УДК 510.(644:624);512.562;519.766.23
DOI: 10.24160/1993-6982-2020-5-148-154

Экстра-понятия и области истинностных значений при интерпретации логических языков в системах искусственного интеллекта

В.Н. Фальк

Предложены экстра-понятия, введенные для представления конструктивно заданных объектов и структур с неограниченной сложностью при их традиционном понимании. Понятия экстра-слова, экстра-регулярного выражения, контекстно-свободной экстра-грамматики и контекстно-свободного экстра-языка являются расширениями хорошо известных понятий теории формальных языков. Экстра-слова — частный случай символьных последовательностей, однако, множество всех экстра-слов в любом алфавите счётно, в то время как множество всех символьных последовательностей не счётно. Периодические коды представлений рациональных чисел в некоторой позиционной системе счисления суть экстра-слова в этой терминологии. Понятие экстра-кортежа считается обобщением понятия кортежа, предполагающим возможность интерпретации экстра-кортежей и как конечных, и как указанного вида бесконечных последовательностей элементов произвольного, не более чем счётного множества, причем множество всех возможных таких последовательностей остается счётным.
С использованием введенных понятий достигнуто задание счётного семейства областей истинностных значений для многозначных и счетнозначных логик, каждая из которых представляет собой ограниченную решетку конечной или счётной мощности с традиционным определением базовых логических операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Иерархическое построение указанных областей истинности позволяет ввести в рассмотрение новые логические операции, не имеющие аналогов в классической логике.

Ключевые слова: формальные языки, символьные последовательности, регулярные выражения, экстра-слова, экстра-кортежи, экстра-регулярные выражения, контекстно-свободные экстра-грамматики, системы искусственного интеллекта, многозначные логики, бесконечнозначные логики, ограниченные дистрибутивные решетки, иерархическое задание областей истинностных значений.

Для цитирования: Фальк В.Н. Экстра-понятия и области истинностных значений при интерпретации логических языков в системах искусственного интеллекта // Вестник МЭИ. 2020. № 5. С. 148—154. DOI: 10.24160/1993-6982-2020-5-148-154.

Extra Concepts and Domains of Truth Values in Interpreting Logical Languages in Artificial Intelligence Systems

V.N. Falk

So-called extra concepts introduced to represent structurally defined objects and structures with unlimited complexity in their traditional understanding are suggested. The concepts of extra-word, extra-regular expression, context-free extra-grammar, and context-free extra-language are extensions of the well-known concepts used in the theory of formal languages. Extra words are a special case of symbol sequences; however, the set of all extra words in any alphabet is countable, whereas the set of all symbol sequences is not countable. The periodic codes of rational number representations in some positional numeration system are in fact extra words in this terminology. The concept of an extra-tuple is a generalization of the tuple concept, which implies the possibility of interpreting extra-tuples both as finite and as the indicated type of infinite sequences of elements of an arbitrary, not more than countable set, and it should be noted that the set of all possible sequences of such sort remains countable.
By using the introduced concepts, a countable family of the domains of truth values has been specified for multivalued and countable-valued logics, each of which is a bounded lattice of finite or countable power with the traditional definition of basic logical operations of negation, conjunction, and disjunction. The hierarchical construction of the proposed truth domains makes it possible to introduce new logical operations in consideration that do not have analogues in the classical logic.

Key words: formal languages, symbolic sequences, regular expressions, extra-words, extra-tuples, extra-regular expressions, context-free extra-grammars, artificial intelligence systems, multi-valued logics, infinite-valued logics, bounded distributive lattices, hierarchical definition of truth value domains.

For citation: Falk V.N. Extra Concepts and Domains of Truth Values in Interpreting Logical Languages in Artificial Intelligence Systems. Bulletin of MPEI. 2020;5:148—154. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2020-5-148-154.

Введение

Давно и хорошо известны базовые понятия теории формальных языков, хотя и до сих пор авторы используют разные слова для обозначения одних и тех же сущностей: буквы и символы, слова, цепочки и конечные последовательности и т. д. Иногда один и тот же термин понимают по-разному. Большинство полагает, что алфавит — это конечное множество букв, а один из пионеров отечественного программирования Н.А. Криницкий считал, что алфавит — конечное линейно-упорядоченное множество букв [1], и, надо признать, это более соответствует нашему интуитивному представлению об алфавитах естественных языков. Строго говоря, словом x в алфавите $A \equiv \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ называется функция, определенная на конечном начальном отрезке натурального ряда чисел (понимаемого как упорядоченное множество), т. е. на интервале $1...m$, с множеством A в качестве области значений: $x:1...m \to A$, где $|x| \cong m \in \mathbb{N}_0$ — длина слова x. Если $m = 0$, то слово x называют пустым ($x(i)$ — i-я буква слова x). Для интуитивно понятного обобщения, «слова с бесконечной длиной» $x:\mathbb{N} \to A$ (полагая, что «длина» слова $|x| = \omega$), обычно используется термин «символьная последовательность» [2]. Особое значение имеет частный случай — периодическая с некоторого места символьная последовательность, в силу очевидной связи ее с понятием рационального числа, точнее, с представлением рациональных чисел в позиционных системах счисления. «Особость» данного термина заключается в том, что множество всевозможных подобных символьных последовательностей для любого алфавита счётно, в то время как множество всех символьных последовательностей — не счётно. Кроме того, для обозначения конечных последовательностей элементов произвольных множеств, не обязательно конечных, используется более общий термин — кортеж (Tuple). Поскольку Автору не известны общепринятые специальные термины для обозначения кортежей с бесконечным количеством элементов — аналогов термина «символьная последовательность» и его частных случаев, в статье предложена, как представляется, более удобная терминология в форме так называемых экстра-понятий. Основной результат состоит в определении на основе понятия экстра-кортежа счётного семейства иерархически определенных областей истинностных значений для многозначных и бесконечнозначных логик, сохраняющих традиционную взаимосвязь базовых логических операций.

