УДК 621.396.61

Исследование условий самовозбуждения многокаскадных усилителей и кольцевых автогенераторов методами *D*-разбиения

М. В. Балашков, В. М. Богачев*

Разработан общий подход к построению диаграмм *D*-разбиения для свободных параметров, входящих в харак-теристическое уравнение с комплексными коэффициентами полиномиально, что соответствует общему случаю систем с сосредоточенными постоянными заданной размерности. В отличие от частотного критерия Неймарка детерминантный критерий Эрмита–Гурвица применим при произвольных степенях свободных параметров, обеспечивая аналитический расчет границ *D*-разбиения. Строго обосновано положение о соответствии границы *D*-разбиения равенству нулю старшего детерминанта матрицы Эрмита–Гурвица. Выявлена вспомогательная роль младших детерминантов в решаемой задаче. Методика исследования проиллюстрирована примерами анализа многокаскадных усилителей и автогенераторов.

Ключевые слова: методы *D*-разбиения по Неймарку и Эрмиту–Гурвицу, резонансные многокаскадные динамические системы.

Введение

Метод *D*-разбиения, основы которого заложены А. И. Вышнеградским, еще на заре развития теории автоматического регулирования (1876 г.) получил широкое распространение в теории и практике проектирования динамических систем после опубликования фундаментальных работ Ю. И. Неймарка. Следуя [1], в большинстве работ рассматривается *D*-разбиение плоскости одного комплексного либо двух вещественных параметров, входящих в уравнение линейно [2 — 9]. Цель статьи: на примере многокаскадных резонансных усилителей и кольцевых автогенераторов разработать методику решения задачи *D*-разбиения для полиномиального вхождения свободных параметров в характеристическое уравнение, что соответствует общему случаю динамических систем с сосредоточенными постоянными.

Решаемой задаче соответствует полиномиальное позиционирование вектора параметров $K = [k_1, k_2, ..., k_m]$ в характеристическом уравнении с комплексными коэффициентами [8, 9]:

$$H(p, K) = h_n(K)p^n + h_{n-1}(K)p^{n-1} + ... + h_0(K). \quad (1)$$

Уравнение границы *D*-разбиения в параметрической форме получается из (1) подстановкой $p = j\omega$ и разделением уравнения на вещественную и мнимую части:

* BogachevVM@mail.ru

$$\begin{cases} H_{\text{в}}(\omega, K) = a_n(K)\omega^n + a_{n-1}(K)\omega^{n-1} + ... + a_0(K) = 0\,; \\ H_{\text{м}}(\omega, K) = b_n(K)\omega^n + b_{n-1}(K)\omega^{n-1} + ... + b_0(K) = 0\,. \end{cases} \qquad (2)$$

Как показано в [10], система (2) разрешима в параметрической форме (по Неймарку), если хотя бы один из параметров входит в систему линейно. В противном случае следует применять теорему Эрмита–Гурвица, аналог теоремы Рауса–Гурвица о локализации корней комплексных полиномов вида (1) относительно мнимой оси комплексной плоскости [11 — 13].

Теорема 1. *Динамическая система с комплексным характеристическим полиномом* $H_{\text{в}}(p)$*, для которого согласно* (2) $H(j\omega) = H_{\text{в}}(\omega) + jH_{\text{м}}(\omega)$*, причем* $b_n \neq 0$ *и полиномы* $H_{\text{в}}(\omega)$ *и* $H_{\text{м}}(\omega)$ *взаимно просты, устойчива, если все четные детерминанты матрицы Эрмита–Гурвица порядка* $2n$

$$\mathbf{H}(K) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

положительны $\Delta_{2k} > 0,\ k = \overline{1,n}$. *Число правых корней полинома равно числу перемен знака в последовательности главных детерминантов матрицы Эрмита–Гурвица:*

$$r = V(1, \Delta_2, \Delta_4, \ldots, \Delta_{2n}),\ \left(\Delta_{2n} \neq 0\right). \qquad (4)$$

При этом, если в последовательности (4) *имеется определитель, равный нулю*

$$\Delta_{2h} = 0,\ h < n,\ (\Delta_{2h} \neq 0), \qquad (5)$$

то при подсчете числа r *полагают* $\operatorname{sign}\Delta_{2h} = \operatorname{sign}\Delta_{2h-2}$. *Точку, удовлетворяющую условиям* (5), *классифицируют как критическую или особую точку 1-го типа.*

Условие $\Delta_{2h} = 0$ *определяет особую точку 2-го типа. В этом случае полиномы* $H_{\text{в}}(\omega)$ *и* $H_{\text{м}}(\omega)$ *имеют общий вещественный множитель* $F(\omega)$ *порядка* $\mu < n$ *и исходный полином* $H(j\omega)$ *можно записать в виде произведения* $H(j\omega) = \tilde{H}(j\omega)F(\omega)$. *Здесь* $\tilde{H}(j\omega)$ *— полином порядка* $\nu = \nu - \mu$, *его старший детерминант* $\Delta_{2\nu} \neq 0$ *и число правых корней определяются по теореме 1. Алгоритм локализации корней полинома* $F(\omega)$ *разработан в* [13].

