основных методов является метод Зигеля–Шидловского, позволяющий доказывать трансцендентность и алгебраическую независимость значений целых функций некоторого класса (E-функций) при условии алгебраической независимости этих функций над $\mathbb{C}(z)$.
Имеется много примеров E-функций, использующихся в математике — $\exp(z)$, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, функции Бесселя и Куммера, «неполная» гамма-функция, обобщённые гипергеометрические функции и некоторые другие специальные функции.
Метод Зигеля—Шидловского позволяет получать оценки снизу модулей многочленов от значений E-функций. Их называют мерами алгебраической независимости чисел. Они являются количественными характеристиками алгебраической независимости.
Получение оценок мер алгебраической независимости имеет длительную историю. Первые оценки мер для значений функции $\exp(z)$ получили Э. Борель и К. Малер, а для значений функции Бесселя — К. Зигель. Оценки мер алгебраической независимости для значений E-функций общего вида устанавливали С. Ленг, А.И. Галочкин, А.Б. Шидловский, Ю.В. Нестеренко.
Постоянная, входящая в оценку меры, называется эффективной, если она может быть выражена через параметры, характеризующие рассматриваемые функции и точки, где берутся их значения. Оценка меры считается эффективной, если она содержит только эффективные постоянные.
Условие алгебраической независимости функций, вообще говоря, недостаточно для получения эффективных оценок мер алгебраической независимости. Для этого требуется выполнение дополнительных условий. Наиболее сложным считается случай, когда основная совокупность функций является алгебраически зависимой над $\mathbb{C}(z)$.
В работах автора оценки мер алгебраической независимости значений E-функций были улучшены. После 1995 г. статей на эту тему не публиковалось, хотя она остаётся актуальной.

Ключевые слова: метод Зигеля, мера алгебраической независимости, E-функции.

Для цитирования: Горелов В.А. Оценки многочленов от значений E-функций // Вестник МЭИ. 2020. № 4. С. 136—143. DOI: 10.24160/1993-6982-2020-4-136-143.

Estimates of Polynomials from the Values of *E*-Functions

V.A. Gorelov

The Siegel-Shidlovskii method is one of the main methods in the theory of transcendental numbers. By using this method, it is possible to establish the transcendency and algebraic independence of the values of entire functions belonging to a certain class (so-called E-functions) provided that these functions are algebraically independent over $\mathbb{C}(z)$.
There are many examples of E-functions used in mathematics: $\exp(z)$, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, Bessel functions, Kummer functions, "incomplete" gamma-function, generalized hypergeometric functions, and some other special functions.
By using the Siegel-Shidlovskii method, it is possible to obtain the lower estimates for the moduli of polynomials from the values of E-functions. These estimates are called algebraic independence measures of the numbers. They serve as the quantitative characteristics of algebraic independence.
The problem of obtaining the estimates of algebraic independence measures has long been dealt with by many researchers. The first estimates of

measures for the values of exp(z) were obtained by E. Borel and K. Mahler, and for the values of Bessel functions such estimates were obtained by C. Siegel. Estimates of algebraic independence measures for the values of general E-functions were established by S. Lang, A.I. Galochkin, A.B. Shidlovskii, and Yu.V. Nesterenko.
The constant appearing in the estimate of a measure is called effective if it can be expressed in terms of the parameters characterizing the considered functions and points at which their values are taken. An estimate of a measure is considered to be effective if it contains only effective constants.
Generally speaking, the algebraic independence condition of functions is not sufficient for obtaining effective estimates of algebraic independence measures. Some additional conditions must be satisfied for this. The case in which the main totality of functions is algebraically dependent over $\mathbb{C}(z)$ is the most complicated one.
In a number of the author's works, the estimates of algebraic independence measures of the values of *E*-functions were improved. After 1995, no papers have been published on this topic, although it still remains of issue.

Key words: Siegel's method, algebraic independence measure, *E*-functions.

For citation: Gorelov V.A. Estimates of Polynomials from the Values of *E*-Functions. Bulletin of MPEI. 2020;4:136—143. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2020-4-136-143.

Введение

Установлены оценки снизу для многочленов от значений *E*-функций, составляющих решение систем линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$.

Настоящая работа следует методу Зигеля–Шидловского и представляет собой развитие результатов [1 — 3]. Описание метода и подробная история вопроса даны в [4].

Пусть $\mathbb{A}$ — поле всех алгебраических чисел. Размер числа $\alpha \in \mathbb{A}$ (максимум модулей чисел, алгебраически сопряжённых с α) обозначим $\overline{|\alpha|}$, высоту α (максимум модулей коэффициентов неприводимого многочлена для α со взаимно простыми целыми коэффициентами) — $H(\alpha)$. Если $P \in \mathbb{A}[z_1, ..., z_n]$, обозначим через $\overline{|P|}$ и $H(P)$ максимумы размеров и высот его коэффициентов. Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраическое поле над $\mathbb{Q}$, $[\mathbb{K}:\mathbb{Q}] = h < \infty$. Кольцо целых алгебраических чисел поля $\mathbb{K}$ обозначим $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$.

E-функция — это аналитическая функция вида $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n / n!$, $c_n \in \mathbb{K}$, если при любом $\varepsilon > 0$ $\overline{|c_n|} = O\left(n^{\varepsilon n}\right)$, $n \to \infty$ и существует последовательность $\{d_n\}$ общих знаменателей чисел $c_0, ..., c_n$, такая, что $d_n = O(n^{\varepsilon n})$, $n \to \infty$.

E-функции, у которых $c_n \in \mathbb{K}$, называют $\mathbb{K}E$-функциями.

Если $\mathbb{K}E$-функции

$$f_1(z), ..., f_m(z) \tag{1}$$

составляют решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y'_k = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}\; y_i; \;\; Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \;\; k = 1, \ldots, m, \;\; m \geqslant 2, \tag{2}$$

либо системы

$$y'_k = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}\; y_i; \quad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad k = 1, \ldots, m, \quad m \geqslant 1, \tag{3}$$

то можно считать, что $Q_{k,i} \in \mathbb{K}(z)$ [4, гл. 3, § 2, леммы 2, 3].

