МАТЕМАТИКА

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (01.01.02)

УДК 517.956.2
DOI: 10.24160/1993-6982-2022-4-130-137

О задаче Пуанкаре для уравнения Стокса–Бицадзе со сверхсингулярной точкой в младших коэффициентах

А.Б. Расулов, Ю.С. Федоров

В настоящей работе для уравнения Бицадзе с дополнительными младшими членами, состоящими из частных производных первого порядка и коэффициентами, содержащими сверхсингулярную точку, исследованы задачи типа Римана–Гильберта и Пуанкаре. Показано, что при определенных ограничениях на коэффициенты младших членов уравнение Бицадзе и задача типа Римана–Гильберта сводятся к эквивалентной задаче Пуанкаре. Рассмотрены вопросы о единственности решения рассматриваемых задач и представления их в явной форме.

Ключевые слова: уравнения Стокса–Бицадзе, задаче Пуанкаре и типа Римана–Гильберта, оператор Помпейу–Векуа.

Для цитирования: Расулов А.Б., Федоров Ю.С. О задаче Пуанкаре для уравнения Стокса–Бицадзе со сверхсингулярной точкой в младших коэффициентах // Вестник МЭИ. 2022. № 4. С. 130—137. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-4-130-137.

On the Poincare Problem for the Stokes-Bitsadze Equation with a Supersingular Point in Minor Term Coefficients

A.B. Rasulov, Yu.S. Fedorov

Riemann-Hilbert and Poincaré type problems are studied for the Bitsadze equation with additional minor terms consisting of first-order partial derivatives and with coefficients containing a supersingular point. It is shown that with certain constraints on the minor term coefficients, the Bitsadze equation and the Riemann-Hilbert type problem are reduced to the equivalent Poincaré problem. Matters concerned with the solution uniqueness of the problems under consideration and their explicit representation are addressed.

Key words: Stokes–Bitsadze equations, Poincaré problem, Riemann–Hilbert type problem, Pompeiu–Vekua operator.

For citation: Rasulov A.B., Fedorov Yu.S. On the Poincare Problem for the Stokes-Bitsadze Equation with a Supersingular Point in Minor Term Coefficients. Bulletin of MPEI. 2022;4:130—137. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2022-4-130-137.

Введение

В теории эллиптических уравнений система уравнений Бицадзе [1]

$$\begin{cases} u_{1xx} - u_{1yy} - 2u_{2xy} = 0; \\ 2u_{1xy} + u_{2xx} - u_{2yy} = 0 \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

занимает важное место. Известно, что любую эллиптическую систему уравнений второго порядка с двумя искомыми функциями от двух переменных с постоянными коэффициентами можно привести к одному из комплексных уравнений [2]:

$$u_{z\bar{z}} = 0; \; u_{\bar{z}\bar{z}} = 0,$$

где $u = u_1 + iu_2$, $2\partial_{\bar z} = \partial_x + i\partial_y$ — оператор Коши–Римана.

Первое уравнение хорошо изучено, чего нельзя сказать о втором уравнении (уравнении Бицадзе).

Из работ П.Б. Бочева [3], М. Тахира и А. Дэвис [4] следует, что уравнение Бицадзе непосредственно связано с уравнением Стокса. Согласно [4], плоский случай уравнений Стокса, связывающий функции потока $u_1(x, y)$ и напряжения $u_2(x, y)$, имеет вид:

$$u_{1xx} - u_{1yy} = -4\eta u_{2xy};$$
$$-u_{1xy} = \eta\left(u_{2yy} - u_{2xx}\right),$$

где η — постоянная.