В [8, 9, 11] при анализе многочисленных примеров подмечено, что собственно границей D-разбиения является равенство нулю старшего детерминанта: $\Delta_{2n}(K) = 0$. Докажем это положение и поясним роль младших детерминантов.

Отметим, что решение задачи D-разбиения приводит к необходимости раскрытия определителей высоких порядков. Для этих целей рекомендуется использовать интерполяционные методы, основанные на многомерном дискретном преобразовании Фурье (ДПФ) [14, 15].

Многокаскадный резонансный усилитель

Рассмотрим модель многокаскадного резонансного усилителя на полевых транзисторах с одиночными параллельными контурами (рис. 1), состоящую из полевого транзистора, нагруженного со стороны выхода на проводимость контура с неполным включением (выделен штриховыми линиями).

Входную и выходную емкости транзистора отнесем к соответствующим контурам, емкость «затвор – сток» $C_{\text{зс}} \neq 0$ учтем как элемент внутренней обратной связи. При этом Y-параметры полевого транзистора:

$$Y_{11} = j\omega C_{\text{зс}},\ Y_{12} = -j\omega C_{\text{зс}},\ Y_{21} = S - j\omega C_{\text{зс}},\ Y_{22} = j\omega C_{\text{зс}}, \qquad (6)$$

Укороченную проводимость контура запишем в виде:

$$Y_{\text{к}} = G(1 + pT + j\alpha), \qquad (7)$$

где G — проводимость при резонансе; $T = 2Q/\omega_0$ — постоянная времени контура; $\alpha = |\omega_{\text{к}} - \omega_0|$ — обобщенная расстройка контура относительно опорной частоты ω_0.

С учетом (6), (7), запишем матрицу проводимостей одиночного каскада, нагруженного на проводимость контура $Y_{\text{к}}$ с коэффициентами включения m_1 и m_2:

$$\begin{aligned} Y &= \begin{bmatrix} Y_{11} & \dfrac{m_1}{m_2} Y_{12} \\ Y_{21} & \dfrac{m_1}{m_2} Y_{22} + \dfrac{1}{m_1 m_2} y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} j\omega C_{\text{зс}} & -\chi j\omega C_{\text{зс}} \\ S - j\omega C_{\text{зс}} & \chi j\omega C_{\text{зс}} + \tilde{G}(1 + \overline{p} + j\alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned} \qquad (8)$$

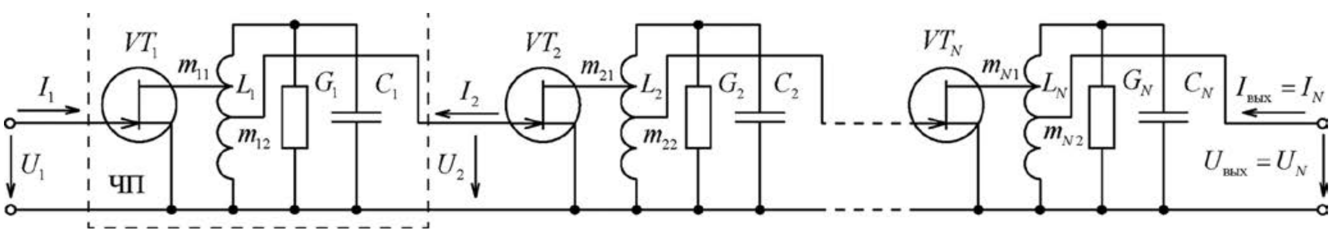


Рис. 1. Модель многокаскадного резонансного усилителя

Здесь $\chi = m_1/m_2$ — отношение коэффициентов включения; $\tilde{G} = G/(m_1 m_2)$ — нормированная проводимость при резонансе; $\overline{p} = pT$ — нормированный оператор дифференцирования.

При каскадном соединении четырехполюсников удобно использовать A-форму параметров, т.к. A-матрица каскадно соединенных четырехполюсников равна произведению A-матриц этих четырехполюсников. Элементы матриц A и Y связаны известными формулами:

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\dfrac{1}{Y_{21}} \\ -\dfrac{\Delta Y}{Y_{21}} & -\dfrac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix}; \ \Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}. \qquad (9)$$

При определении параметров A-матрицы ток I_2 считается вытекающим из четырехполюсника.