Обозначим $T(z)$ наименьшее общее кратное знаменателей функций $Q_{k,i}$.

Всюду далее положительные постоянные γ и σ с индексами и без них зависят только от функций (1). Постоянные γ — эффективны (т. е. выражаются через параметры, характеризующие функции (1)). Постоянные σ эффективны только при выполнении дополнительных условий, описанных в [1, 2].

Следующая теорема доказана А.И. Галочкиным [5] и А.Б. Шидловским [4, гл. 12, § 2].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{K}E$*-функции* (1) *составляют решение системы* (3) *и алгебраически независимы над* $\mathbb{C}(z)$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$, $P \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[x_1, ..., x_m]$, $\deg P \le s$, $H(P) \le H$, $h = [\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{Q}]$. *Тогда*

$$\left|P\left(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\right)\right| > CH^{-\rho s^m}, \tag{4}$$

где $\rho = 2^{m+1} m^m h^{m+1}/m!$, $C > 0$ *— постоянная, не зависящая от* H.

Впервые оценка типа (4) получена в 1962 г. С. Ленгом [6].

В 1977 г. Ю.В. Нестеренко [7] опубликовал оценку, аналогичную (4), где $\rho = 4^m h^m (mh^2 + h + 1)$, $C = (\exp\exp(\sigma s^{2m} \ln(s + 1)))^{-1}$.

Автор [2, примечание] получил оценку (4) при $\rho = (m + 1)^{m+1} h^{m+1}/m!$, $C = (\exp\exp(\sigma s^{2m} \ln(s + 1)))^{-1}$.

А.Б. Шидловским [4, гл. 12, § 3, 4] установлен ряд оценок многочленов от значений подсовокупности $\mathbb{K}E$-функций в случае, когда основная рассматриваемая совокупность функций алгебраически зависима над $\mathbb{C}(z)$. С учётом работы А.И. Галочкина [8] эти оценки могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{K}E$*-функции* (1), $m \ge 2$, *составляют решение системы* (3), $\mathrm{degtr}_{\mathbb{C}(z)}\{f_1(z), ..., f_m(z)\} = l$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha T(\alpha) \neq 0$, $P \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[x_1, ..., x_m]$, $\deg P \le s$, $H(P) \le H$, $h = [\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{Q}]$. *Тогда либо* $P(f_1(\alpha), ..., f_m(\alpha)) = 0$, *либо*

$$\left|P\left(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\right)\right| > CH^{-\rho h^{l+1} s^l}, \tag{5}$$

где ρ, C *— положительные постоянные, не зависящие от* H.

Если $l = m - 1$, *то* $\rho = k(2m)^m/m!$, *где* k *— степень неприводимого уравнения, связывающего функции* (1).

Пусть $\mathbb{K}$E-функции (1) алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$. Рассмотрим совокупность минимальных уравнений этих функций над $\mathbb{C}(z)$ (определение в [4]).

Совокупность минимальных уравнений совпадает с так называемым базисом Грёбнера [§ 8.14, 9] идеала, состоящего из всех многочленов, связывающих функции (1). Для вычисления базиса Грёбнера имеются эффективные алгоритмы [§ 8.15, 9]. Минимальные уравнения запишем в виде

$$P_i(f_1(z),\dots,f_m(z))=0,\quad i=1,\dots,\tau, \qquad (6)$$

где P_i — примитивные многочлены с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ от m переменных.

Обозначим

$$\lambda_0=\max_{1\leqslant i\leqslant\tau}\deg_z P_i;\ \tau_0=\max_{1\leqslant i\leqslant\tau}\overline{|P_i|};\ \Omega_0=\max_{1\leqslant i\leqslant\tau}\deg_{\bar f} P_i.$$

В [10] доказано, что

$$\ln\Omega_0<2^{m-1}\ln\left(\Omega^2/2+\Omega\right)+\ln 2,$$

где Ω — максимум степеней многочленов какой-либо системы порождающих идеала всех многочленов, связывающих функции (1).

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть при условиях теоремы 2 совокупность старших членов минимальных уравнений (6) выглядит как*

$$A_j(z)f_m^{\varkappa_{j,m}}(z)\ \dots\ f_1^{\varkappa_{j,1}}(z);\ A_j(z)\in\mathbb{K}[z],\ j=1,\dots,\tau, \qquad (7)$$

$\varkappa_0=\max(\varkappa_{1,1},\dots,\varkappa_{\tau,m})$; $\alpha\in\mathbb{A}$; $\alpha T(\alpha)A_1(\alpha)\dots A_\tau(\alpha)\neq 0$.

Тогда неравенство (5) в теореме II справедливо при $\rho=(2\varkappa_0)^m(m+1)^l(l+1)/l!$, $C=(\exp\exp(\sigma s^{4l}\ln(s+1)))^{-1}$. *Если* $l=m-1$, *то* $\rho=km^{2m}(m-1)^{1-m}/m!$, *где* k *— степень неприводимого уравнения, связывающего функции (1).*

Числа α для использования в теореме 3 можно выбрать, исходя из результатов [11].

Вспомогательные утверждения

Поля, сопряжённые с $\mathbb{K}$, обозначим $\mathbb{K}_{[j]}$, $j=1,\dots,h$, $\mathbb{K}_{[1]}=\mathbb{K}$. Если α, $L(z_1,\dots,z_m)$, $P(z_1,\dots,z_m)$, $f(z)$ — число из $\mathbb{K}$, линейная форма, многочлен и формальный степенной ряд с коэффициентами из $\mathbb{K}$, то через $\alpha_{[j]}$, $L_{[j]}(z_1,\dots,z_m)$, $P_{[j]}(z_1,\dots,z_m)$, $f_{[j]}(z)$ обозначим число, линейную форму, многочлен и формальный степенной ряд, сопряжённые с ними относительно поля $\mathbb{K}_{[j]}$ [4, гл. 11, § 2].

При доказательстве теоремы 3 достаточно рассмотреть только однородный случай, уменьшив в (5) m и l на 1, так как неоднородный сводится к нему добавлением функции $f_{m+1}(z)\equiv 1$.