Заменив $2\eta u_2$ на u_2, переведем эту систему в систему уравнений Бицадзе. Используем некоторые факты из [3, 4] о сведении уравнений Стокса в плоском случае к уравнению Бицадзе. Также в [3, 4] рассмотрены некоторые краевые задачи. С помощью ввода матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ C = -A;\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

приведенную систему уравнений Бицадзе (B) запишем в матричной форме:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0. \qquad (0.1)$$

В [5] для уравнения (0.1) Стокса–Бицадзе с граничным условием Пуанкаре

$$p_1 u_x + p_2 u_y + qu\,|_{(x,y)\in\Gamma} = g(x, y), \qquad (0.2)$$

где p_1, p_2, q — действительные матричные функции размерности 2×2, а $g(x, y)$ — действительная вектор-функция, заданные на контуре Γ, решение определяется в классе $C^4(D)$. Поиск решения в классе $C^4(D)$ вызван тем, что при исследовании разрешимости задачи (0.1), (0.2) привлекаются свойства решений бигармонического уравнения $\Delta^2 u = 0$. Единственность решения системы уравнений Бицадзе (0.1), (0.2) изучают при четырех дополнительных одноточечных условиях, которые в настоящей работе не выписаны. Также в [5] даны рекомендации построения такого решения, но его явный вид не дан.

Задача (0.1), (0.2) в классе $C_\lambda^{1,\nu}(D)$ исследована в работе А.П. Солдатова [6]. Некоторые краевые задачи для комплексных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в кольцевой области описаны в работе [7]. Заметим, что внутри единичного круга краевая задача для уравнения Бицадзе (B) изучалась Бабаяном. Им было доказано, что задача (B) — нётерова. Некоторые краевые задачи для уравнения (0.1) также проанализированы в работах [8, 9] и др.

В настоящей работе для уравнения Бицадзе (0.1) с дополнительными младшими членами, состоящими из частных производных первого порядка, и коэффициентами, содержащими сверхсингулярную точку $z = 0$, исследованы задача типа Римана–Гильберта и Пуанкаре. Показано, что при определенных ограничениях на коэффициенты младших членов уравнение Бицадзе и задача типа Римана–Гильберта сводятся к эквивалентной задаче Пуанкаре (0.2). Рассмотрены вопросы существования и единственности решения соответствующей задачи Пуанкаре, а также представления решения в виде явной формулы.

Сведение уравнения Стокса к уравнению Бицадзе

Приведем некоторые факты из [3, 4] о сведении уравнений Стокса в плоском случае к уравнению Бицадзе.

Существует множество формулировок уравнения Стокса в плоскости, каждое из которых выведено из уравнений, описывающих поток несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma = 0 \ \left(\text{сохранение импульса}\right); \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ \left(\text{условие несжимаемости}\right), \end{cases} \qquad (1.1)$$

где $\vec{u} = (u, v)$ — скорость жидкости; σ — тензор напряжений Коши (положим, что нет никаких внешних сил).

Наиболее распространенная формулировка уравнений Стокса выражается в терминах примитивных переменных $(\vec{u}, p)$:

$$\begin{cases} -\nabla p + \eta\Delta\vec{u} = 0; \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Введем функцию тока ψ, такую, что

$$\begin{cases} u = \psi_y; \\ v = -\psi_x \end{cases} \qquad (1.3)$$

условие несжимаемости (см. (1.1)) автоматически выполняется при условии непрерывности производных второго порядка функции ψ.

Пусть компоненты скорости потока заданы через функцию тока $\psi(x, y)$, а компоненты дополнительного напряжения $\vec{T}$ — в терминах функции Эйри напряжений $\varphi(x, y)$ и давления p:

$$\begin{cases} \sigma^{xx} = -p + T^{xx} = \varphi_{yy}; \\ \sigma^{xy} = T^{xy} = \varphi_{xy}; \\ \sigma^{yy} = -p + T^{yy} = \varphi_{xx}, \end{cases} \qquad (1.4)$$

где верхние индексы обозначают компоненты напряжений, а нижние — вторые частные производные. Тогда уравнения баланса количества движения и массы $\operatorname{div}\sigma = 0$ и $\operatorname{div}\vec{u} = 0$ удовлетворены по непрерывности. Таким образом, тензор $\vec{T}$ выразим как

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} p + \varphi_{yy} & -\varphi_{xy} \\ -\varphi_{xy} & p + \varphi_{xx} \end{bmatrix}. \qquad (1.5)$$