Пренебрегая в (8) частотной зависимостью элемента $j\omega C_{зс}$ в окрестности частоты ω_0, т.е. полагая $j\omega C_{зс} \approx j\omega_0 C_{зс} = jB_0$, на основании (8), (9) получим:

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{j\chi b_0 + 1 + \overline{p} + j\alpha}{K_0 - jb_0} & -\dfrac{1}{\tilde{G}}\dfrac{1}{K_0 - jb_0} \\ -\tilde{G}\dfrac{jb_0(1 + \overline{p} + j\alpha) + j\chi b_0 K_0}{K_0 - jb_0} & -\dfrac{jb_0}{K_0 - jb_0} \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

где $K_0 = S/\tilde{G}$ — коэффициент передачи на частоте ω_0 при $\alpha_i = 0$ и $C_{зс} = 0$; $b_0 = B_0/\tilde{G}$ — нормированная проводимость элемента ОС.

Для получения A-матрицы N-каскадного усилителя необходимо последовательно перемножить A-матрицы всех каскадов:

$$A^{(N)} = A_1 A_2 \ldots A_N. \qquad (11)$$

Далее для определенности остановимся на рассмотрении двух- и четырехкаскадных резонансных усилителей. Причем подробные выкладки проделаем только для двухкаскадной схемы, а для четырехкаскадной ограничимся приведением конечных результатов.

Считая, что в двухкаскадном усилителе (при $C_{зс} = 0$) выбрана расстройка между контурами, обеспечивающая симметричную амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) относительно средней частоты контуров ω_0 (при этом $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$) и, принимая $\chi = 1$, найдем коэффициент передачи усилителя по напряжению:

$$K_U^{(2)} = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{1}{A_{11}^{(2)}} = \frac{(K_0 - jb_0)^2}{\overline{p}^2 + (2 + 3jb_0)\overline{p} + 1 + \alpha^2 + b_0\alpha - b_0^2 + jb_0(K_0 + 3)}. \qquad (12)$$

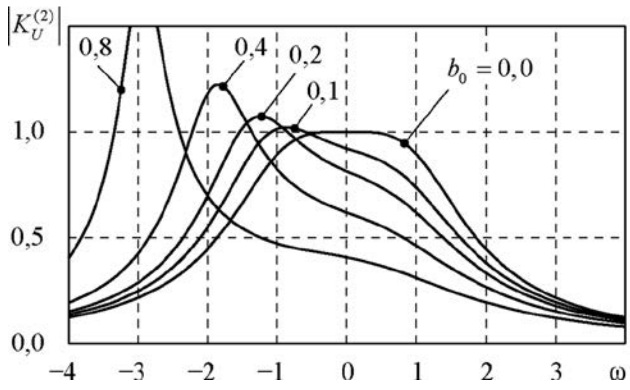
Аналогичным образом для четырехкаскадного усилителя, составленного из двух идентичных пар с симметричной расстройкой контуров, имеем:

$$K_U^{(4)} = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{1}{A_{11}^{(4)}} = \frac{(K_0 - jb_0)^4}{\overline{p}^4 + h_1\overline{p}^3 + h_2\overline{p}^2 + h_3\overline{p} + h_4}, \qquad (13)$$

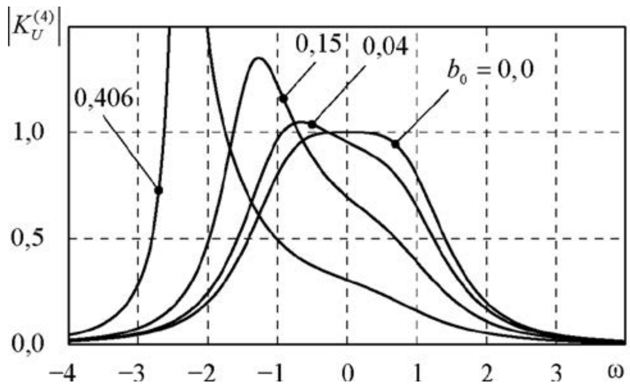
где

$$\begin{cases} h_1 = 7jb_0 + 4; \\ h_2 = -15b_0^2 + (3jK_0 + \alpha + 21j)b_0 + 2(\alpha^2 + 3); \\ h_3 = -10jb_0^3 - [10(K_0 + 3) - 4j\alpha]b_0^2 + \\ +(6jK_0 + 7j\alpha^2 + 2\alpha + 21j)b_0 + 4(\alpha^2 + 1); \\ h_4 = b_0^4 - 2(3jK_0 + \alpha + 5j)b_0^3 - \\ -[K_0^2 - 2K_0(j\alpha - 5) + 3\alpha^2 - 4j\alpha + 15]b_0^2 + \\ +(\alpha^2 + 1)(3jK_0 + \alpha + 7j)b_0 + (\alpha^2 + 1)^2. \end{cases}$$