Пусть степень однородной трансцендентности над $\mathbb{C}(z)$ совокупности функций (1) не меньше двух. Для каждого $N\in\mathbb{N}$ обозначим через L_N множество $\omega_{N,m}=(N+m-1)!/N!(m-1)!$ произведений:

$$f_1^{k_1}(z)\dots f_m^{k_m}(z),\ k_i\in Z^+,\ k_1+\dots+k_m=N. \qquad (8)$$

Обозначим $\mathbb{L}_N$ линейное пространство над $\mathbb{C}(z)$, натянутое на элементы L_N. Пусть B_N — фиксированное подмножество L_N, являющееся базисом пространства $\mathbb{L}_N$. Произвольно занумеруем все элементы базиса B_N и обозначим их

$$F_1,\dots,F_M,\quad M=M_N=\dim L_N. \qquad (9)$$

Функции из L_N, не вошедшие в выбранный базис, представляются в виде

$$F_i=\sum_{i=1}^{M}R_{i,k}F_k;\ R_{i,k}\in\mathbb{K}(z);\ i=M+1,\dots,\omega_{N,m}. \qquad (10)$$

Для каждого $N\in\mathbb{N}$ зафиксируем многочлен $S_N\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ такой, что $S_NR_{i,k}\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$.

Особой точкой базиса B_N назовём любой из нулей многочлена S_N. Наибольшую из степеней многочленов S_N, $S_NR_{i,k}$ в представлениях (10) и наибольший из размеров многочленов обозначим степенью и размером базиса B_N, обозначив их соответственно λ_N и τ_N.

Если функции (1) удовлетворяют системе (2), то функции (9) также удовлетворяют аналогичной системе. Степень и размер системы — q_N и t_N. Пусть Λ — множество, состоящее из нуля и всех особых точек всех таких систем. Легко проверяются неравенства:

$$q_N\leqslant q+\lambda_N;\quad t_N\leqslant Ntq\tau_N\left(\binom{N+m-1}{m-1}-M+1\right).$$

Лемма 1. *Пусть среди* $\mathbb{K}E$*-функций (1), составляющих решение системы (2), имеются по крайней мере две однородно алгебраически независимых над* $\mathbb{C}(z)$, $F_1,\dots F_M$ *— базис линейного пространства* $\mathbb{L}_N$, $N\geq 2$, $\alpha\in\mathbb{A}\backslash\Lambda$, $h=[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{Q}]$, $l=l(z_1,\dots,z_M)$ *— произвольная линейная форма с коэффициентами из* $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $l\not\equiv 0$, $\overline{|l|}=H$. *Тогда существуют постоянные* σ, γ_1, γ_2 *для которых при*

$$\ln\ln H>\gamma_1\max(\sigma\ln N,\lambda_N,\ln\tau_N,M^4m\ln N) \qquad (11)$$

выполняется неравенство

$$\max_{1\leqslant i\leqslant h}|l_{[j]}(F_{1[j]}(\alpha_{[j]}),\dots,F_{M[j]}(\alpha_{[j]}))|>H^{1-M-\delta}, \qquad (12)$$

где

$$\delta=\frac{\gamma_2M^3\sqrt{m\ln N}}{\sqrt{\ln\ln H}}.$$

Доказательство. Без уменьшения общности считаем, что $\alpha\in\mathbb{K}$. Пусть

$$\begin{aligned}&L_0=l(F_1(\alpha),\dots,F_M(\alpha))=\\&=a_{0,1}F_1(\alpha)+\dots+a_{0,M}F_M(\alpha),\ l\not\equiv 0;\\&a_{0,i}\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}},\ |a_{0,i}|\leq H,\ i=1,\dots,M;\\&L_{0,j}=l_{[j]}(F_{1[j]}(\alpha_{[j]}),\dots,F_{M[j]}(\alpha_{[j]}))=\\&=\sum_{i=1}^{M}(a_{0,i})_{[j]}F_{i[j]}(\alpha_{[j]}),\ j=1,\dots,h.\end{aligned} \qquad (13)$$

Согласно [1, леммы 2, 3] существуют линейно независимые формы

$$L_k = \sum_{i=1}^{M} a_{k,i} F_i(\alpha),\ a_{k,i} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}},\ k = 1, ..., M, \qquad (14)$$

такие, что

$$\begin{aligned} &\overline{|\,a_{k,i}\,|} < n^n \exp(\gamma_3 Mn\sqrt{m \ln N \ln n}); \\ &|\,L_{k,j}\,| < n^{-(M-1)n} \exp(\gamma_3 Mn\sqrt{m \ln N \ln n}), \end{aligned} \qquad (15)$$

где $\ln n > \max\left(\sigma \ln N, q_N, \ln t_N, 4M^2 m \ln N\right)$.

$$L_{k,j} = \sum_{i=1}^{M} (a_{k,i})_{[j]} F_{i[j]}(\alpha_{[j]}), \quad k = 1, \ldots, M. \qquad (16)$$

Среди линейных форм (14) можно выбрать $M - 1$ форму так, что вместе с формой L_0 они будут линейно независимы. Можно считать, что это — первые $M - 1$ формы.

Пусть Δ, $\Delta \neq 0$, определитель линейных форм L_1, ..., L_{M-1}. Обозначим $\Delta_{k,i,j}$ алгебраическое дополнение элемента k-й строки и i-го столбца в $\Delta_{[j]}$. Поскольку $\Delta \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ и $\Delta \neq 0$, то $\Delta_{[1]} \ldots \Delta_{[h]} \geq 1$. Отсюда, при некотором значении j, $1 \leq j \leq h$ выполняется неравенство

$$|\Delta_{[j]}| \geq 1. \qquad (17)$$

Из равенств (16), (13) при каждом i, $1 \leq i \leq M$ имеем

$$\begin{aligned} &\Delta_{[j]} F_{i[j]}(\alpha_{[j]}) = \Delta_{1,i,j} L_{1,j} + \ldots + \\ &+\Delta_{M-1,i,j} L_{M-1,j} + \Delta_{M,i,j} L_{0,j}. \end{aligned} \qquad (18)$$

