МАТЕМАТИКА

Математическая логика, алгебра и теория чисел (01.01.06)

УДК 511.4
DOI: 10.24160/1993-6982-2021-6-148-151

О коградиентности и контрградиентности линейных дифференциальных уравнений и систем

В.А. Горелов

В теории трансцендентных чисел одним из основных методов остаётся метод Зигеля–Шидловского, с помощью которого можно доказывать трансцендентность и алгебраическую независимость значений целых функций некоторого класса (так называемых E-функций). Для применения данного метода необходимо, чтобы рассматриваемые функции составляли решение системы линейных дифференциальных уравнений и были алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.
Вопрос об алгебраической независимости решений линейных дифференциальных уравнений и систем подобных уравнений имеет большое значение в дифференциальной алгебре, аналитической теории дифференциальных уравнений, теории специальных функций и математическом анализе в широком смысле. В работах Е. Колчина, Ф. Бейкерса, В. Браунвела и Г. Хекмана показано, что этот вопрос во многом сводится к проверке условия коградиентности и контрградиентности.
Две системы линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ называют коградиентными (соответственно, контрградиентными), если для произвольных фундаментальных матриц Φ и Ψ этих систем выполняется одно из равенств $\Phi = gB\Psi C$; $\Phi\,(\Psi C)^* = gB$, где $C \in GL(\mathbb{C})$; $B \in GL(\mathbb{C}(z))$; $g = g(z)$ — функция с условием $g'/g \in \mathbb{C}(z)$; A^* — матрица, транспонированная с матрицей A. Аналогично понятия коградиентности и контрградиентности определяются для линейных однородных дифференциальных уравнений произвольного порядка.
В некоторых работах автора, посвящённых обобщённым гипергеометрическим функциям, фактически использованы другие, более узкие определения коградиентности и контрградиентности. Согласно им, в представленных равенствах функция g является произведением степенной и показательной функций некоторого вида.
Найдены условия эквивалентности данных определений.

Ключевые слова: метод Зигеля, алгебраическая независимость, E-функции.

Для цитирования: Горелов В.А. О коградиентности и контрградиентности линейных дифференциальных уравнений и систем // Вестник МЭИ. 2021. № 6. С. 148—151. DOI: 10.24160/1993-6982-2021-6-148-151.

On the Cogredience and Contragredience of Linear Differential Equations and Systems

V.A. Gorelov

The Siegel-Shidlovskii method remains one of the basic methods in the theory of transcendental numbers. By using this method, it is possible to prove the transcendence and algebraic independence of the values of entire functions of a certain class (so-called E-functions). A necessary condition for applying this method is that all of the considered functions must constitute a solution of a system of linear differential equations and were algebraically independent over $\mathbb{C}(z)$.
The question about algebraic independence of the solutions of linear differential equations and systems of such equations is of great importance in differential algebra, analytical theory of differential equations, theory of special functions, and calculus (in the broad sense of the word). As is shown in papers by E. Kolchin, F. Beukers, W.D. Brownawell, and G. Heckman, this question boils down in many instances to verification of the cogredience and contragredience condition.
Two systems of 1st order linear homogeneous differential equations with coefficients from $\mathbb{C}(z)$ are said to be cogredient (or, respectively, contragredient), if for arbitrary fundamental matrices Φ and Ψ of these systems one of the equations $\Phi = gB\Psi C$; $\Phi\,(\Psi C)^* = gB$ is fulfilled,

where $C \in GL(\mathbb{C})$; $B \in GL(\mathbb{C}(z))$; $g = g(z)$ is a function with the condition $g'/g \in \mathbb{C}(z)$ and A^* is the matrix transposed to A. The notions of cogredience and contragredience for linear homogeneous differential equations of arbitrary order are defined similarly.
Another, more restricted definitions of cogredience and contragredience were in fact used in some papers of the author, devoted to generalized hypergeometric functions. According to these definitions, the function g in the presented equalities is the product of a power function and an exponential function of some kind.
The conditions for equivalence of these definitions are found.