На рис. 2 приведены семейства амплитудно-частотных характеристик, рассчитанные по формулам (12), (13) при различных значениях проводимости элемента обратной связи b_0. Как видим, при одинаковых значениях параметров α и K_0 искажения АЧХ с ростом b_0 происходят быстрее при увеличении числа каскадов. Так, граница устойчивости в двух- и четырехкаскадных усилителях соответствует значениям b_0 = 0,8 и b_0 = 0,406 То же касается критических значений b_0 по допустимым искажениям формы АЧХ: b_0 = 0,03 и b_0 = 0,01, соответственно. Полную картину вариации



а



б

Рис. 2. Нормированные частотные характеристики двухкаскадного (*а*) и четырехкаскадного (*б*) резонансных усилителей при $\alpha = 1$, $K_0 = 3$ и различных значениях параметра b_0

частотных характеристик (амплитудных и фазовых) в пространстве параметров α, K_0, b_0 можно оценить по формулам (12), (13).

Перед тем как приступить к составлению характеристического уравнения, сделаем одно замечание. Так как наряду с резонансными усилителями существенный интерес представляют кольцевые автогенераторы, у которых выходной каскад замкнут на вход, то далее будем рассматривать два типа систем: разомкнутые и замкнутые, т.е. многокаскадные усилители и кольцевые автогенераторы.

Укороченные операторные характеристические уравнения и устойчивость многокаскадных усилителей

Чтобы получить укороченное операторное характеристическое уравнение разомкнутой системы следует предположить, что при отсутствии сигнала на входе $\dot{U}_{\text{вх}} = 0$ напряжение на выходе $\dot{U}_{\text{вых}} \neq 0$ не равно нулю. Отсюда следует, что искомое уравнение совпадает со знаменателем коэффициента передачи (12):

$$\begin{gathered} H_{\text{у}}^{(2)}(p) = \overline{p}^2 + (2 + 3jb_0)\overline{p} + 1 + \alpha^2 + \\ + b_0\alpha - b_0^2 + jb_0(K_0 + 3) = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Аналогичным образом из (13) получаем характеристическое уравнение четырехкаскадного усилителя:

$$H_{\text{у}}^{(4)}(p) = \overline{p}^4 + h_1\overline{p}^3 + h_2\overline{p}^2 + h_3\overline{p} + h_4 = 0. \tag{15}$$

При построении D-разбиения выберем в качестве параметров плоскость (b_0; K_0). Заменим в (14) $\overline{p}$ на $j\overline{\omega}$ и разделим полученное уравнение на действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} -\overline{\omega}^2 - 3b_0\overline{\omega} + 1 + \alpha^2 + b_0\alpha - b_0^2 = 0; \\ 2\overline{\omega} + b_0(K_0 + 3) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Параметр K_0 входит в характеристическое уравнение системы (14) линейно, поэтому для определения областей устойчивости можно воспользоваться частотным методом Неймарка. Разрешая (16) относительно K_0 и b_0, считая K_0 и b_0 вещественными положительными величинами, получим уравнение границы D-разбиения в параметрической форме:

$$\begin{cases} b_0 = 0,5\left[(\alpha - 3\overline{\omega}) - \sqrt{5(\alpha^2 + \overline{\omega}^2) - 6\alpha\overline{\omega} + 4}\right]; \\ K_0 = -(2\overline{\omega} + 3b_0)/b_0. \end{cases} \tag{17}$$