Выберем i так, чтобы $F_{i[j]}(\alpha_{[j]}) \neq 0$, что возможно, так как $T(\alpha_{[j]}) \neq 0$. Тогда из (18) получим, что

$$\begin{aligned} &\overline{\left|\Delta_{M,i,j}\right|}\left|L_{0,j}\right| \geq \left|F_{i[j]}(\alpha_{[j]})\right|\left|\Delta_{[j]}\right| - \\ &-(M-1) \max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} \overline{\left|\Delta_{k,i,j}\right|} \max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} \left|L_{k,j}\right|. \end{aligned} \qquad (19)$$

Поскольку оценки (15) справедливы для любого j, то

$$\begin{aligned} &\overline{\left|\Delta_{M,i,j}\right|} \leq (M-1)!\, n^{(M-1)n} \times \\ &\times \exp\left(\gamma_3 Mn\sqrt{m \ln N \ln n}\left(M-1\right)\right); \\ &\max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} \overline{\left|\Delta_{k,i,j}\right|} \leq (M-1)!\, Hn^{(M-2)n} \times \\ &\times \exp\left(\gamma_3 Mn\sqrt{m \ln N \ln n}(M-2)\right); \\ &\max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} \left|L_{k,j}\right| \leq n^{-(M-1)n} \exp\left(\gamma_3 Mn\sqrt{m \ln N \ln n}\right). \end{aligned} \qquad (20)$$

Пусть θ обозначает выражение $M^2 n\sqrt{m \ln N \ln n}$. Поскольку $M! < M^M < e^{\theta}$, из неравенств (20) следует

$$\begin{aligned} &\overline{\left|\Delta_{M,i,j}\right|} < n^{(M-1)n} e^{\gamma_4 \theta}; \\ &\max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} \overline{|\,\Delta_{k,i,j}\,|} < Hn^{(M-2)n} e^{\gamma_4 \theta}; \\ &\max_{1 \leqslant k \leqslant M-1} |\,L_{k,j}\,| < n^{-(M-1)n} e^{\gamma_4 \theta}. \end{aligned} \qquad (21)$$

Из (19), (21), (17) получим

$$n^{(M-1)n} e^{\gamma_4 \theta} \left|L_{0,j}\right| \geq \left|F_{i[j]}(\alpha_{[j]})\right| - Hn^{-n} e^{\gamma_5 \theta}.$$

Поскольку $e^{-\gamma_6 \theta} < e^{-\gamma_6 N} < \left|F_{i[j]}(\alpha_{[j]})\right| < e^{\gamma_6 N} < e^{\gamma_6 \theta}$, где

$$\gamma_6 = \max_{f_{k[j]}(\alpha_{[j]}) \neq 0} \left|\ln\left|f_{k[j]}(\alpha_{[j]})\right|\right|,$$

то

$$\begin{aligned} &\left|L_{0,j}\right| \geq n^{-(M-1)n} e^{-\gamma_4 \theta}\left(\left|F_{i[j]}\left(\alpha_{[j]}\right)\right| - Hn^{-n} e^{\gamma_5 \theta}\right) \geq \\ &\geq n^{-(M-1)n} e^{-\gamma_4 \theta}\left(e^{-\gamma_6 \theta} - Hn^{-n} e^{\gamma_5 \theta}\right) \geqslant \\ &\geq n^{-(M-1)n} e^{-\gamma_4 \theta} e^{-\gamma_6 \theta}(1 - Hn^{-n} e^{\gamma_5 \theta} e^{\gamma_6 \theta}); \\ &\left|L_{0,j}\right| \geq n^{-(M-1)n} e^{-\gamma_7 \theta}\left(1 - Hn^{-n} e^{\gamma_8 \theta}\right). \end{aligned} \qquad (22)$$

Выберем минимальное n для удовлетворения неравенства

$$\begin{aligned} &\ln n > \max(\sigma \ln N, q_N, \ln t_N, 16\gamma_8 M^4 m \ln N); \\ &n^n > 2e^{\gamma_8 \theta} H. \end{aligned} \qquad (23)$$

Тогда неравенство (22) перейдёт в

$$\left|L_{0,j}\right| > n^{-(M-1)n} e^{-\gamma_7 \theta}\left(1 - \frac{1}{2}\right) > e^{-\gamma_9 \theta} n^{-(M-1)n}. \qquad (24)$$

При сделанном предположении, начиная с некоторого H, выполняется неравенство

$$(n-1)^{n-1} \leq 2H \exp(\gamma_8 M^2 (n-1)\sqrt{m \ln N \ln(n-1)}).$$

Увеличивая в правой части данного неравенства n на единицу, получим

$$n^{n-1} \leq 2H\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} e^{\gamma_8 \theta} < 2eHe^{\gamma_8 \theta} < 6He^{\gamma_8 \theta}. \qquad (25)$$

Прологарифмируем это неравенство:

$$(n-1)\ln n < \ln H + \ln 6 + \gamma_8 \theta.$$

Отсюда, учитывая, что при условиях (23)

$$\gamma_8 \theta = \gamma_8 M^2 n\sqrt{m \ln N \ln n} < \frac{1}{4} n \ln n,$$

получим

$$\frac{3}{4} n \ln n < \ln n + \ln H + \ln 6;$$

$$n \ln n < \gamma_{10} \ln H; \qquad (26)$$

$$n < \gamma_{10} \ln H. \qquad (27)$$

Из неравенства (25) с использованием оценки (27) следует

$$n^n < 6nHe^{\gamma_8 \theta} < H \ln He^{\gamma_{11} \theta}.$$

Подставив эту оценку в неравенство (24), имеем

$$|L_{0,j}| > \left(H \ln H e^{\gamma_{11}\theta}\right)^{1-M} e^{-\gamma_9\theta} \geq$$
$$\geq H^{1-M}\left(\ln H\right)^{1-M} e^{-\gamma_{12}\theta M}.$$

Преобразуем последний сомножитель. Из условия (23) следует, что $n^n > H$, откуда $\ln n + \ln\ln n > \ln\ln H$,

$$\ln n > \gamma_{13} \ln\ln H. \tag{28}$$

Из неравенств (26), (28) получим

$$e^{-\gamma_{12}\theta M} = \exp\left(-\frac{\gamma_{12} M^3 n\sqrt{m\ln N}\ln n}{\sqrt{\ln n}}\right) >$$
$$> \exp\left(-\frac{\gamma_{14} M^3 \sqrt{m\ln N}\ln H}{\sqrt{\ln\ln H}}\right) = H^{-\gamma_{14}M^3\sqrt{m\ln N}/\sqrt{\ln\ln H}}.$$

В итоге

$$\left|L_{0,j}\right| > H^{1-M} H^{(1-M)\ln\ln H/\ln H} H^{-\gamma_{14}M^3\sqrt{m\ln N}/\sqrt{\ln\ln H}}.$$

Последний показатель с ростом H стремится к нулю медленнее чем предыдущий, отсюда следует неравенство (12). Лемма 1 доказана.