Используя (1.5), из (1.4) и (1.2) получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} p + \varphi_{yy} = 2\eta\psi_{xy}; \\ -\varphi_{xy} = \eta(\psi_{yy} - \psi_{xx}); \\ p + \varphi_{xx} = -2\eta\psi_{xy}. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Исключив давление p из первого и третьего уравнений системы (1.6), получим эллиптическую систему второго порядка по φ и ψ:

$$\begin{cases}\varphi_{xx}-\varphi_{yy}=-4\eta\psi_{xy};\\ -\varphi_{xy}=\eta(\psi_{xy}-\psi_{xx}).\end{cases} \qquad (1.7)$$

Изменив масштаб зависимой переменной в (1.7) следующим образом: $2\eta\psi\to\psi$, $\varphi\to\varphi$, сведем эту систему к эллиптической системе второго порядка — системе Бицадзе (0.1), идентифицированной как система Стокса–Бицадзе [3 — 5].

Построение решения уравнения (2.1)

Ради удобства, наряду с вещественно-матричной формой уравнения Бицадзе с дополнительными младшими членами, состоящими из частных производных первого порядка, и коэффициентами, содержащими сверхсингулярную точку $z = 0$, введем ее комплексно-значную форму:

$$u_{\bar z\bar z}+\frac{a}{\rho}\left(u_{\bar z}+cu\right)-c^2u=f. \qquad (2.1)$$

Пусть $Q\subset\mathbb{C}$ — некоторая область. Известно, что в исследовании уравнения (2.1) существенную роль играет интегральный оператор И.Н. Векуа [5, с. 31]:

$$(Tf)(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_Q\frac{f(\zeta)d_2\zeta}{\zeta-z},$$

где $d_2\zeta$ — элемент площади.

Если $f\in L^p(Q)$, $p > 2$, то функция $u = Tf$ принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(Q)$ и удовлетворяет уравнению $u_{\bar z} = f$, причем оператор T ограничен $L^p(Q)\to W^{1,p}(Q)$. Имеет место следующее вложение данного пространств в класс Гельдера [5, с. 39]:

$$W^{1,p}(Q)\subseteq C^{\mu}(\bar Q),\quad \mu=1-\frac{2}{p}. \qquad (2.2)$$

Оператор T компактен в пространствах $L^p(Q)$ и $C(\bar Q)$. В дальнейшем предполагается, что $p > 2$.

Теорема 1. *Пусть $A = a/\rho$ и*

$$A_0(z)=\frac{a(z)-a_0}{\rho(z)}\in C(Q). \qquad (2.3)$$

Тогда функция TA существует, удовлетворяет уравнению $(TA)_{\bar z} = A$ в области Q и представима в виде

$$(TA)(z)=-a_0\omega(z)+H(z), \qquad (2.4)$$

где $H(z)=(TA_0)(z)+h(z)$;

$$\omega(z)=\frac{2}{(n-1)|z|^{n-1}};\quad h(z)=\frac{a_0}{(n-1)\pi i}\int_{\partial Q}\frac{d\zeta}{|\zeta|^{n-1}(\zeta-z)}.$$

Заметим, что согласно известному свойству интегралов типа Коши [7, с. 22] второе слагаемое в выражении функции H принадлежит $C^{\nu}(\bar Q)$ с любым $\nu < 1$, в частности, $H\in C^{\mu}(\bar Q)$ с показателем μ из (2.4).

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 функция $h\in W^{1,p}(Q)$.*

Введя $h_0 = -Tc$; $h_1 = T(A_0 + 2c) - h$; $h_2 = T(A_0 - c) + h$ совместно с разложением

$$u_{\bar z\bar z}+\frac{a}{\rho}(u_{\bar z}+cu)-c^2u=\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}+\frac{a}{\rho}-c\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}+c\right)u$$

и теоремой 1, а также на основе представления решений, сформулируем теорему об общем решении уравнения (2.1).