Альтернативный подход к решению задачи D-разбиения заключается в раскрытии старшего определителя матрицы Эрмита–Гурвица:

$$\begin{gathered} \Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & b_0(K_0+3) & 0 \\ -1 & -3b_0 & 1+\alpha^2+b_0\alpha-b_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b_0(K_0+3) \\ 0 & -1 & -3b_0 & 1+\alpha^2+b_0\alpha-b_0^2 \end{vmatrix} = \\ = -K_0^2 b_0^2 + 4(\alpha^2 + \alpha b_0 + 1) + 5b_0^2 = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Из соотношения (18), считая $K_0 \geq 0$, получим прямую формулу для границы D-разбиения:

$$K_0 = \frac{\sqrt{5b_0^2 + 4(\alpha^2 + b_0\alpha + 1)}}{b_0}. \tag{19}$$

Приступая к исследованию устойчивости четырехкаскадного усилителя заметим, что параметры b_0 и K_0 входят в характеристическое уравнение (15) полиномиально, причем в степенях, превышающих единицу. В связи с этим для аналитического построения D-разбиения, следуя [10], используем критерий Эрмита–Гурвица. Принимая $\alpha = 1$ и раскрывая определитель матрицы $\mathbf{H}(b_0, K_0)$ методом двумерной ДПФ-интерполяции [15], имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_8 = {} & 81b_0^8K_0^8 + 72b_0^8K_0^7 + (110b_0^{10} + 12b_0^9 - 1066b_0^8 - \\ & -1860b_0^7 - 4792b_0^6)K_0^6 + (40b_0^{10} - 256b_0^9 - 1448b_0^8 - \\ & -2664b_0^7 - 3904b_0^6)K_0^5 + (37b_0^{12} + 12b_0^{11} - 1152b_0^{10} - \\ & -1388b_0^9 - 3255b_0^8 + 6724b_0^7 + 15752b_0^6 + 21664b_0^5 + \\ & +20544b_0^4)K_0^4 - (24b_0^{12} + 96b_0^{11} + 1720b_0^{10} + 1800b_0^9 + \\ & +6888b_0^8 - 1688b_0^7 + 3936b_0^6 - 6656b_0^5 + 2560b_0^4)K_0^3 - \\ & -(486b_0^{12} + 504b_0^{11} + 4326b_0^{10} + 3440b_0^9 + 23240b_0^8 + \\ & +29376b_0^7 + 93984b_0^6 + 93696b_0^5 + 153856b_0^4 + \\ & +72704b_0^3 + 73728b_0^2)K_0^2 + (1944b_0^{10} + 1368b_0^9 + 11168b_0^8 - \\ & -3456b_0^7 + 16768b_0^6 - 20224b_0^5 + 153606b_0^4 - 14336b_0^3 + \\ & +8192b_0^2)K_0 + (729b_0^{12} + 972b_0^{11} + 10800b_0^{10} + 12640b_0^9 + \\ & +65440b_0^8 + 62848b_0^7 + 201984b_0^6 + 154624b_0^5 + 326656b_0^4 + \\ & +172032b_0^3 + 245760b_0^2 + 65536b_0 + 65536) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Как видим, определитель является полиномом восьмой степени по переменной K_0 и 12-й степени по b_0. Таким образом, для построения границы D-разбиения уравнение $\Delta_8 = 0$ целесообразно рассматривать как полином восьмой степени по K_0 с коэффициентами, зависящими от b_0, и граница D-разбиения определяется положительными корнями этого полинома. Отрицательные корни отбрасываем как не соответствующие физической постановке задачи.

Диаграммы D-разбиения для двух- и четырехкаскадного усилителей приведены на рис. 3 сплошными линиями: в первом случае диаграмма состоит из двух областей $D_0^{(\text{р})}$ и $D_1^{(\text{р})}$, во втором — из трех областей $D_0^{(\text{р})}$, $D_0^{(\text{р})}$ и $D_2^{(\text{р})}$, причем нижняя граница является границей устойчивости.

Укороченные операторные характеристические уравнения и условия самовозбуждения кольцевых автогенераторов

При замыкании системы имеем $\dot{U}_{\text{вх}} = \dot{U}_{\text{вых}}$. С учетом этого условия укороченное характеристическое уравнение замкнутой системы представляет собой сумму полиномов числителя и знаменателя коэффициента передачи (12):

$$H_{\text{у}}^{(2)}(p) = \overline{p}^2 + (2+3jb_0)\overline{p} + \alpha^2 + b_0\alpha + 1 + 3jb_0(K_0+1) - K_0^2 = 0. \tag{21}$$

Как и ранее, полагаем $\overline{p} = j\overline{\omega}$ и разбиваем уравнение на вещественную и мнимую части

$$\begin{cases} -\overline{\omega}^2 - 3b_0\overline{\omega} + \alpha^2 + b_0\alpha + 1 - K_0^2 = 0, \\ 2\overline{\omega} + 3b_0(K_0+1) = 0, \end{cases} \tag{22}$$

и разрешаем полученную систему относительно переменной $b_0(\omega)$ и далее $K_0(\omega, b_0)$:

$$\begin{cases} 9(3\overline{\omega} - \alpha)b_0^3 + 9(\overline{\omega}^2 - \alpha^2)b_0^2 + 12\overline{\omega}b_0 + 4\overline{\omega}^4 = 0; \\ K_0 = -(2\overline{\omega} + 3b_0)/(3b_0). \end{cases} \tag{23}$$

Полученная система есть параметрическое представление границы *D*-разбиения.