Лемма 2 [12, теорема 5.1]. *Пусть* $n, m, X \in \mathbb{N}, n > m$,

$$l_r = a_{r,1}x_1 + \ldots + a_{r,n}x_n; \quad a_{r,j} \in \mathbb{R},\ r = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n;$$
$$A_r \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{r,j}|.$$

Тогда существует набор $x_{1,0}, \ldots, x_{n,0} \in \mathbb{Z}$, *удовлетворяющий условиям*

$$0 < \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|x_{j,0}\right| \leq X; \quad \left|l_r\right| < A_r X^{1-n/m}, \quad r = 1,\ldots,m.$$

Основная лемма

Лемма 3. *Пусть среди* $\mathbb{K}E$*-функции (1), составляющих решение системы (2), имеются по крайней мере две однородно алгебраически независимых над* $\mathbb{C}(z)$, $P = P(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z_1, \ldots, z_m]$ *— однородный многочлен степени* $s \in \mathbb{N}$, $\overline{|P|} \leq H$, $\alpha \in \mathbb{A}\backslash\Lambda$, $P(\alpha) = P(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) \neq 0$, $h = [\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{Q}]$, $N > s$, $v = M_{N-s}$, $w = M - v$. *Тогда, если*

$$\frac{w}{M} \leq \frac{\varkappa - 1}{\varkappa h}, \quad \varkappa \in \mathbb{R},\ \varkappa > 1, \tag{29}$$

то существуют постоянные γ *и* σ, *для которых при*

$$\ln\ln H > \gamma\max\left(\sigma\ln N, \lambda_N, \ln\tau_N, M^4 m\ln N\varkappa^4/(\varkappa-1)^2\right) \tag{30}$$

выполняется неравенство

$$\left|P(\alpha)\right| > H^{-\varkappa hM}.$$

Доказательство. Без уменьшения общности можно считать, что $\alpha \in \mathbb{K}$. В случае $h = 1$ лемма 3 следует непосредственно из неравенства (12). Поэтому считаем, что $h \geq 2$. В этом случае условие (29) равносильно

$$\frac{w}{M} \leq \frac{\varkappa' - 1}{\varkappa' h - 1}, \tag{31}$$

где $\varkappa'$ — число, удовлетворяющее уравнению

$$(\varkappa' - 1)/(\varkappa' h - 1) = (\varkappa - 1)/(\varkappa h),$$

откуда

$$\varkappa' = \varkappa - \frac{\varkappa - 1}{h}, \quad 1 < \varkappa' < \varkappa;$$
$$\frac{1}{\varkappa'} - \frac{1}{\varkappa} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa^2(h-1) + \varkappa} > \frac{\varkappa - 1}{\varkappa^2 h}. \tag{32}$$

Из условия (31) (при $h \geq 2$) следуют неравенства

$$\frac{v}{M} \geq \frac{h-1}{h - 1/\varkappa'}; \quad M \leq \frac{h - 1/\varkappa'}{h-1} v < 2v. \tag{33}$$

Рассмотрим линейную форму

$$L = L(\alpha) = a_1 G_1(\alpha) + \ldots + a_v G_v(\alpha); \quad a_k \in Z_K,\ k = 1,\ldots,v,$$

где $G_1, \ldots, G_v$ — базис линейного пространства $\mathbb{L}_{N-s}$.

Разложим все коэффициенты a_k линейной формы L по базису $\omega_1, \ldots, \omega_h$ кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ с целыми рациональными коэффициентами $x_{k,i}$, тогда L можно изучать как линейную форму L_1 от hv величин $x_{k,i}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$:

$$L_1 = x_{1,1}\omega_1 G_1(\alpha) + \ldots + x_{1,h}\omega_h G_1(\alpha) + \ldots + x_{v,h}\omega_h G_v(\alpha).$$

Пусть

$$L_j = x_{1,1}\omega_{1,j} G_{1,j}(\alpha_{[j]}) + \ldots + x_{v,h}\omega_{h,j} G_{v,j}(\alpha_{[j]}),\ j = 1,\ldots,h$$

— линейные формы, получающиеся из L_1 путём замены чисел ω_i, коэффициентов степенных рядов функций $G_k(z)$ и числа α на алгебраически сопряжённые из поля $\mathbb{K}_{[j]}$, $\mathbb{K}_{[1]} = \mathbb{K}$. Множество полей $\mathbb{K}_{[j]}$, не являющихся действительными, разбивается на пары комплексно сопряжённых. Соответствующее множество линейных форм L_j также разбивается на пары комплексно сопряжённых, с совпадающими действительными частями и противоположными по знаку мнимыми. Поэтому из форм $L_1, \ldots, L_h$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$ можно получить h линейных форм $l_1, \ldots, l_h$ от hv целых рациональных величин $x_{k,i}$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $l_1 = \Re e\, L_1$. Согласно лемме 2 для любого $X \in \mathbb{N}$ найдётся hv целых рациональных величин $x_{k,i}$, не равных нулю в совокупности (тем самым $|a_1| + \ldots + |a_v| \neq 0$), по модулю не превосходящих X, таких, что при подстановке их в линейные формы $l_2, \ldots, l_h$ выполняется неравенство

$$\max_{2\leqslant j\leqslant h} |l_j| < e^{\gamma_{15}M} X^{1-\frac{hv}{h-1}},$$

откуда

$$\max_{2\leqslant j\leqslant h} |L_j| < \sqrt{2}\, e^{\gamma_{15}M} X^{1-\frac{hv}{h-1}}$$

и $L(\alpha) = L_1(\alpha_{[1]}) \neq 0$ ввиду (12), где M заменим на v.