Теорема 2. *Пусть $A_0(z)\in C(Q)$ и $\mathrm{Re}\,a_0(0) < 0$. Тогда при $e^{-a_0(0)\omega}f\in L^p(Q)$ любое решение уравнения (2.1) в области Q дается формулой*

$$u=e^{h_0}[\varphi_1+T(e^{a_0\omega+h_1}\varphi_2)+T(e^{a_0\omega+h_1}\tilde f)], \qquad (2.5)$$

где $\tilde f=T(e^{-a_0\omega+h_2}f)$; *функции* φ_1, φ_2 *аналитичны в области* Q.

Доказательства леммы 1 и теоремы 2 приведены в [11, 12].

Исследование решения уравнения Бицадзе в области $Q = D\backslash\{0\}$

Пусть область D ограничена гладким контуром $\Gamma\in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$ и содержит внутри точку $z = 0$. В настоящей работе рассматривается уравнение Бицадзе (2.1). Перепишем его еще раз:

$$u_{\bar z\bar z}+\frac{a}{\rho}(u_{\bar z}+cu)-c^2u=f, \qquad (3.1)$$

где $a, c\in C(\bar D)$ — функции, причем функция $c(z)$ аналитична в области D, и для краткости $\rho(z)=\bar z|z|^{n-1}$, $n>1$.

Относительно коэффициента a и правой части предположим, что в области D выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}&a=a_0+\rho A_0;\ \ \mathrm{Re}\,a_0<0;\\ &A_0\in C(D);\quad e^{-a_0\omega}f\in L^p(D),\ p>2,\end{aligned} \qquad (3.2)$$

где для краткости $\omega(z)=\dfrac{2}{(n-1)|z|^{n-1}}$.

Коэффициент $\left(\dfrac{a}{\rho}c-c^2\right)$ при u гарантирует разложение левой части уравнения (3.1) в виде

$$u_{\bar z\bar z}+\frac{a}{\rho}(u_{\bar z}+cu)-c^2u=\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}+\frac{a}{\rho}-c\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}+c\right)u. \qquad (3.3)$$

Поскольку в (3.1) точка $z = 0$ является сингулярной, то рассмотрим эту систему сначала в области $Q = D\backslash\{0\}$

Под решением уравнения (3.1) понимается функция u, принадлежащая соболевскому пространству $W^{1,p}(Q)$ и удовлетворяющая уравнению

$$u_{\bar z\bar z}=f-\frac{a}{\rho}(u_{\bar z}+cu)+c^2u$$

в обобщенном смысле.

Напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем. Пусть в некоторой области Q на плоскости задана линейная эллиптическая система второго порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которых принадлежит $L^p_{loc}(Q)$, $p > 2$. Тогда на основании внутренней регулярности (см. монографию И.Н. Векуа) любое слабое решение u этого уравнения принадлежит классу $W^{2,p}_{loc}(Q)$, т. е. $W^{2,p}(Q)$ в любой ограниченной области Q_0, лежащей в Q вместе со своей границей, является регулярным решением. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{Q_0})$ с показателем $\mu \le (p-2)/p$. Этот факт был доказан И.Н. Векуа в [5].

Вернемся теперь к уравнению (3.1). Как было показано, решение этого уравнения в области $Q = D\backslash\{0\}$ выведено явным образом:

$$u = \mathrm{e}^{h_0}[\varphi_1 + T(\mathrm{e}^{a_0\omega+h_1}\varphi_2) + T(\mathrm{e}^{a_0\omega+h_1}\tilde{f})], \qquad (3.4)$$

где $\omega(z) = \dfrac{2}{(n-1)|z|^{n-1}}$; $\tilde{f} = T(\mathrm{e}^{-a_0\omega+h_2}f)$; $h_0 = -Tc$; T — интегральный оператор И.Н. Векуа,

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_G \frac{f(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z}, \qquad (3.5)$$

где $\varphi_2(z)$ — произвольная аналитическая в области Q функция ($d_2\zeta$ — элемент площади).