Key words: Siegel's method, algebraic independence, E-functions.

For citation: Gorelov V.A. On the Cogredience and Contragredience of Linear Differential Equations and Systems. Bulletin of MPEI. 2021;6:148—151. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2021-6-148-151.

Пусть $M(q, K)$ — множество всех матриц размера $q{\times}q$ с элементами из кольца K; $GL(K) = GL(q, K)$ — полная линейная группа в $M(q, K)$. Дифференциальное поле, получаемое присоединением к полю F дифференциальных переменных $v_1, \ldots, v_n$, обозначим $F\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$.

Понятия когградиентности и контргградиентности линейных дифференциальных уравнений и систем введены в [1]. Важные факты, связанные с этими понятиями, установлены в [2 — 4]. Публикации [1 — 3] посвящены доказательству алгебраической независимости решений линейных дифференциальных уравнений и относятся к методу Зигеля–Шидловского [5, 6]. В работах [1 — 4] использован аппарат дифференциальной теории Галуа [7].

Пример когградиентности можно получить из соотношений смежности для гипергеометрической функции, обнаруженных ещё Гауссом. Для произвольных обобщённых гипергеометрических функций [5, 6, 8, 9] условия когградиентности получены автором [10, лемма 12; 11]. Первый пример контргградиентности (без упоминания термина) системы дифференциальных уравнений, имеющих отношение к гипергеометрическим функциям, был, по-видимому, построен Ю.В. Нестеренко [12, лемма 8]. Теоремы о когградиентности и контргградиентности обобщённых гипергеометрических дифференциальных уравнений, многие из которых имели необходимые и достаточные условия, доказаны автором в [10, лемма 14; 11]. При этом в [10] использовано более узкое определение с функциями $g(z)$ вида

$$g(z) = z^r e^{\gamma z} \text{ или } g(z) = z^r \exp\left(\gamma z^p + \gamma_1 z^{p_1}\right), \quad (1)$$

где $r, \gamma, \gamma_1 \in \mathbb{C}$, $p, p_1 \in \mathbb{N}$.

Примеры, построенные в [12, 13], также относятся к случаю (1).

С помощью следующих четырёх лемм найдем условия, при которых в определениях когградиентности и контргградиентности уравнений или систем в равенствах $\Phi = gB\Psi C$; $\Phi\,(\Psi C)^* = gB$ можно ограничиться случаем (1).

Лемма 1. *Пусть V — произвольное дифференциальное поле аналитических функций, содержащее $\mathbb{C}(z)$, но не содержащее иррациональных функций, логарифмические производные которых принадлежат $\mathbb{C}(z)$. Тогда любые линейно независимые над $\mathbb{C}(z)$ функции, логарифмические производные которых принадлежат $\mathbb{C}(z)$, будут линейно независимыми над V.*

Лемма 2. *Пусть $\Phi_k = \left\|v_{k,i,s}\right\|_{i,s=1,\ldots,q_k}$ — фундаментальная матрица системы*

$$\begin{aligned} &\vec{v}_k' = A_k \vec{v}_k'; \;\; A_k \in M\left(q_k, \mathbb{C}(z)\right); \; q_k = 2; \\ &\left|\Phi_k\right| = W_k = \left|v_{k,i,s}\right|_{i,s} \in \mathbb{C}(z); \; k = 1,\ldots,n, \end{aligned} \quad (2)$$

а функции

$$\left\{v_{k,i,s} \;|_{k=1,\ldots,n;\, i,s=1,\ldots,q_k;\, (i,s)\neq(q_k,q_k)}\right\} \quad (3)$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Тогда поле V, порождённое над $\mathbb{C}(z)$ функциями (3), не содержит иррациональных функций, логарифмические производные которых принадлежат $\mathbb{C}(z)$.