Так как

$$\max_{2\leqslant j\leqslant h}|P_{[j]}(\alpha_{[j]})|<\mathrm{e}^{\gamma_{16}M}H;\quad |L|=|L_1|<\mathrm{e}^{\gamma_{17}M}X;$$

то

$$\max_{1\leqslant j\leqslant h}\left|P_{[j]}(\alpha_{[j]})L\right|_j<\max\left(\left|P(\alpha)\right|\mathrm{e}^{\gamma_{17}M}X,\,\mathrm{e}^{\gamma_{18}M}HX^{1-\frac{hv}{h-1}}\right).\quad (34)$$

Поскольку $P(\alpha)L(\alpha)\neq 0$, то $PL\not\equiv 0$ как линейная форма от функций F_1, ..., F_M с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Рассмотрим линейную форму

$$\psi(\alpha)=b^{\lambda_N}S_N(\alpha)P(\alpha)L(\alpha)=\beta_1F_1(\alpha)+\ldots+\beta_MF_M(\alpha),$$

где b = denα, а многочлен $S_N(z)$ определён после (10). Поскольку число членов в многочлене P не превосходит $\binom{m+s-1}{m-1}\leqslant ms^{m-1}$, то для коэффициентов β_k справедлива оценка

$$\overline{|\beta_k|}<MHX\mathrm{e}^{\gamma_{19}(\lambda_N+\ln\tau_N+m\ln N)}.$$

Согласно лемме 1 при условии (11) выполняется неравенство

$$\max_{1\leqslant j\leqslant h}|\psi_{[j]}(\alpha_{[j]})|>(HX)^{1-M-\delta}\mathrm{e}^{-\gamma_{20}M(\lambda_N+\ln\tau_N+m\ln M)}.$$

С другой стороны, ввиду (34)

$$\max_{1\leqslant j\leqslant h}|\psi_{[j]}(\alpha_{[j]})|<\mathrm{e}^{\gamma_{21}M(\lambda_N+\ln\tau_N)}\max\left(\left|P(\alpha)\right|X,\,HX^{1-\frac{hv}{h-1}}\right).$$

Сравнивая эти оценки, получим

$$(HX)^{1-M-\delta}<\mathrm{e}^{\gamma_{22}M(\lambda_N+\ln\tau_N+m\ln M)}\times$$
$$\times\max\left(|P(\alpha)|X,\,HX^{1-\frac{hv}{h-1}}\right).\quad (35)$$

Выберем X так, что

$$HX^{1-\frac{hv}{h-1}}<\left|P(\alpha)\right|X,$$

т. е.

$$X>\left(H/\left|P(\alpha)\right|\right)^{\frac{h-1}{hv}}.$$

Можно считать, что $|P(\alpha)|<1$. Поскольку $X\in\mathbb{N}$, положим

$$X=\gamma_{23}\left(H/\left|P(\alpha|\right|\right)^{\frac{h-1}{hv}},\quad 1<\gamma_{23}\leqslant 2.$$

Тогда, с учётом условия (30) неравенство (35) перейдёт в

$$\left|P(\alpha)\right|>H^{1-M-\delta}X^{-M-\delta}\mathrm{e}^{-\gamma_{24}(\ln\ln H)^2};$$

$$\left|P(\alpha)\right|>H^{1-M-\delta}\left(H/\left|P(\alpha)\right|\right)^{-(M+\delta)\frac{h-1}{hv}}\mathrm{e}^{-\gamma_{24}(\ln\ln H)^2};$$

$$\left|P(\alpha)\right|^{1-(M+\delta)\frac{h-1}{hv}}>H^{1-M-\delta-(M+\delta)\frac{h-1}{hv}}\mathrm{e}^{-\gamma_{24}(\ln\ln H)^2};$$

$$\left|P(\alpha)\right|>H^{1-\frac{M+\delta}{1-(M+\delta)(h-1)/hv}}\exp\left(-\gamma_{24}\frac{(\ln\ln H)^2}{1-(M+\delta)(h-1)/hv}\right).$$

Из неравенств (30) — (33) и $v/\varkappa'\leqslant hv-(h-1)M<M$, увеличивая в случае необходимости в (30) постоянную γ, последовательно вычисляем

$$h\delta=\frac{\gamma_2hM^3\sqrt{m\ln N}}{\sqrt{\ln\ln H}}<\frac{(\varkappa-1)M}{2\varkappa^2h}<$$
$$<\frac{(\varkappa-1)v}{\varkappa^2h}<\left(\frac{1}{\varkappa'}-\frac{1}{\varkappa}\right)v;$$
$$1-(M+\delta)\frac{h-1}{hv}=\frac{1}{hv}(hv-(h-1)\times$$
$$\times M-(h-1)\delta)\geqslant\frac{1}{hv}(hv-(h-1)M-h\delta)>$$
$$>\frac{1}{hv}\left(\frac{v}{\varkappa'}-\left(\frac{1}{\varkappa'}-\frac{1}{\varkappa}\right)v\right)=\frac{1}{\varkappa h};$$
$$\frac{M+\delta}{1-(M+\delta)(h-1)/hv}=hv\frac{M+\delta}{hv-(h-1)M-h\delta+\delta}<$$
$$<\frac{hvM}{hv-(h-1)M-h\delta}<\frac{M}{1/(\varkappa h)}=\varkappa hM;$$
$$\gamma_{24}\frac{(\ln\ln H)^2}{1-(M+\delta)(h-1)/hv}<\gamma_{24}\frac{(\ln\ln H)^2}{1/(\varkappa h)}<\gamma_{25}\varkappa(\ln\ln H)^2;$$
$$|P(\alpha)|>H^{1-\varkappa hM}\mathrm{e}^{-\gamma_{25}\varkappa(\ln\ln H)^2}=$$
$$=H^{-\varkappa hM+1-\gamma_{25}\varkappa(\ln\ln H)^2/\ln H}.$$

Из последнего неравенства следует утверждение леммы 3.