Заметим, что если $f \in L^p(Q)$, $p > 2$, то функция $u = Tf$ принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(Q)$ и удовлетворяет уравнению $u_{\bar{z}} = f$, причем оператор T ограничен $L^p(Q) \to W^{1,p}(Q)$, и имеет место следующее вложение данного пространства в класс Гельдера:

$$W^{1,p}(Q) \subseteq C^{\mu}(\overline{Q}), \quad \mu = 1 - 2/p.$$

Решение уравнения (3.1) — $u \in W^{1,p}(Q) \equiv W^{1,p}(D\setminus\{0\})$, если выполнены условия (3.2). В частности, оно — регулярно и принадлежит классу $C^{\mu}_{loc}(D\setminus\{0\})$. Заметим, что для функции $\mathrm{e}^{a_0\omega+h_1}\varphi_2$ точка $z = 0$ является устранимой особой точкой (в силу отрицательности $\mathrm{Re}a_0$ и аналитичности функции φ_2). Так что, принимая во внимание, что множитель e^{h_0} и последние два слагаемых в правой части (3.4) принадлежат $W^{1,p}(D)$ (значит, по теореме вложения они принадлежат классу $C^{\mu}(\overline{D})$ с показателем $\mu \le (p-2)/p$), приходим к выводу, что и решение u уравнения (3.1) также принадлежит $W^{1,p}(D)$. Таким образом, под решением уравнения (3.1) в области D понимается функция $u \in W^{1,p}(D)$, удовлетворяющая уравнению (3.1), а значит, и классу $C^{\mu}(\overline{D})$ с показателем $\mu \le (p-2)/p$. При этом принадлежность функции (3.4) классу $u \in W^{1,p}(D)$ (включая и точку $z = 0$) достигается выбором коэффициента a_0, позволяющего устранить в решении особенность точки $z = 0$, и произвольной аналитической функции $\varphi_1(z)$ из нужного нам класса.

Проиллюстрируем теорему 2 на примере однородного уравнения $u_{\bar{z}\bar{z}} + a\rho^{-1}u_{\bar{z}} = 0$ с постоянным коэффициентом $a < 0$, рассматриваемого в области $D = \{|z| < R\}$. Поскольку $a_0 = 0$, положим $c = 0$, и формула (2.4) переходит в

$$(TA)(z) = \frac{2a}{n-1}\left(\frac{1}{R^{n-1}} - \frac{1}{|z|^{n-1}}\right).$$

Соответственно, представление (3.4) примет вид

$$u(z) = \varphi_1(z) - u_1(z); \quad u_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\le R}\frac{E(|\zeta|)\varphi_2(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z},$$

где для краткости

$$E(r) = \exp\left[\frac{2a}{n-1}\left(\frac{1}{|r|^{n-1}} - \frac{1}{R^{n-1}}\right)\right], \quad 0 < r < R.$$

Здесь функции φ_1, φ_2 аналитичны в области $0 < |z| < R$, причем $E(|\zeta|)\varphi_2(\zeta) \in L^p(D)$. В частности, условие $u_{\bar{z}} + cu \in L^p(D)$, в рассматриваемом случае сводимое к $u_{\bar{z}} \in L^p(D)$, выполняется автоматически, и функция $u_1(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = \{|z| \le r\}$.

Значение $u_1(0)$ данной функции в точке $z = 0$ можно вычислить явно по формуле

$$u_1(0) = \frac{c_1}{\pi}\int_0^R E(r)rdr,$$

где c_1 — коэффициент при z в лорановском разложении функции $\varphi_2(z)$ в области $0 < |z| < R$.

Классическая задача Римана–Гильберта

Напомним известные результаты относительно классической задачи Римана–Гильберта, приведенные в монографиях [6, 13, 14]: найти аналитическую в области D функцию $\varphi(z)$, которая на границе $\Gamma = \partial D$ удовлетворяет условию

$$\mathrm{Re}G\varphi|_{\Gamma} = g, \qquad (4.1)$$

где функция $G = \alpha + i\beta \in C^{\nu}(\Gamma)$ всюду отлична от нуля.

Если $g(z) \equiv 0$, то задачу Римана–Гильберта называют однородной, в противном случае она — неоднородна. В дальнейшем воспользуемся компактным изложением А.П. Солдатова относительно решения задачи Римана–Гильберта.