Следствие. *Любые линейно (алгебраически) независимые над $\mathbb{C}(z)$ функции, логарифмические производные которых принадлежат $\mathbb{C}(z)$, при условиях леммы 2 будут линейно (соответственно, алгебраически) независимыми над V.*

Следствие из второй леммы получим с помощью первой леммы и того факта, что любое произведение степеней функций, логарифмические производные которых принадлежат $\mathbb{C}(z)$, является функцией с таким же свойством.

Лемма 3. *Пусть система уравнений*

$$\vec{v}' = A\vec{v}'; \quad A \in M\left(q, \mathbb{C}(z)\right); \; q \geq 2,$$

не имеет нетривиальных решений, содержащих нулевые компоненты, а $\Phi = \left\|v_{i,s}\right\|_{i,s=1,\ldots,q}$ — произвольная фундаментальная матрица этой системы. Тогда для любого $t \in \{1,\ldots, q\}$ матрица $\Psi = \left\|u_s^{(i)}\right\|_{i=0,\ldots,q-1;\, s=1,\ldots,q}$, где $u_s = v_{t,s}$, является фундаментальной матрицей дифференциального уравнения

$$v^{(q)} + a_{q-1}v^{(q-1)} + \ldots + a_0 v = 0; \; q \geq 2; \; a_j \in \mathbb{C}(z),$$

причём $\Psi = \Omega\Phi$; $\Omega \in GL(q, \mathbb{C}(z))$.

Следствие. *Пусть при условиях леммы 3 $W=|\Phi|$, $W^\circ = |\Psi|$, тогда*

$$\deg tr_{\mathbb{C}(z,W)}\mathbb{C}\left\langle u_1,\ldots,u_q\right\rangle = \deg tr_{\mathbb{C}(z,W^\circ)}\mathbb{C}\left\langle v_{1,1},\ldots,v_{q,q}\right\rangle.$$

Лемма 4. *Пусть* $\Phi_k = \left\| v_{k,t,s} \right\|_{t,s=1,\ldots,q}$ — *фундаментальная матрица системы (2), причём*

$$A_k \in M\left(q, \mathbb{C}[z,\ z^{-1}]\right);\ q \geq 2;$$
$$\deg tr_{\mathbb{C}(z,W_k)}\mathbb{C}\left\langle v_{k,1,1},\ldots,v_{k,q,q}\right\rangle = q^2 - 1;$$
$$W_k = \left|\Phi_k\right| = c_k z^{\sigma_k}\exp\left(\alpha_k z^{p_k}\right);\ p_k \in \mathbb{N};$$
$$c_k, \sigma_k, \alpha_k \in \mathbb{C};\ k = 1, 2.$$

Тогда для кoградиентности и контрградиентности систем $(A_1),(A_2)$ *необходимо и достаточно выполнение условий (1).*

Подробное доказательство лемм 1 — 4 автор планирует опубликовать в отдельной статье.

Таким образом, лемма 4 показывает, что необходимые и достаточные условия коградиентности и контрградиентности обобщённых гипергеометрических уравнений из [10] с учётом замечания [13] следует считать корректными.

Исследование коградиентности и контргградиентности позволяет установить алгебраическую независимость значений обобщённых гипергеометрических функций, а также получить оценки снизу модулей многочленов от этих значений. Последнее можно сделать, используя, например, теоремы [14].

Заметим, что если $A_k \in \mathbb{C}(z)$, то $(W_k^{1/q})'/W_k^{1/q} = 1/q\ W_k'/W_k = 1/qTrA_k \in \mathbb{C}(z)$. Поэтому лемму 4 можно обобщить на другие классы уравнений и систем, например, на уравнения, которым удовлетворяют G-функции (определение и первоначальные сведения о G-функциях приведены в [6, с. 430—435]).

Литература

1. **Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G.** Siegel Normality // Annals Math. 1988. V. 127. Pp. 279—308.

2. **Kolchin E.R.** Algebraic Groups and Algebraic Dependence // Amer. J. Math. 1968. V. 90. No. 4. Pp. 1151—1164.

3. **Beukers F.** Some New Results on Algebraic Independence of *E*-functions // New Advances in Transcendence Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1988. Pp. 56—67.