Экстра-слова и экстра-кортежи

Экстра-словом $b' \circ b''$ в алфавите $A \equiv \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ обозначим последовательность элементов алфавита (букв), начальная часть которой — слово $b' \in A^{\Diamond}$ (конечная последовательность букв), за которым следует бесконечно повторяющееся слово $b'' \in A^{\Diamond}$, т. е. $b' \circ b'' = b'b''b''...$. Слово b' назовем ациклической частью экстра-слова $b' \circ b''$, а b'' — его циклической частью. Заметим, что если λ обозначает пустое слово, то $b' \circ \lambda$ фактически представляет собой слово b'. В противном случае, если $b'' \neq \lambda$, то экстра-слово имеет «бесконечную длину» $|b' \circ b''| = \omega$. Экстра-кортежем назовем обобщение, в котором множество A может быть и бесконечным, как правило, счётным. Экстра-кортеж общего вида $b' \circ b''$, таким образом, задается парой кортежей b', $b'' \in A^{\Diamond}$ элементов множества A. Если специально не оговорено, то рассматриваются только бесконечные экстра-кортежи, циклическая часть которых отлична от пустого кортежа λ.

Определим средства конструктивного задания множеств экстра-слов (формальных экстра-языков), но сначала напомним известные аналоги понятий из теории формальных языков.

Язык регулярных выражений (рв) [3]

Пусть $A \equiv \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ — алфавит, $n \in \mathbb{N}$.

Синтаксис:

- $\varnothing, \lambda, a_1, a_2, ..., a_n$ — рв;
- если R, R', R'' — рв, то $(R'R'')$, $(R' + R'')$, R^* — рв;
- других рв нет.

Имя алфавита (не курсив) может использоваться как рв согласно определению: $\mathrm{A} \cong a_1, a_2, ..., a_n$.

Семантика (область интерпретации регулярных выражений — множество $2^{A^{\Diamond}}$):

- $\Phi[\![\varnothing]\!] = \{\ \}$;
- $\Phi[\![\lambda]\!] = \{\lambda\}$;
- $\Phi[\![a_1]\!] = \{a_1\}, ..., \Phi[\![a_n]\!] = \{a_n\}$;
- $\Phi[\![R'R'']\!] = \{x'x'' | x' \in \Phi[\![R']\!] \wedge x'' \in \Phi[\![R'']\!]\}$;
- $\Phi[\![R' + R'']\!] = \Phi[\![R']\!] \cup \Phi[\![R'']\!]$;
- $\Phi[\![R^*]\!] = \{\lambda\} \cup \{x_1x_2...x_n | (\forall i \in 1...n)(x_i \in \Phi[\![R]\!])\}$.

Очевидно, что для любого R множество $\Phi[\![R]\!]$ — не более чем счётное множество слов.

Исчисление эквивалентности (альтернативой является исчисление включения ($\leq$) регулярных выражений: $R' \leq R'' \approx R' + R'' = R''$; $R' = R'' \approx R' \leq R'' \wedge R'' \leq R'$):

Аксиомы:

$$R = R;$$

$$\left(\left(R'R''\right)R'''\right) = \left(R'\left(R''R'''\right)\right),$$

$$\varnothing R = R\varnothing = \varnothing,\ \lambda R = R\lambda = R;$$

$$\left(\left(R' + R''\right) + R'''\right) = \left(R' + \left(R'' + R'''\right)\right),$$

$$R' + R'' = R'' + R', R + R = R, \varnothing + R = R;$$

$$R^* = \lambda + RR^*, \left(R^*\right)^* = R^*, \varnothing^* = \lambda,\ \varnothing^* = \lambda;$$

$$\left(R'R''\right)^* R' = R'\left(R''R'\right)^*.$$

Правила вывода:

$$\frac{R' = R''}{R'' = R'};\quad \frac{R' = R'', R'' = R'''}{R' = R'''};$$

$$\frac{R' = R''}{RR' = RR'', R'R = R''R, R + R' = R + R'', R'^* = R''^*};$$

$$\frac{R = R' + R''R, \lambda \not\subset R''}{R = R''^* R'},$$

где $\lambda \not\subset \varnothing$; $\lambda \not\subset \mathrm{A}$; $\dfrac{\lambda \not\subset R', \lambda \not\subset R''}{\lambda \not\subset R'R''}$;

$$\frac{\lambda \not\subset R'}{\lambda \not\subset R + R', \lambda \not\subset R' + R}.$$

Язык экстра-регулярных выражений (эрв)

Синтаксис:

- если R — рв, то R — эрв;
- если R', R'' — рв, то $R' \circ R''$ — эрв;
- если E', E'' — эрв, то $(E' + E'')$ — эрв (операция + при построении рв и эрв имеет самый низкий приоритет).

Семантика:

- $\Phi[\![R]\!]$ определено выше;

- $\Phi[\![E' + E'']\!] = \Phi[\![E']\!] \cup \Phi[\![E'']\!]$;
- $\Phi[\![R' \circ R'']\!] = \{\Phi x' \circ x'' | x' \in \Phi[\![R']\!] \wedge x'' \in \Phi[\![R'']\!]\}$.

Исчисление эквивалентности:

Аксиомы:

а) аксиомы исчисления эквивалентности регулярных выражений;

б) другие аксиомы:

$E = E$;

$\left(\left(E' + E''\right) + E'''\right) = \left(E' + \left(E'' + E'''\right)\right)$;

$E' + E'' = E'' + E'$; $E + E = E$, $\varnothing + E = E$;

$R \circ \lambda = R$;

$\left(R' + R''\right) \circ R = R' \circ R + R'' \circ R$;

$R \circ R'R'' = RR' \circ R''R'$;

$R' \circ R'' = R' \circ R''R''$;

$R' \circ R''^{*} = R' + R' \circ R''$;

$R \circ \varnothing = \varnothing$; $\varnothing \circ R = \varnothing$.