Предположим, что функция $G(t) \ne 0$ всюду на Γ. Рассмотрим эту задачу для односвязной области D, ограниченной простым контуром Γ. В случае, когда область D является единичным кругом, задача (4.1) легко сводится к задаче линейного сопряжения и, следовательно, допускает эффективное решение. С этой целью функцию φ продолжим в область $D' = \{|z| > 1\}$, полагая

$$\varphi(z) = \overline{\varphi(1/\bar{z})}, \quad |z| > 1.$$

Очевидно, что продолженная функция будет аналитической в $\mathbb{C}\backslash\Gamma = D \cup D'$ и станет принадлежать классу $C^{\mu}_0(\overline{D} \vee \overline{D}')$. Она удовлетворяет условию $\varphi = \varphi_*$, где φ_* определяется с помощью инверсии:

$$\varphi_*(z) = \overline{\varphi(1/\bar{z})}. \quad (4.2)$$

Операция $\varphi \to \varphi_*$ является линейной над полем $\mathbb{R}$ и инволютивной, т. е. $(\varphi_*)_* = \varphi$. Из определения (4.2) видно, что

$$\varphi_*^{\pm}(t) = \overline{\varphi^{\mp}}, \quad t \in \Gamma. \quad (4.3)$$

В частности, краевое условие (4.1) для так продолженной функции φ перепишем в форме:

$$G\varphi^+ + \overline{G}\varphi^- = 2g. \quad (4.4)$$

Верно и обратное. Если $\varphi \in C_0^{\mu}(\overline{D} \vee \overline{D}')$ — решение задачи линейного сопряжения, подчиненное дополнительному требованию $\varphi = \varphi_*$, то сужение φ на D служит решением задачи (4.1).

Очевидно, задачу (4.4) можно представить в форме (4.1) по отношению к коэффициенту $\tilde{G} = -\overline{G}/G$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $æ = \operatorname{Ind}_{\Gamma} G$, *так что функция* $a(t) = \arg G(t) - æ \arg t \in C^{\mu}(\Gamma)$, *и пусть*

$$R(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1; \\ z^{2æ}, & |z| > 1; \end{cases} \quad H(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{\pi - 2a(t)}{t - z} dt. \quad (4.5)$$

Тогда функция

$$X(z) = R(z) e^{H(z) - H(0)/2} \quad (4.6)$$

является $\tilde{G}$-канонической и обладает свойством

$$X_*(z) = X(z) z^{-2æ}. \quad (4.7)$$

Доказательство.

В классе многочленов P_n введем операцию

$$\hat{p}(z) = z^n p_*(z), \quad (4.8)$$

действующую по формуле

$$(c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n)^{\wedge} = \bar{c}_n + \bar{c}_{n-1} z + \ldots + \bar{c}_0 z^n$$

и, очевидно, инволютивную: $(\hat{p})^{\wedge} = p$.

Из (4.7) и определения (4.8) непосредственно следует, что

$$(Xp)_* = X\hat{p}, \ \ p \in P_{-2æ}. \quad (4.9)$$

Утверждается, что на единичной окружности имеет место соотношение

$$\overline{\left[\frac{tp(t)}{G(t)X^+(t)}\right]} = -\frac{t\hat{q}(t)}{G(t)X^+(t)}, \quad q \in P_{2æ-2}, t \in \Gamma. \quad (4.10)$$

Обратимся к исходной задаче (4.1) и классу $P_n^0 = \{p \in P_n, \hat{p} = p\}$. Очевидно, что любой элемент $p \in P_n$ единственным образом представим в виде $p = p^0 + ip^1$, где $p^1 \in P_n^0$, так что $\mathbb{R}$ 134 линейное подпространство $P_n^0 \subseteq P_n$ имеет размерность $n + 1$.