4. **Katz N.M.** Exponential Sums and Differential Equations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1990.

5. **Siegel C.L.** Uber Einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929—1930. No. 1. Pp. 1—70.

6. **Шидловский А.Б.** Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

7. **Van der Put M., Singer M.** Galois Theory of Linear Differential Equations. N.-Y.: Springer, 2003.

8. **Люк Ю.** Специальные математические функции и их аппроксимации. М: Мир, 1980.

9. **Аски Р., Рой Р., Эндрюс Дж.** Специальные функции. М.: МЦНМО, 2013.

10. **Горелов В.А.** Об алгебраической независимости значений обобщённых гипергеометрических функций // Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 1. С. 94—108.

11. **Gorelov V.A.** On Contiguity Relations for Generalized Hypergeometric Functions // Problemy Analiza — Issues of Analysis. 2018. V. 7(25). No. 2. Pp. 39—46.

12. **Нестеренко Ю.В.** Приближения Эрмита – Паде обобщённых гипергеометрических функций // Матем. сборник. 1994. Т. 185. № 10. С. 39—72.

13. **Горелов В.А.** Об алгебраических тождествах между фундаментальными матрицами обобщённых гипергеометрических уравнений // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 1. С. 135—144.

14. **Горелов В.А.** Оценки многочленов от значений *E*-функций // Вестник МЭИ. 2020. № 4. С. 136—143.

References

1. **Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G.** Siegel Normality. Annals Math. 1988;127:279—308.

2. **Kolchin E.R.** Algebraic Groups and Algebraic Dependence. Amer. J. Math. 1968;90;4:1151—1164.

3. **Beukers F.** Some New Results on Algebraic Independence of *E*-functions. New Advances in Transcendence Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1988:56—67.

4. **Katz N.M.** Exponential Sums and Differential Equations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1990.

5. **Siegel C.L.** Uber Einige Anwendungen Diophantischer Approximationen. Abh. Preuss. Acad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929—1930;1:1—70.

6. **Shidlovskiy A.B.** Transtsendentnye Chisla. M.: Nauka, 1987. (in Russian).

7. **Van der Put M., Singer M.** Galois Theory of Linear Differential Equations. N.-Y.: Springer, 2003.

8. **Luke Y.** Spetsial'nye Matematicheskie Funktsii i Ikh Approksimatsii. M: Mir, 1980. (in Russian).

9. **Askey R., Roy R., Andrews G.** Spetsial'nye Funktsii. M.: MTSNMO, 2013. (in Russian).

10. **Gorelov V.A.** Ob Algebraicheskoy Nezavisimosti Znacheniy Obobshchennykh Gipergeometricheskikh Funktsiy. Matem. Zametki. 2013;94;1:94—108. (in Russian).

11. **Gorelov V.A.** On Contiguity Relations for Generalized Hypergeometric Functions. Problemy Analiza — Issues of Analysis. 2018;7(25);2:39—46.

12. **Nesterenko Yu.V.** Priblizheniya Ermita – Pade Obobshchennykh Gipergeometricheskikh Funktsiy. Matem. sbornik. 1994;185;10:39—72. (in Russian).

13. **Gorelov V.A.** Ob Algebraicheskikh Tozhdestvakh Mezhdu Fundamental'nymi Matritsami Obobshchennykh Gipergeometricheskikh Uravneniy. Chebyshevskiy Sbornik. 2020;21;1:135—144. (in Russian).

14. **Gorelov V.A.** Otsenki Mnogochlenov ot Znacheniy *E*-funktsiy. Vestnik MEI. 2020;4:136—143. (in Russian).

Сведения об авторе:

Горелов Василий Александрович — доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: gorelov.va@mail.ru

Information about author:

Gorelov Vasiliy A. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Mathematical and Computer Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: gorelov.va@mail.ru

Работа выполнена при поддержке: Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FSWF-2020-0022)
The work is executed at support: Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No. FSWF-2020-0022)

Статья поступила в редакцию: *16.04.2021*
The article received to the editor: *16.04.2021*