Правила вывода:

а) правила вывода исчисления эквивалентности регулярных выражений;

б) $\dfrac{R_1' = R_2', R_1'' = R_2''}{R_1' \circ R'' = R_2' \circ R_2''}$..

Очевидно, что для любого E множество $\Phi[\![E]\!]$ не более чем счётное множество экстра-слов.

Униформация и нормализация

Униформация двух экстра-слов.

Данная операция позволяет для любой пары экстра-слов с непустыми циклическими частями уравнять длины их ациклических и циклических частей. Пусть $b_1' \circ b_1''$ и $b_2' \circ b_2''$ — два экстра-слова в алфавите $A \equiv \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $b_1'' \neq \lambda$, $b_2'' \neq \lambda$, и $b_1' \in A^{\langle n_1' \rangle}$, $b_1'' \in A^{\langle n_1'' \rangle}$, $b_2' \in A^{\langle n_2' \rangle}$, $b_2'' \in A^{\langle n_2'' \rangle}$. Если $n_1' \neq n_2'$, то приведем длину слов b_1' и b_2' к общей длине $n' = \max(n_1', n_2')$ (предположим, что $n_1' < n_2'$):

— выполним эквивалентное преобразование первого экстра-слова: $b_1' \circ b_1'' = b_1'b_1'' \circ b_1''$, если длина слова $b_1'b_1''$ меньше n_2', то повторим это преобразование до тех пор, пока длина n_1 слова $b_1'b_1''...b_1''$ не станет большей или равной n_2';

— если $n_1 > n_2'$ и $b_1'' = \dot{b}_1''\ddot{b}_1''$, так, что при замене правого вхождения b_1'' на $\dot{b}_1''$ длина слова $b_1'b_1''...b_1''$ станет равной n_2', то выполним эквивалентное преобразование $b_1'b_1''...\dot{b}_1''\ddot{b}_1'' \circ \dot{b}_1''\ddot{b}_1'' \equiv \overline{b}_1' \circ \dot{b}_1''\ddot{b}_1'' = \overline{b}_1' \circ \ddot{b}_1''\dot{b}_1''$..

Приведем к общей длине слова $\overline{b}_1'' = \ddot{b}_1''\dot{b}_1''$ и b_2'' — вторые компоненты заданных экстра-слов, если $n_1'' \neq n_2''$. Пусть $n'' = \text{нок}(n_1'', n_2'')$, $k_1 = n'' \circ n_1''$, $k_2 = n'' \circ n_2''$. Выполним эквивалентные преобразования циклических частей в составе данных экстра-слов: $\overline{b}_1'\overline{b}_1'' = \overline{b}' \circ \underbrace{\overline{b}_1'' ... \overline{b}_1''}_{k_1 > 0 \text{ раз}}$, $b_2' \circ b_2'' = b_2' \circ \underbrace{b_2''...b_2''}_{k_2 > 0 \text{ раз}}$. В результате и циклические части экстра-слов станут одинаковой длины, что и требовалось получить.

Нормализация экстра-слов.

Данная операция предполагает эквивалентное преобразование заданного экстра-слова к минимально возможным длинам его ациклической и циклической частей. По-существу, это выполнение, пока возможно, эквивалентных преобразований ациклической и циклической частей экстра-слова, обратных тем, использованных при униформации экстра-слов: $b'b'' \circ bb'' = b' \circ b''b$ и $b' \circ \underbrace{b''... b''}_{k_1 > 1 \text{ раз}} = b' \circ b''$ для $b'' \neq \lambda$.

Множество всех бесконечных экстра-слов в любом конкретном алфавите $A \equiv \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ можно определить как экстра-регулярное выражение $A^* \circ AA^*$. В частном случае двоичного алфавита $A = B \cong \{0, 1\}$ экстра-слова можно интерпретировать как подмножества натуральных чисел: i-я двоичная буква ($i \in \mathbb{N}$) определяет принадлежность подмножеству числа i. При этом само множество всех подмножеств натуральных чисел, во-первых, включает все конечные подмножества $\mathbb{N}$ (т. е. множество $\mathbb{N}^{\{\ \}}$), являющиеся счётными, во-вторых, содержит счётное множество бесконечных (счётных) подмножеств и, в-третьих, считается ограниченной решеткой (по отношению включения). Эти свойства позволяют рассматривать экстра-слова в алфавите B как истинностные значения некоторой бесконечнозначной логики, для которой множество $B^* \circ (0B^* + 1B^*) = B^* \circ BB^*$ представляет ее область истинностных значений. В данной логике основные логические операции — конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, определяются как соответствующие поразрядные двоичные операции (первые две после униформации) над экстра-словами, где $T \cong \circ 1$ («абсолютная истина»), $F \cong \circ 1$ («абсолютная ложь»). Можно показать, что эта область истинностных значений замкнута относительно основных логических операций. Самостоятельный интерес представляет частный случай определения области истинностных значений, заданной экстра-регулярным выражением $B^* \circ 0 + B^* \circ 1 = B^* \circ B$.

Предложен более широкий подход к заданию областей истинностных значений при интерпретации логических языков, обеспечивающий выполнение всех аналогичных требований к таким областям.

Контекстно-свободные экстра-языки и контекстно-свободные экстра-грамматики

Контекстно-свободным экстра-языком в алфавите $A \equiv \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ назовем множество экстра-слов, ациклические и циклические части которых являются словами в $A \equiv \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ из формальных языков, заданных двумя контекстно-свободными грамматиками. Для циклической части соответствующий формальный язык не должен содержать пустого слова.

Возможен другой подход — задание общей грамматики в виде набора $G = \langle A, A_\text{н}, \alpha' \circ \alpha'', P \rangle$, где A, $A_\text{н}$ — терминальный и нетерминальный алфавиты, $A \cap A_\text{н} = \varnothing$; P — множество правил грамматики вида $\alpha \to a$, где

$\alpha \in A_н$, $a \in (A \cup A_н)^{\langle\rangle}$ (слово в объединенном алфавите); $\alpha' \circ \alpha''$ — аксиома грамматики, $\alpha'\alpha'' \in A_н$, буква $\circ$ не входит в объединенный алфавит.