Применяя критерий Эрмита–Гурвица с учетом коэффициентов характеристического уравнения (21), находим:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3b_0(K_0+1) & 0 \\ -1 & -3b_0 & \alpha^2 + b_0\alpha + 1 - K_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3b_0(K_0+1) \\ 0 & -1 & -3b_0 & \alpha^2 + b_0\alpha + 1 - K_0^2 \end{vmatrix} = \tag{24}$$
$$= -(9b_0^2 + 4)K_0^2 + 4(\alpha^2 + \alpha b_0 + 1) + 9b_0^2 = 0.$$

Из последнего соотношения получаем уравнение границы *D*-разбиения в явной форме:

$$K_0 = \sqrt{\frac{9b_0^2 + 4(\alpha^2 + b_0\alpha + 1)}{9b_0^2 + 4}}. \tag{25}$$

Можно показать, что для четырехкаскадного кольцевого автогенератора, после раскрытия старшего определителя матрицы Эрмита–Гурвица по параметрам K_0 и b_0, получаем двумерный полином двенадцатого порядка по каждой переменной, и построение диаграммы *D*-разбиения выполняется рассмотренным выше способом.

Диаграммы *D*-разбиения плоскости параметров для двух- и четырехкаскадного кольцевых автогенераторов приведены на рис. 3 штриховыми линиями. Нижний индекс в обозначениях $D_r^{\text{р}}$ и $D_r^{\text{з}}$ соответствует числу правых корней характеристического полинома.

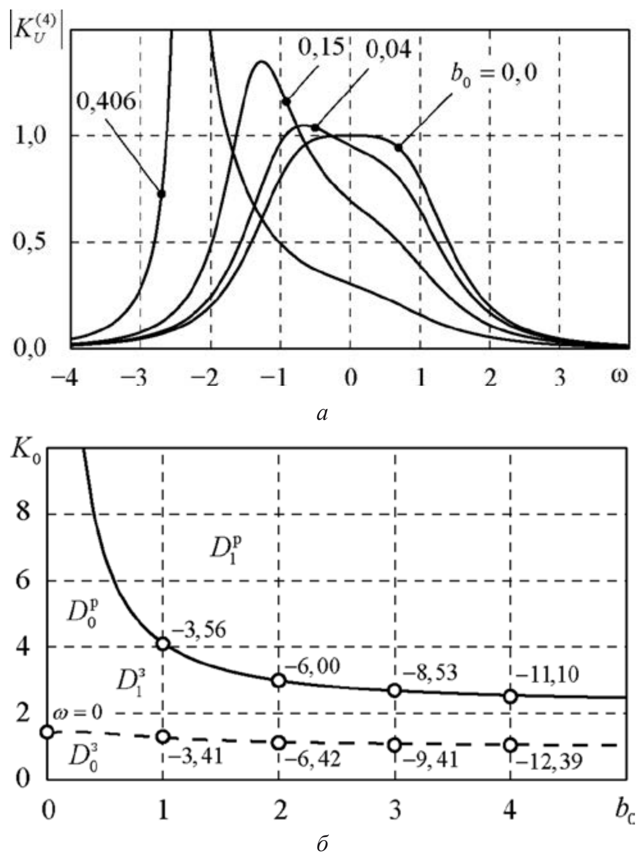


Рис. 3. Диаграммы *D*-разбиения для двухкаскадного (*а*) и четырехкаскадного (*б*) резонансных усилителей (сплошные линии) и кольцевых автогенераторов (штриховые линии) при $\alpha = 1$

Заметим, что кривая, ограничивающая область устойчивости кольцевого автогенератора, практически не зависит от проводимости элемента ОС b_0, причем область $D_0^{\text{з}}$ существенно уже области $D_0^{\text{р}}$.

На рис. 4 *D*-разбиение для четырёхкаскадного усилителя дополнено вспомогательными линиями, определяемыми младшими детерминантами матрицы Эрмита–Гурвица.

Согласно теореме 1, число правых корней *r* в каждой из образовавшихся подобластей равно числу перемен знака в последовательности $(1, \Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \Delta_8)$. Знак Δ_{2i} на рис. 4 легко определить, учитывая, что в области D_0 все $\Delta_{2i} > 0$ и при каждом пересечении границы знак меняется на противоположный. В таблице приведены знаки Δ_{2i} и значения *r* для всех пяти подобластей, имеющих место на рис. 4. Подобласти обозначены римскими цифрами I, ... V.