Теорема 3. *В условиях леммы 1 все решения задачи (4.1) в классе* $C^{\mu}(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$\varphi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{dt}{t - z} + X(z)p(z), \quad p \in P_{-2æ}^0, \quad (4.11)$$

где функция g удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_{\Gamma} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q(t) dt = 0, \quad q \in P_{2æ-2}^0. \quad (4.12)$$

Очевидно, при $æ \le 0$ размерность пространства $P_{-2æ}^0$ над полем $\mathbb{R}æ$ равна $-2æ + 1$. Аналогично, при $æ \ge 0$ размерность пространства $P_{2æ-2}^0$ равна $2æ - 1$. Во всех случаях индекс задачи (4.1) равен $-2æ + 1$ и, в частности, всегда отличен от нуля.

Обратимся к общему случаю односвязной области D. Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг D_0 принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ или, что равносильно, его производной $\omega' \in C^{\mu}(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ по условию $\omega(z_0) = 0$.

Теорема 4. *Пусть* $æ = \operatorname{Ind}_{\Gamma} G$, *так что функция* $a(t) = \arg G(t) - æ\arg t \in C^{\mu}(\Gamma)$, *и пусть* $X(z) = e^{A(z)}$, *где функция* $A \in C^{\mu}(\overline{D})$ *определяется как решение задачи Дирихле*

$$\operatorname{Im} A^+ = \frac{\pi}{2} - a; \quad \operatorname{Re} A(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} a(t)|\omega'(t)| d_1 t. \quad (4.13)$$

Тогда все решения задачи (4.1) в классе $C^{\mu}(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$\varphi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{\omega'(t)dt}{\omega(t) - \omega(z)} + \\ + X(z)p[\omega(z)], \quad p \in P_{-2æ}^0, \quad (4.14)$$

где функция g удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_{\Gamma} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q[\omega(t)]\omega'(t) dt = 0, \quad q \in P_{2æ-2}^0. \quad (4.15)$$

Задача (*R*) — задача Римана–Гильберта для уравнения (3.1)

Для уравнения

$$u_{\bar{z}\bar{z}} + \frac{a}{\rho}(u_{\bar{z}} + cu) - c^2 u = f \quad (3.1)$$

в классе

$$u, e^{-\omega}(u_{\bar{z}} + cu) \in C^{\mu}(\overline{D}), \quad 0 < \mu < 1 - 2/p, \quad (5.1)$$

ставится краевая задача типа Римана–Гильберта:

$$\operatorname{Re} G_1 u\big|_{\Gamma} = g_1; \ \operatorname{Re} G_2(u_{\bar{z}} + cu)\big|_{\Gamma} = g_2, \quad (5.2)$$

где функции G_k, $g_k \in C^{\nu}(\Gamma)$, причем G_1 и G_2 всюду отличны от нуля.

Обозначим через R задачу (5.1), (5.2). Покажем, что задача R в вещественно-матричной форме эквивалентна задаче Пуанкаре (задаче P). Решение указанных задач представляется явной формулой, и исследуются вопросы разрешимости, а также их единственности в классе (5.1).

Из интегрального представления (3.4) видно, что аналитические функции φ, ψ определяют по u однозначно и восстанавливают по формулам

$$\varphi_2 = \mathrm{e}^{-h_0-h_1-a_0\omega}(u_{\bar z} + cu + \tilde f);$$
$$\varphi_1 = \mathrm{e}^{-h_0}[u - T(\mathrm{e}^{a_0\omega+h_1}\varphi_2) - T(\mathrm{e}^{a_0\omega+h_1}\tilde f)].$$

Следовательно, при $\mu < \mu_0$ соответствие между решением u уравнения (3.1) из класса (5.1) и парой аналитических в D функций $\varphi, \psi \in C^\mu(\bar D)$ будет взаимно однозначным.