При доказательстве леммы 3 использовались идеи, высказанные А.И. Галочкиным [8]. Имеются также аналоги леммы 3, основанные на другом подходе [4, гл. 12, § 1; 1, лемма 4]. При нем удаётся получить немного менее стеснительные ограничения на H, чем (30), но вид многочлена P зависит от уравнений связи (6) [1, 2].

Доказательство теоремы 3

Лемма 4 [4, гл. 4, § 10]. *Пусть степень однородной трансцендентности над* $\mathbb{C}(z)$ *функций (1) равна* l, $2\leq l\leq m-1$, *а уравнения (6) со старшими членами (7) образуют систему однородных минимальных уравнений для функций (1) над* $\mathbb{C}(z)$. *Тогда для любого* $N\in\mathbb{N}$ *совокупность произведений степеней (8) с условием*

$$\forall j,1\leqslant j\leqslant\tau,\exists i,1\leqslant i\leqslant m:k_i<\varkappa_{j,i},$$

образует базис B_N *линейного пространства* $\mathbb{L}_N$.

Нетрудно видеть, что множество Λ состоит из числа 0 и нулей многочленов T, A_1, ..., A_T.

Лемма 5 [13, доказательство леммы 10]. *При условиях леммы 4 число* M *элементов базиса* B_N *удовлетворяет неравенству*

$$M < \varkappa_0^{m-l}\binom{m}{l}\frac{(N+1)\dots(N+l-1)}{(l-1)!}.$$

Лемма 6 [13, лемма 11]. *При условиях лемм 3, 4 степень λ_N и размер τ_N базиса B_N удовлетворяют неравенствам*

$$\lambda_N < c^2\lambda_0 N^2; \quad \tau_N < cN\tau_0^{c^2N^2}; \quad c = (\Omega_0+1)^{m-l},$$

где числа λ_0, τ_0, Ω_0 вводятся перед формулировкой теоремы 3.

При $N \geq N_0$ имеем $M = \varphi(N) \in \mathbb{R}[N]$, $\deg\varphi(N) = l - 1$ [4, гл. 4, § 11]). Из доказательства данного утверждения следует, что N_0 достаточно положить равным $m(\varkappa_0 - 1)$.

Лемма 7 [2, лемма 6]. *При условиях леммы 4 для любого натурального $N \geq slh + m(\varkappa_0 - 1) + 1$ число $M = \varphi(N)$ элементов базиса B_N удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\varphi(N)-\varphi(N-s)}{\varphi(N)} \leqslant \frac{l-1}{lh}.$$

Лемма 8. *Пусть выполнены условия леммы 4, $N = slh + m(\varkappa_0 - 1) + 1$, $h \geq 2$, $l \leq m - 2$, тогда*

$$M < \frac{1}{(l-1)!}(2\varkappa_0)^{m-1}(smh)^{l-1}.$$

Доказательство. В силу свойств биномиальных коэффициентов

$$\binom{m}{l} = \binom{m-1}{l-1} + \binom{m-1}{l} \leqslant 2^{m-1}.$$

Отсюда и леммы 5 в случае $\varkappa_0 \geq 2$ имеем

$$M < \binom{m}{l}\varkappa_0^{m-l}\frac{(N+l-1)^{l-1}}{(l-1)!} < \frac{2^{m-1}\varkappa_0^{m-l}}{(l-1)!}(slh+m\varkappa_0)^{l-1} <$$
$$< \frac{2^{m-1}\varkappa_0^{m-l}(\varkappa_0 smh)^{l-1}}{(l-1)!} = \frac{(2\varkappa_0)^{m-1}(smh)^{l-1}}{(l-1)!}.$$

В случае $\varkappa_0 = 1$ величину M оценим сверху числом произведений степеней функций (1), у которых не менее $m - l$ показателей равны нулю.

Из комбинаторных соображений следует

$$M = \sum_{k=1}^{l}\binom{m}{k}\binom{N-k+k-1}{k-1} = \sum_{k=1}^{l}\binom{m}{k}\binom{slh}{k-1} <$$
$$< \binom{slh}{l-1}\sum_{k=1}^{l}\binom{m}{k} < \frac{(slh)^{l-1}}{(l-1)!}\sum_{k=1}^{l}\binom{m}{k} <$$
$$< \frac{(smh)^{l-1}}{(l-1)!}\left(\frac{1}{m/l}\right)^{l-1}2^m,$$

что ввиду $(m/l)^{l-1} \geq (1 + 2/l)^{l-1} \geq 2$ даёт утверждение леммы 8.

Если $l = m - 1$, то лемма 8 справедлива при любом $h \in \mathbb{N}$. Действительно, в этом случае система минимальных уравнений (6) состоит только из одного уравнения

$$B = B(f_1(z),\dots,f_m(z)) = 0,$$

где B — однородный неприводимый и примитивный многочлен степени k с коэффициентами из $\mathbb{K}[z]$. Заменяя в рассуждениях [4, гл. 12, § 3] лемму 1 из [4, гл. 12] на лемму 1 из [2], получим, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$M < \frac{k}{(m-2)!}(N+1)\dots(N+m-2);$$
$$\frac{w}{M} < \frac{\psi(N)-\psi(N-s)}{\psi(N)};$$
$$\psi(N) = (N+1)\dots(N+m-1).$$

Полагая в лемме 1 из [2] $l = m - 1$, убеждаемся, что при $\varkappa = m - 1$, $N = [s(m-1)^2h/(m-2)] - m + 2$, выполняется неравенство (29), и имеет место оценка

$$M < \frac{k}{(m-2)!}\left(\frac{(m-1)^2}{m-2}sh\right)^{m-2} =$$
$$= \frac{k(m-1)^{2m-3}(m-2)^{2-m}}{(m-1)!}(sh)^{m-2}.$$

Согласно лемме 6 при

$$\ln\ln H \geqslant \sigma\gamma^m k^4 s^{4m-8}\ln(s+1)\max(1, \deg B_z, \ln\overline{|B|})$$

находимся в условиях леммы 3.