Заданный грамматикой G контекстно-свободный экстра-язык $\mathbf{L}(G)$ выглядит как подмножество выводимых экстра-слов, не содержащих букв нетерминального алфавита. Экстра-слово в объединенном алфавите $A \cup A_н$ выводимо в грамматике G, если оно:

- является аксиомой грамматики;
- считается результатом подстановки правой части a некоторого правила грамматики $\beta \to a \in P$ вместо некоторого вхождения нетерминальной буквы β в некоторое выводимое экстра-слово. При этом сохраняется требование: из нетерминальной буквы α'' не должно выводиться пустое слово.

Экстра-подход к заданию областей истинностных значений в логике

Использование некоторой (не более, чем счётной мощности) ограниченной решетки $\langle X, \leq\rangle$ в качестве области истинностных значений, как в классической, так и в неклассических логиках [4, 5], имеет много очевидных достоинств, связанных с привычной взаимосвязью базовых логических операций: отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Наименьший F и наибольший T элементы такой решетки интерпретируются как абсолютные ложь и истина, а основные операции (конъюнкция и дизъюнкция) над логическими значениями определяются следующим образом:

$$x \wedge y \cong \max_{z \leq x, z \leq y} z;$$

$$x \vee y \cong \min_{z \geq x, z \geq y} z.$$

Это позволяет сохранить их собственные свойства (рефлексивность, коммутативность и ассоциативность) и взаимную дистрибутивность.

Что касается операции отрицания, то ее естественное определение $\neg x \cong \min_{x \vee y = \mathrm{T}} y$ (или $\neg x \cong \max_{x \wedge y = \mathrm{F}} y$) не всегда позволяет сохранить все привычные в бинарной логике свойства, например, двойственность конъюнкции и дизъюнкции, т. е. соотношение, известное как правило де Моргана: $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ (и, соответственно, $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$). В связи с этим, если необходимо сохранить указанные эквивалентности, то операция отрицания для некоторых областей истинности должна определяться иначе.

Предложены варианты задания областей истинностных значений, образующих некоторый подкласс $\mathbf{L} = \mathbf{L}' \cup \mathbf{L}'' \cup \mathbf{L}'''$ ограниченных решеток. Основу иерархической построения этих областей составляет простой принцип: области первичного уровня — ограниченные решетки, если новая область построена как композиция ограниченных решеток, то и результат построения также является ограниченной решеткой.

1. Множество $\mathbf{L}' \cong \{\mathbf{L}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — множество областей $\mathbf{L}_n \cong 0...n$, т. е. $\mathbf{L}_n \subset \mathbb{N}_0$, являющиеся начальными (из не менее двух элементов) интервалами множества натуральных чисел. Очевидно, что все $\mathbf{L}_n$ — ограниченные решетки с проекцией на них отношения порядка $\leq$ на множестве $\mathbb{N}_0$.

Отношение порядка во всех $\mathbf{L}_n$ обычное числовое: 0 — наименьшее, а n — наибольшее значения; операции: $\neg a \cong n - a$ (отрицание), $a' \wedge a'' \cong \min(a', a'')$ (конъюнкция), $a' \vee a'' \cong \max(a', a'')$ (дизъюнкция).

При $n = 1$ $\mathbf{L}_1 = B$, где $B \cong \{0, 1\}$ — область истинностных значений в классической бинарной логике «tercium non datur».

2. Множество $\mathbf{L}'' \cong \left\{\mathbf{L}_A \mid A \in \mathbf{L}^{\langle\,\rangle} \setminus \{\lambda\}\right\}$ — множество всевозможных областей $\mathbf{L}_A$, заданных непустыми кортежами $A \in \mathbf{L}^{\langle\rangle}$, $A \neq \lambda$ элементов множества $\mathbf{L}$. Заданная кортежем $A = \langle a_1, ..., a_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$ область $\mathbf{L}_A$ истинностных значений определяется как множество кортежей элементов соответствующих областей, т. е. как декартово произведение областей истинностных значений:

$$\mathbf{L}_{\langle a_1,...,a_n\rangle} \cong a_1 \times ... \times a_n = \left\{\left\langle \alpha_1, ..., \alpha_n \right\rangle \mid (\forall i \in 1..n)(\alpha_i \in a_i)\right\}.$$

Отношение порядка для кортежей $x_1 = \langle\alpha_{11}, ..., \alpha_{1n}\rangle$ и $x_2 = \langle\alpha_{21}, ..., \alpha_{2n}\rangle$ из области $\mathbf{L}_{\langle a_1,...,a_n\rangle}$ выглядит как:

$$x_1 \leq_{\mathbf{L}_{\langle a_1,...,a_n\rangle}} x_2 \cong (\forall i \in 1..n)(\alpha_{1i} \leq_{a_i} \alpha_{2i}).$$

Упрощенно, — так:

$$x_1 \leq x_2 \cong (\forall i \in 1..n)(\alpha_{1i} \leq \alpha_{2i}).$$

Хорошо известно, что декартово произведение ограниченных решеток тоже является ограниченной решеткой. Наименьшее и наибольшее значения в области $\mathbf{L}_{\langle a_1,...,a_n\rangle}$ — $F_{\mathbf{L}_{\langle a_1,...,a_n\rangle}} \cong \left\langle F_{a_1}, ..., F_{a_n}\right\rangle$, $F_{\mathbf{L}_{\langle a_1,...,a_n\rangle}} \cong \left\langle F_{a_1}, ..., F_{a_n}\right\rangle$. Логические операции над значениями области $\mathbf{L}_{\langle a_1,...,a_n\rangle}$ выглядят следующим образом:

$$\neg\left\langle \alpha_1, ..., \alpha_n\right\rangle \cong \left\langle \neg\alpha_1, ..., \neg\alpha_n\right\rangle;$$

$$\left\langle \alpha_{11}, ..., \alpha_{1n}\right\rangle \wedge \left\langle \alpha_{21}, ..., \alpha_{2n}\right\rangle \cong \left\langle \alpha_{11} \wedge \alpha_{21}, ..., \alpha_{1n} \wedge \alpha_{2n}\right\rangle;$$

$$\left\langle \alpha_{11}, ..., \alpha_{1n}\right\rangle \vee \left\langle \alpha_{21}, ..., \alpha_{2n}\right\rangle \cong \left\langle \alpha_{11} \vee \alpha_{21}, ..., \alpha_{1n} \vee \alpha_{2n}\right\rangle.$$