Заметим, что истинной границей, разделяющей плоскость (b_0, K_0) на области D_r с одинаковым числом правых корней, является условие равенства нулю старшего детерминанта Δ_{2n} ($\Delta_8 = 0$ при $n = 4$). Младшие детерминанты играют при этом вспомогательную роль: с их помощью по формуле (4) выполняется разметка *D*-областей. Новых *D*-областей при этом не возникает, поскольку эти линии образуются критическими точ-

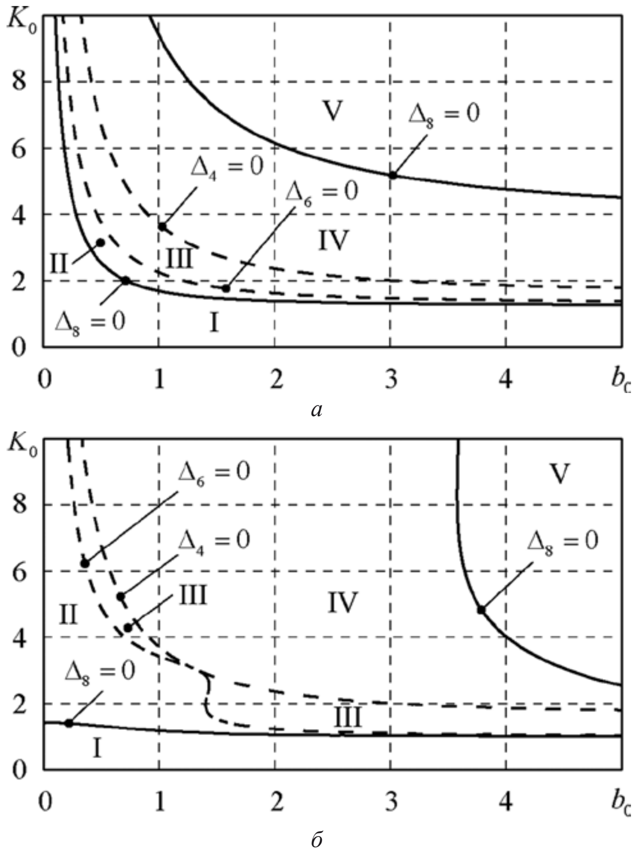


Рис. 4. Диаграммы D-разбиения $\Delta_8 = 0$ и вспомогательные линии $\Delta_{2i} = 0$, $i = \overline{1,3}$ для четырехкаскадных резонансного усилителя (*а*) и кольцевого автогенератора (*б*) при $\alpha = 1$

Пример определения числа правых корней полинома по критерию Эрмита-Гурвица

Подобласть	Знак					r
	1	Δ_2	Δ_4	Δ_6	Δ_8	
I	+	+	+	+	+	0
II	+	+	+	+	–	1
III	+	+	+	–	–	1
IV	+	+	–	–	–	1
V	+	+	–	–	+	2

ками 1-го типа. По определению здесь выполняются условия (5). Эти условия эквивалентны появлению нуля в первом столбце соответствующей строки таблицы типа Рауса, ассоциированной с матрицей Эрмита–Гурвица [13]. В силу условия $\Delta_{2n} \neq 0$ эти точки не принадлежат границе $\Delta_{2n} = 0$ и согласно алгоритму Рауса заполнение таблицы можно продолжить, заменив нуль малой величиной ε произвольного знака. Такой подход решает задачу локализации корней полинома и свидетельствует о неизменности их числа в окрестности особых точек 1-го типа. Тем самым доказано следующее положение.

Теорема 2. *Основной границей D-разбиения плоскости двух параметров характеристического уравнения* (1) *с комплексными коэффициентами* $H(p, k_1, k_2)$, *для которого* $H(j\omega) = H_в(\omega) + jH_м(\omega)$, *причем* $b_n \neq 0$ *и полиномы* $H_в(\omega)$ *и* $H_м(\omega)$ *взаимно просты, является равенство нулю старшего детерминанта матрицы Эрмита Гурвица* $\Delta_{2n}(k_1, k_2) = 0$. *Вспомогательные линии, соответствующие равенству нулю младших детерминантов матрицы* $\Delta_{2i} = 0$, $i < n$ *при* $\Delta_{2n} \neq 0$, *образуются особыми точками 1-го типа и служат для выделения* D_r *областей диаграммы с равным числом правых корней* $r = V(1, \Delta_2, \Delta_4, ..., \Delta_{2n})$, $(\Delta_{2n} \neq 0)$.