В случае $l \leq m - 1$ неравенство (29) согласно лемме 7 выполняется при $N = slh + m(\varkappa_0 - 1) + 1$, $\varkappa = l$. Поэтому, ввиду лемм 6, 8, при

$$\ln\ln H \geqslant \sigma\gamma^m m^{4l}\varkappa_0^{4m-4}\ln(\varkappa_0+1)\times$$
$$\times\Omega_0^{2m}s^{4l-4}\ln(s+1)\max(1, \lambda_0, \ln\tau_0),$$

$h \geq 2$, мы также находимся в условиях леммы 3.

Далее рассуждаем как при доказательстве теоремы 1 из [1].

Наконец, при $h = 1$ теорема 1 вытекает непосредственно из неравенства (12), если положить $N = s$, а M (ввиду леммы 5) оценить как

$$M < \varkappa_0^{m-l}\binom{m}{l}\frac{(s+1)\dots(s+l-1)}{(l-1)!} < \varkappa_0^{m-l}2^{m-1}ls^{l-1}.$$

Этот случай исследован в работе Нгуен Тьен Тая [13].

Теорема 1 доказана.

Литература

1. **Горелов В.А.** Об оценках мер алгебраической независимости значений E-функций // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31. № 5. С. 31—45.
2. **Горелов В.А.** Оценки мер алгебраической независимости значений E-функций // Известия Вузов. Серия «Математика». 1992. № 10. С. 6—11.
3. **Горелов В.А.** Эффективные оценки многочленов от значений E-функций, связанных алгебраическими уравнениями // Деп. в ВИНИТИ. 1995. № 46.
4. **Шидловский А.Б.** Трансцендентные числа. М: Наука, 1987.
5. **Галочкин А.И.** Оценка меры взаимной трансцендентности значений E-функций // Математические заметки. 1968. Т. 3. Вып. 4. С. 377—386.
6. **Lang S.** A Transcendence Measure for E-functions // Mathematika. 1962. V. 9. P. 157—161.
7. **Нестеренко Ю.В.** Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел // Известия АН СССР. Серия «Математическая». 1977. Т. 41. № 2. С. 253—284.
8. **Галочкин А.И.** Оценки снизу многочленов от значений алгебраически зависимых E-функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. Вып. 1. С. 305—309.
9. **Тыртышников Е.Е.** Основы алгебры. М: Физматлит, 2017.
10. **Dube T.W.** The Structure of Polynomial Ideals and Grobner Bases // SIAM J. Comp. 1990. V. 19. No. 4. P. 750—773.
11. **Горелов В.А.** Алгебраическая независимость значений E-функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$ // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 751—755.
12. **Фельдман Н.И.** Приближения алгебраических чисел. М: Изд-во МГУ, 1981.
13. **Нгуен Тьен Тай.** Об оценках порядков нулей многочленов от аналитических функций и приложении их к оценкам меры взаимной трансцендентности значений E-функций // Математический сборник. 1983. Т. 120. № 1. С. 112—142.

References

1. **Gorelov V.A.** Ob Otsenkakh Mer Algebraicheskoy Nezavisimosti Znacheniy E-funktsiy. Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal. 1990;31;5:31—45.(in Russian).
2. **Gorelov V.A.** Otsenki Mer Algebraicheskoy Nezavisimosti Znacheniy E-funktsiy. Izvestiya Vuzov. Seriya «Matematika». 1992;10:6—11.(in Russian).
3. **Gorelov V.A.** Effektivnye Otsenki Mnogochlenov ot znacheniy E-funktsiy, Svyazannykh Algebraicheskimi Uravneniyami. Dep. v VINITI. 1995;46.(in Russian).
4. **Shidlovskiy A.B.** Transtsendentnye Chisla. M: Nauka, 1987. (in Russian).
5. **Galochkin A.I.** Otsenka Mery Vzaimnoy Transtsendentnosti Znacheniy E-funktsiy. Matematicheskie Zametki. 1968;3;4:377—386. (in Russian).
6. **Lang S.** A Transcendence Measure for E-functions. Mathematika. 1962;9:157—161.
7. **Nesterenko Yu.V.** Otsenki Poryadkov Nuley Funktsiy Odnogo Klassa i Ikh Prilozhenie v Teorii Transtsendentnykh Chisel. Izvestiya AN SSSR. Seriya «Matematicheskaya». 1977;41;2:253—284. (in Russian).
8. **Galochkin A.I.** Otsenki Snizu Mnogochlenov ot Znacheniy Algebraicheski Zavisimykh E-funktsiy. Fundamental'naya i Prikladnaya Matematika. 1995;1;1: 305—309. (in Russian).
9. **Tyrtyshnikov E.E.** Osnovy Algebry. M: Fizmatlit, 2017. (in Russian).
10. **Dube T.W.** The Structure of Polynomial Ideals and Grobner Bases. SIAM J. Comp. 1990;9;4: 750—773.
11. **Gorelov V.A.** Algebraicheskaya Nezavisimost' Znacheniy E-funktsiy, Svyazannykh Proizvol'nymi Algebraicheskimi Uravneniyami nad $\mathbb{C}(z)$. Fundamental'naya i Prikladnaya Matematika. 1998;4; 2:751—755. (in Russian).
12. **Fel'dman N.I.** Priblizheniya Algebraicheskikh Chisel. M: Izd-vo MGU, 1981. (in Russian).
13. **Nguen T'en Tay.** Ob Otsenkakh Poryadkov Nuley Mnogochlenov ot Analiticheskikh Funktsiy i Prilozhenii Ikh k Otsenkam Mery Vzaimnoy Transtsendentnosti Znacheniy E-funktsiy. Matematicheskiy Sbornik. 1983; 120;1:112—142. (in Russian).

Сведения об авторе:

Горелов Василий Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: GorelovVA@mpei.ru

Information about author:

Gorelov Vasiliy A. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Mathematical and Computer Modeling Dept., NRU MPEI, , e-mail: GorelovVA@mpei.ru

Работа выполнена при поддержке: Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FSWF-2020-0022)
The work is executed at support: Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No. FSWF-2020-0022)

Статья поступила в редакцию: *02.07.2019*
The article received to the editor: *02.07.2019*