3. Множество $\mathbf{L}''' \cong \{\mathbf{L}_a \mid a \in \mathbf{L}\}$ — множество областей $\mathbf{L}_a$ для всех $a \in \mathbf{L}$, каждая из которых определяется как множество всех бесконечных экстра-кортежей элементов области a истинностных значений $\mathbf{L}_a \cong \left\{A' \circ A'' \mid A' \in a^{\langle\,\rangle} \wedge A'' \in a^{\langle\,\rangle} \setminus \{\lambda\}\right\}$.

Напомним, что неформально конкретный экстра-кортеж $A' \circ A''$ рассматривается как бесконечная последовательность элементов базового множества a, полученная бесконечной конкатенацией вида $A'A''A''... A''...$. Назовем A' — ациклической, а A'' — циклической частями экстра-кортежа. Известно, что с помощью эквивалентных преобразований любые два экстра-кортежа элементов одного и того же множества (в нашем случае — некоторой области $a \in \mathbf{L}$ истинностных значений) можно преобразовать так, что длины их ациклических и, соответственно, циклических частей будут попарно равными. Отсюда следует, что, если $\mathbf{L}$ — ограниченная решетка, то и $\mathbf{L}_a$ — ограниченная решетка (построение новой области сводится к применению декартова умножения ограниченных решеток). Для анализируемого способа построения областей отношение порядка для пары элементов области $\mathbf{L}_a$ истинностных значений $x_1 = \langle \alpha'_{11},...,\alpha'_{1n'} \rangle : \langle \alpha''_{11},...,\alpha''_{1n''} \rangle$ и $x_2 = \langle \alpha'_{21},...,\alpha'_{2n'} \rangle : \langle \alpha''_{21},...,\alpha''_{2n''} \rangle$ определяется следующим образом:

$$x_1 \le_{\mathbf{L}_a} x_2 \cong (\forall i \in 1..n')(\alpha'_{1i} \le_a \alpha'_{2i}) \wedge (\forall i \in 1..n'')(\alpha''_{1i} \le_a \alpha''_{2i}).$$

Упрощенно:

$$x_1 \le_{\mathbf{L}_a} x_2 \cong (\forall i \in 1..n')(\alpha'_{1i} \le_a \alpha'_{2i}) \wedge (\forall i \in 1..n'')(\alpha''_{1i} \le_a \alpha''_{2i}).$$

Наименьшим и наибольшим значениями в области $\mathbf{L}_a$ считаются $F_{\mathbf{L}_a} \cong F_a \circ F_a$ и $T_{\mathbf{L}_a} \cong T_a \circ T_a$. Логические операции над значениями области $\mathbf{L}_a$ после выравнивания длин ациклических и, соответственно, циклических частей экстра-кортежей выглядят как:

$$\neg_{\mathbf{L}_a} \langle \alpha'_1,...,\alpha'_{n'} \rangle \circ \langle \neg\alpha''_1,...,\neg\alpha''_{n''} \rangle \cong$$
$$\cong \langle \neg_a\alpha'_1,...,\neg_a\alpha'_{n'} \rangle \circ \langle \neg_a\alpha''_1,...,\neg_a\alpha''_{n''} \rangle;$$
$$\langle \alpha'_{11},...,\alpha'_{1n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{11},...,\alpha''_{1n''} \rangle \wedge_{\mathbf{L}_a} \langle \alpha'_{21},...,\alpha'_{2n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{21},...,\alpha''_{2n''} \rangle \cong$$
$$\cong \langle \alpha'_{11} \wedge_a \alpha'_{21},...,\alpha'_{1n'} \wedge_a \alpha'_{2n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{11} \wedge_a \alpha''_{21},...,\alpha''_{1n''} \wedge_a \alpha''_{2n''} \rangle;$$
$$\langle \alpha'_{11},...,\alpha'_{1n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{11},...,\alpha''_{1n''} \rangle \vee_{\mathbf{L}_a} \langle \alpha'_{21},...,\alpha'_{2n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{21},...,\alpha''_{2n''} \rangle \cong$$
$$\cong \langle \alpha'_{11} \vee_a \alpha'_{21},...,\alpha'_{1n'} \vee_a \alpha'_{2n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{11} \vee_a \alpha''_{21},...,\alpha''_{1n''} \vee_a \alpha''_{2n''} \rangle.$$

Заметим, что область $\mathbf{L}_{\{0,1\}}$ изоморфна некоторой ограниченной счётной решетке бесконечных подмножеств натуральных чисел, в которой операции дополнения до наибольшего элемента, пересечения и объединения интерпретируются как логические операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Разумеется, возможны и другие варианты определения отношения частичного порядка и, соответственно, логических операций для областей всех видов при сохранении к ним требований ограниченной решетки. В качестве интересного примера проанализируем некоторую область $\mathbf{L}_{\mathbf{L}_n}$, элементы которой можно рассматривать как правильные периодические дроби, представляющие дробные части неотрицательных рациональных чисел, не превышающих единицы, в $(n + 1)$-ой позиционной системе счисления. Таким образом, это экстра-слова в алфавите $A = \{a_1, ..., a_n\}$, где a_i — цифра с числовым эквивалентом $(i - 1)$, так что a_1 — цифра, представляющая ноль (при записи экстра-слов, в отличие от экстра-кортежей, не используются уголковые скобки и разделительные запятые).