Кроме основной границы D-разбиения, по аналогии с задачей Рауса–Гурвица для вещественных полиномов, на плоскости (k_1, k_2) *возможно появление особых линий (не обязательно прямых), определяемых из условий равенства нулю старшего и младшего коэффициентов характеристического уравнения* (1): $h_0(k_1, k_2) = 0$ *и* $h_n(k_1, k_2) = 0$.

В рассмотренных выше примерах таких линий не обнаружено. Первое условие определяет на основной границе D-разбиения точку с параметром $\omega = 0$ *(она расположена в четвертом квадранте при* $K_0 \to \infty$*), второе — корней не имеет (см. рис. 4).*

Заметим, что все положения теоремы 2 в соответствии с теоремой 1 обобщаются на случай D-разбиения гиперпространства m-го порядка, если двумерный вектор свободных параметров $K = [k_1, k_2]$ заменить вектором $K = [k_1, k_2, ..., k_m]$. Границей D-разбиения является равенство $\Delta_{2n}(K) \neq 0$, а младшие детерминанты, образующие при $\Delta_{2i}(K) \neq 0$, $i < n$, $\Delta_{2n}(K) \neq 0$ гиперповерхности более низкого порядка и состоящие из особых точек 1-го типа, служат для разметки D-разбиения по числу правых корней согласно формуле (4). Вполне понятно, что подобная теорема в соответствии с критерием Рауса–Гурвица имеет место для динамических систем с вещественными характеристическими уравнениями.

Заключение

Для построения диаграмм D-разбиения применимы два основных подхода — частотный метод Неймарка и алгебраический детерминантный критерий Эрмита–Гурвица. Отмечено, что важным достоинством метода Неймарка является возможность параметрического решения задачи без приведения комплексного характеристического уравнения к полиномиальной форме. Однако такое решение возможно лишь в случае, когда один из параметров входит в характеристическое уравнение линейно. От подобного ограничения свободен метод Эрмита–Гурвица, но для его реализации необходимо привести характеристическое уравнение к многомерному полиному от p и составляющих вектора $K = [k_1, k_2, ..., k_m]$ свободных параметров системы. Если же эта процедура выполнена (например, методом многомерной ДПФ-интерполяции), то окончательное решение оказывается более простым и сводится к решению алгебраических уравнений сравнительно невысокой степени по параметрам плоского или m-мерного сечения пространства D-разбиения динамической системы. Доказана теорема, согласно которой основной границей D-разбиения (в алгебраическом методе) является равенство нулю старшего детерминанта матрицы Эрмита–Гурвица. Младшие детерминанты играют при этом вспомогательную роль: с их помощью выполняется разметка D-областей по числу правых корней и выделяются сечения, соответствующие особым точкам 1-го типа.

Методика исследования резонансных динамических систем при произвольных степенях свободных параметров проиллюстрирована на примерах анализа многокаскадных усилителей и кольцевых автогенераторов.

Литература

1. **Неймарк Ю.И.** Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных). Л.: Ленинградская краснознаменная воен.-возд. инж. академия, 1949.

2. **Цыпкин Я.З.** Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977.

3. **Попов Е.П.** Теория линейных систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1978.

4. **Евтянов С.И.** Избранные статьи. М.: Издательский дом МЭИ, 2013.

5. **Воронов А.А.** Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.

6. **Первачев С.В.** Радиоавтоматика. М.: Радио и связь, 1982.

7. **Капранов М. В., Кулешов В. Н., Уткин Г. М.** Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.

8 **Богачев В.М.** Устойчивость линеаризованных электронных схем (сосредоточенных и распределённых). М.: МЭИ, 1985.

9. **Богачев В.М., Лысенко В.Г., Смольский С.М.** Транзисторные генераторы и автодины. М.: МЭИ, 1993.

10. **Богачев В.М.** Метод D-разбиения в плоскости параметров, входящих в характеристическое уравнение полиномиально // Труды 59-й науч. сессии, посвященной Дню Радио. Т. 2. М.: Радиотехника, 2004. С. 88 — 90.

11. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966.

12. **Джури Э.** Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979.

13. **Богачев В.М.** Алгебраические критерии устойчивости комплексных полиномов и их применение в радиоэлектронике // Радиотехника и электроника, 2015. № 7. С. 731.

14. **Влах И., Сингхал К.** Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М.: Радио и связь, 1988.

15. **Богачев В.М., Демидов В.М.** Многомерное ДПФ-преобразование полиномиальных определителей // Радиотехника. 1988. № 2. С. 99.

Статья поступила в редакцию 19.03.2015