Пусть экстра-слово $\circ a_n$ представляет рациональное число (единицу), а к множеству аксиом исчисления эквивалентности экстра-регулярных выражений добавлены новые аксиомы, отражающие указанную интерпретацию $R \circ a_1 = R$; $Ra_i \circ a_n = Ra_{i+1}$,, если $i < n$.

Найдем на $\mathbf{L}_{\mathbf{L}_n}$ отношение порядка $\le_{\mathbb{Q}}$, отражающее их интерпретацию как рациональных чисел, предварительно выполнив униформацию.

Пусть

$$x_1 = a'_{11}...a'_{1m'} \circ a''_{11}...a''_{1m''}; \;\; x_2 = a'_{21}...a'_{2m'} \circ a''_{21}...a''_{2m''},$$

тогда:

$$x_1 \le_{\mathbb{Q}} x_2 \cong (a'_{11}...a'_{1m'} \dot{<} a'_{21}...a'_{2m'}) \vee (a'_{11}...a'_{1m'} = a'_{21}...a'_{2m'}) \wedge$$
$$\wedge (a''_{11}...a''_{1m''} \dot{\le} a''_{21}...a''_{2m''}),$$

где

$$a_{11}...a_{1m} \dot{<} a_{21}...a_{2m} \cong$$
$$\cong (a_{11} < a_{21}) \vee (a_{11} = a_{21}) \wedge (a_{21}...a_{1m} \dot{<} a_{22}...a_{2m});$$
$$a_{11}...a_{1m} = a_{21}...a_{2m} \cong (\forall i \in 1..m)(a_{1i} = a_{2i});$$
$$a_{i'} < a_{i''} \cong i' < i''.$$

Очевидно, что $\langle \mathbf{L}_{\mathbf{L}_n}, \le \rangle$ — счётное линейно-упорядоченное множество с наименьшим $\circ 0$ и наибольшим $\circ 1$ элементами, т. е. удовлетворяет нашим требованиям к областям истинностных значений.

Отдельный интерес представляют логические операции для логических значений областей истинности из $\mathbf{L}''$ и $\mathbf{L}'''$, поиск которых при переходе к следующему уровню иерархии предполагает инверсию значения или замену операции на двойственную.

Так, для областей из $\mathbf{L}'''$ найдем операции $\overline{\wedge}, \overline{\vee}, \underline{\wedge}, \underline{\vee}$, которые для областей $a \in \mathbf{L}'$ выглядят как $\wedge$, $\vee$, $\wedge$, $\vee$:

$$\langle \alpha'_{11},...,\alpha'_{1n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{11},...,\alpha''_{1n''} \rangle \overline{\wedge}_{\mathbf{L}_a} \langle \alpha'_{21},...,\alpha'_{2n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{21},...,\alpha''_{2n''} \rangle \cong$$
$$\cong \langle \neg_a\alpha'_{11} \overline{\wedge}_a \neg_a\alpha'_{21},...,\neg_a\alpha'_{1n'} \overline{\wedge}_a \neg_a\alpha'_{2n'} \rangle \circ$$
$$\circ \langle \neg_a\alpha''_{11} \overline{\wedge}_a \neg_a\alpha''_{21},...,\neg_a\alpha''_{1n''} \overline{\wedge}_a \neg_a\alpha''_{2n''} \rangle;$$
$$\langle \alpha'_{11},...,\alpha'_{1n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{11},...,\alpha''_{1n''} \rangle \overline{\vee}_{\mathbf{L}_a} \langle \alpha'_{21},...,\alpha'_{2n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{21},...,\alpha''_{2n''} \rangle \cong$$
$$\cong \langle \neg_a\alpha'_{11} \overline{\vee}_a \neg_a\alpha'_{21},...,\neg_a\alpha'_{1n'} \overline{\vee}_a \neg_a\alpha'_{2n'} \rangle \circ$$
$$\circ \langle \neg_a\alpha''_{11} \overline{\vee}_a \neg_a\alpha''_{21},...,\neg_a\alpha''_{1n''} \overline{\vee}_a \neg_a\alpha''_{2n''} \rangle.$$
$$\langle \alpha'_{11},...,\alpha'_{1n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{11},...,\alpha''_{1n''} \rangle \underline{\wedge}_{\mathbf{L}_a} \langle \alpha'_{21},...,\alpha'_{2n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{21},...,\alpha''_{2n''} \rangle \cong$$
$$\cong \langle \alpha'_{11} \underline{\vee}_a \alpha'_{21},...,\alpha'_{1n'} \underline{\vee}_a \alpha'_{2n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{11} \underline{\vee}_a \alpha''_{21},...,\alpha''_{1n''} \underline{\vee}_a \alpha''_{2n''} \rangle;$$
$$\langle \alpha'_{11},...,\alpha'_{1n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{11},...,\alpha''_{1n''} \rangle \underline{\vee}_{\mathbf{L}_a} \langle \alpha'_{21},...,\alpha'_{2n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{21},...,\alpha''_{2n''} \rangle \cong$$
$$\cong \langle \alpha'_{11} \underline{\wedge}_a \alpha'_{21},...,\alpha'_{1n'} \underline{\wedge}_a \alpha'_{2n'} \rangle \circ \langle \alpha''_{11} \underline{\wedge}_a \alpha''_{21},...,\alpha''_{1n''} \underline{\wedge}_a \alpha''_{2n''} \rangle.$$

Нумерация всех определенных выше областей истинности составляет:

$$\nu_{\mathbf{L}}(a) \cong \begin{cases} \nu_{\mathbf{L}'}(a) \cdot 3 + 0, \text{ если } a \in \mathbf{L}'; \\ \nu_{\mathbf{L}''}(a) \cdot 3 + 1, \text{ если } a \in \mathbf{L}''; \\ \nu_{\mathbf{L}'''}(a) \cdot 3 + 2, \text{ если } a \in \mathbf{L}'''. \end{cases}$$
$$\nu_{\mathbf{L}'}(\mathbf{L}_n) \cong n - 1;$$
$$\nu_{\mathbf{L}''}(\mathbf{L}_{\langle a_1,...,a_n \rangle}) \cong < \nu_{\mathbf{L}}(a_1),...,\nu_{\mathbf{L}}(a_n) > -1;$$
$$\nu_{\mathbf{L}'''}(\mathbf{L}_a) \cong \nu_{\mathbf{L}}(a).$$

Поскольку множество $\mathbf{L}$ — счётное, и все области истинностных значений из $\mathbf{L}$ не более, чем счётной мощности, то и множество $\overline{\mathbf{L}} \cong \bigcup_{a \in \mathbf{L}} a$ всех истинностных значений из всех областей из $\mathbf{L}$ также счётной мощности.

Заключение

При анализе языков предикатов первого и более высоких порядков с описанными областями истинностных значений естественно сохранить существующий подход к определению интерпретации традиционных кванторов, как к значениям сверток логических формул по операциям конъюнкции (квантор всеобщности) и дизъюнкции (квантор существования) для всей области значений операторной переменной квантора. Аналогичный подход к определению семантики кванторов как сверток по новым операциям требует отдельного изучения.

Для предложенных в работе областей истинностных значений (прежде всего это относится к областям из $\mathbf{L}'''$, поскольку для других областей эти вопросы решаются тривиально), есть привычные, удобные средства формального выделения в них подобластей (регулярных, контекстно-свободных и т.д.), а также известны эффективные алгоритмы распознавания принадлежности истинностных значений этим подобластям. Многоуровневые системы областей логических значений для нетрадиционных логик могут найти и непосредственное практическое применение при постановке и решении новых задач анализа сложных иерархических систем, в том числе и систем искусственного интеллекта.

Принятые обозначения

• $\cong$ — «равно по определению»;

• $\approx$ — «логически эквивалентно»;

• $\mathbb{N} \cong \{1, 2, 3, ...\}$ — множество натуральных чисел;

• $\mathbb{N}_0 \cong \{0, 1, 2, 3, ...\}$ — множество натуральных чисел с нулём;

• если t — терм; P — логическая формула; $x_1, ..., x_n$ — переменные, то $\{t\,|_{x_1,...,x_n} P\}$ — класс всех объектов $[a_1/x_1, ..., a_n/x_n]t$, т. е. полученных подстановками значений $a_1, ..., a_n$ вместо свободных вхождений переменных из множества $\{x_1, ..., x_n\}$ в терм t, таких, что

$$[a_1/x_1,...,a_n/x_n]t \in \{t\,|_{x_1,...,x_n} P\} \approx [a_1/x_1,...,a_n/x_n]P.$$

Задание множества операторных переменных может быть опущено, если оно является либо множеством всех свободных переменных терма t, либо множеством всех свободных переменных формулы P;

• $a'..a'' \cong \{a \mid a' \leq_A a \wedge a \leq_A a''\}$ — подмножество-диапазон элементов линейно-упорядоченного (не более чем счётного) множества A, такого, что $a, a'' \in A$;

• $x{:}1...n \to A$ — кортеж длины $|x| \cong n$, $n \in \mathbb{N}_0$ элементов множества A, обозначаемый как $\langle a_1, ..., a_n\rangle$, где $(\forall i \in 1...n)(a_i = x(i))$;

• $< a', a'' >_2 \cong \nu_{\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}\left(\langle a', a''\rangle\right) = \dfrac{(a'+a'')(a'+a''+1)}{2}$ — номер упорядоченной пары натуральных чисел $a, a'' \in \mathbb{N}_0$ согласно «диагональному» методу нумерации;

• $\nu_A(a)$ — номер элемента a счётного рекурсивно-перечислимого множества A согласно определенному μ'_A методу «естественной» нумерации $\nu_A{:}A \leftrightarrow \mathbb{N}_0$;

• $\nu_{\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}\left(\langle a', a''\rangle\right) \cong < a', a'' >_2 = \dfrac{(a'+a'')(a'+a''+1)}{2}$ — номер упорядоченной пары натуральных чисел $a, a'' \in \mathbb{N}_0$ согласно диагональному методу нумерации;

• $\mu_A{:}A \to \mathbb{N}_0 \cup \{\omega\}$ — мультимножество на базе множества A не более чем счетной мощности. Для всех $a \in A$ $\mu_A(a)$ — кратность вхождения элемента в мультимножество; ω означает бесконечную (счетную) кратность, $(\forall i \in \mathbb{N}_0)(i < \omega)$.

Полагаем также, что $(\forall a \notin A)$ $(\mu(a) = 0)$, что позволяет естественно доопределить объединение, пересечение и другие известные операции для мультимножеств на базе различных множеств;

• $|\mu_A| \cong \sum_{a\in A} \mu_A(a)$ — мощность мультимножества μ_A (если $|\mu_A| \in \mathbb{N}_0$, то мультимножество μ_A называется комплектом). Если все элементы базового множества имеют бесконечную кратность ω вхождения в некоторое мультимножество, то мощность последнего тоже равна $\aleph_0$ (счетное мультимножество);

• $\mu'_{A'} \subseteq \mu''_{A''} \approx \left(\forall a \in A' \cup A''\right)\left(\mu'_{A'}(a) \leq \mu''_{A''}\right)$ — отношение частичного порядка (включения) для мультимножеств $\mu'_{A'}: A' \to \mathbb{N}_0 \cup \{\omega\}$ и $\mu''_{A''}: A'' \to \mathbb{N}_0 \cup \{\omega\}$ (ω — «бесконечно большое натуральное число»).

Для наиболее часто используемых видов конечных наборов элементов множеств, множеств конечных наборов и их нумерации [6] используются следующие обозначения:

• $\{a_1, ..., a_n\}$ — конечное подмножество элементов из n элементов множества A, $(\forall i \in 1...n)(a_i \in A)$ (неупорядоченный набор элементов без повторений);

• $A^{\{n\}}$ — множество всех подмножеств из n элементов множества A, $n \in \mathbb{N}_0$;

• $A^{\{\,\}} \cong \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A^{\{n\}}$ — множество всех конечных подмножеств элементов множества A (если A — конечное множество, то $A^{\{\,\}} = 2^A$).

Аналогично:

• $[a_1, ..., a_n]$ — конечное (линейно) упорядоченное подмножество элементов из n элементов множества A, $(\forall i \in 1...n)(a_i \in A)$ (упорядоченный набор элементов без повторений);

• $A^{[n]}$ — множество всех упорядоченных подмножеств из n элементов множества A, $n \in \mathbb{N}_0$;

• $A^{[\,]} \cong \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A^{[n]}$— множество всех конечных упорядоченных подмножеств элементов множества A;

• $\langle a_1, ..., a_n\rangle$ — кортеж, конечная последовательность элементов из n элементов множества A, $(\forall i \in 1...n)(a_i \in A)$

(упорядоченный набор элементов, возможно с повторениями);

• $A^{\langle n\rangle}$ — множество всех кортежей из n элементов множества A, $n \in \mathbb{N}_0$;

• $A^{\langle\ \rangle} \cong \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A^{\langle n\rangle}$ — множество всех кортежей элементов множества A;

• $(a_1, ..., a_n)$ — комплект, конечное мультимножество элементов из n элементов множества A, $(\forall i \in 1...n)(a_i \in A)$ (неупорядоченный набор элементов с повторениями);

• $A^{(n)}$ — множество всех комплектов из n элементов множества A, $n \in \mathbb{N}_0$;

• $A^{(\ )} \cong \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A^{(n)}$ — множество всех комплектов элементов множества A.

Обозначения при задании «естественной» нумерации элементов (свободного) объединения $\overline{A} = \bigcup_{i\in 1..n} A_i$, $n \in \mathbb{N}$ конечного семейства $\{A_i|i \in 1... n\}$ попарно не пересекающихся $(\forall i', i'' \in 1..n)(i' \neq i'' \supset A_{i'} \cap A_{i''} = \varnothing)$ счётных нумерованных множеств:

если $a \in A_i$, то $\nu_{\overline{A}}(a) \cong \nu_{A_i}(a)n + (i-1)$, а для нумерации элементов (свободного) объединения $\overline{A} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} A_i$ рекурсивно-перечислимого (нумерованного) семейства $\{A_i|i \in \mathbb{N}_0\}$ попарно не пересекающихся $(\forall i', i'' \in \mathbb{N}_0)(i' \neq i'' \supset A_{i'} \cap A_{i''} = \varnothing)$ счётных нумерованных множеств:

если $a \in A_i$, то $\nu_{\overline{A}}(a) \cong < i, \nu_{A_i}(a) >_2$.

Обозначения при задании нумераций кортежей элементов нумерованных множеств для $n > 2$:

$$< a_1, ..., a_n >_n \cong \nu_{\mathbb{N}_0^{\langle n\rangle}}(\langle a_1, ..., a_n\rangle) = << a_1, ..., a_{n-1} >_{n-1} >_2;$$

$$< a_1, ..., a_n > \cong \nu_{\mathbb{N}_0^{\langle\ \rangle}}(\langle a_1, ..., a_n\rangle) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } n = 0; \\ << a_1, ..., a_{n-1} >, a_n >_2 + 1, \text{ если } n > 0. \end{cases}$$

Литература

1. **Криницкий Н.А.** Алгоритмы и роботы. М.: Радио и связь, 1983.
2. **Braun V., Immink K.S.** An Enumerative Coding Technique for DC-Free Runlength-Limited Sequences // IEEE Trans. Commun. 2000. V. 48. No. 12. Pp. 2024—2031.
3. **Manna Z.** Mathematical Theory of Computation. N.-Y.: McGraw-Hill Book Company, 1974,
4. **Карпенко А.С.** Неклассические логики versus классической // Логико-философские штудии. 2005. Вып. 3. С. 48—73.
5. **Яблонский С.В.** О предельных логиках // Доклады АН СССР. 1958. Т. 118. №. 4. С 657—660.
6. **Фальк В.Н.** Об одном подходе к эффективной нумерации рекурсивных множеств конструктивных объектов // Вестник МЭИ. 2013. № 4. С. 209—215.

References

1. **Krinitskiy N.A.** Algoritmy i Roboty. M.: Radio i Svyaz, 1983. (in Russian).
2. **Braun V., Immink K.S.** An Enumerative Coding Technique for DC-Free Runlength-Limited Sequences. IEEE Trans. Commun. 2000;48;12:2024—2031.
3. **Manna Z.** Mathematical Theory of Computation. N.-Y.: McGraw-Hill Book Company, 1974,
4. **Karpenko A.S.** Neklassicheskie Logiki Versus Klassicheskoy. Logiko-filosofskie Shtudii. 2005;3:48—73. (in Russian).
5. **Yablonskiy S.V.** O Predel'nykh Logikakh. Doklady AN SSSR. 1958;118;4:657—660. (in Russian).
6. **Fal'k V.N.** Ob Odnom Podkhode k Effektivnoy Numeratsii Rekursivnykh Mnozhestv Konstruktivnykh Ob′ektov. Vestnik MEI. 2013;4:209—215. (in Russian).

Сведения об авторе:

Фальк Вадим Николаевич — доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта НИУ «МЭИ», e-mail: falkvn@yandex.ru

Information about author:

Falk Vadim N. — Dr.Sci. (Techn.), Professor of Applied Mathematics and Artificial Intelligence Dept., NRU MPEI, e-mail: falkvn@yandex.ru

Работа выполнена при поддержке: РФФИ (грант № 18-01-00548)
The work is executed at support: RFBR (Grant No. 18-01-00548)

Статья поступила в редакцию: *09.11.2019*
The article received to the editor: *09.11.2019*