Полагая

$$\tilde G_1 = G_1\mathrm{e}^{h_0}|_\Gamma; \quad \tilde G_2 = G_2\mathrm{e}^{h_0+h_1+a_0\omega}|_\Gamma, \qquad (5.3)$$

задача R редуцируется к эквивалентной задаче

$$\mathrm{Re}\tilde G_2\varphi_2|_\Gamma = g_2 + R_2\tilde f; \quad \mathrm{Re}\tilde G_1\varphi_1|_\Gamma - R_0\varphi_2 = g_1 + R_1\tilde f \qquad (5.4)$$

с ограниченными операторами $R_j{:}C^\mu(\bar D) \to C^\mu(\Gamma)$, действующими следующим образом:

$$R_0\varphi = G_1[T(\mathrm{e}^{h_1+a_0\omega}\varphi)]|_\Gamma;$$
$$R_1\varphi = G_1[T(\mathrm{e}^{a_0\omega+h_1}\varphi)]|_\Gamma; \quad R_2\varphi = G_2\varphi|_\Gamma .$$

Пусть $æ_k$ и $X_k(z)$ выглядят как в (4.5), (4.6) по отношению к $G = \tilde G_k$, $k = 1, 2$, и пространства $P_k(D)$ получаются из (4.8) для $X = X_k$.

С помощью теоремы 2 задача (5.4) решается последовательно.

Теорема 5. *Пусть* $æ_k = \mathrm{Ind}_\Gamma G_k$, $k = 1, 2$, *так что функция* $a_k(t) = \arg G_k(t) - æ_k \arg t \in C^\mu(\Gamma)$, *и пусть* $X_k(z) = \mathrm{e}^{A_k(z)}$, *где функция* $A_k \in C^\mu(\bar D)$ *определяется как решение задачи Дирихле:*

$$\mathrm{Im}A_k^+ = \frac{\pi}{2} - a_k;$$
$$\mathrm{Re}A_k(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma a_k(t)\,|\omega'(t)|\,d_1t, k = 1,2.$$

Тогда все решения задачи R *в классе* $C^\mu(\bar D)$ *описываются формулой:*

$$\varphi_k(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g_k(t)}{\tilde G_k(t)X_k^+(t)}\frac{\omega'(t)dt}{\omega(t)-\omega(z)} + $$
$$+ X_k(z)p[\omega(z)], \quad p \in P^0_{-2æ_k}, k = 1,2, \qquad (5.5)$$

где функция g_k *удовлетворяет условиям ортогональности:*

$$\int_\Gamma \frac{g_k(t)}{\tilde G_k(t)X_k^+(t)}\tilde q[\omega(t)]\omega'(t)dt = 0;$$
$$\tilde q \in P^0_{2æ_k-2}, k = 1,2. \qquad (5.6)$$

Задачи Пуанкаре (задача *P*)

Согласно (1.7) плоский случай уравнения Стокса, базирующийся на функциях потока $u_1(x, y)$ и функции $u_2(x, y)$ имеет вид (1.7), где η — материальная постоянная.

Подстановка $2\eta u_2 \to u_2$ переводит систему (1.7) в систему уравнений Бицадзе (B). Очевидно, что уравнения (1.7) всегда можно привести к уравнению (B). Поэтому в дальнейшем рассмотрим уравнение (0.1) с младшими матричными коэффициентами.

Тогда, уравнение (3.1) в матричной форме имеет вид

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + \frac{D}{2r^n}u_x + \frac{E}{2r^n}u_y + Ku = F \qquad (6.1)$$

с матричными младшими коэффициентами

$$D = \begin{pmatrix} -\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) - r^nc_1 & -\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) - r^nc_2 \\ \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) + r^nc_2 & \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) + r^nc_1 \end{pmatrix};$$
$$E = \begin{pmatrix} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) + r^nc_1 & -\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) - r^nc_2 \\ \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) + r^nc_2 & \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) + r^nc_1 \end{pmatrix}; \ F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

и матрицей $K = (k_{ij})$, $i, j = 1, 2$ с элементами

$$k_{11} = c_1\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) - c_2\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) + (c_1^2 - c_2^2)\,|z|^{n-1};$$
$$k_{22} = c_2\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) + c_1\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\alpha}a) + 2c_1c_2\,|z|^{n-1};$$
$$k_{12} = k_{21} = 0,$$

где $a \in C(\bar D)$, $c(z) = c_1(x, y) + ic_2(x, y)$ — аналитическая функция $z = r\mathrm{e}^{i\alpha}$ с правой частью $F \in C(\bar D)$. Следовательно, 2×2 — матричные коэффициенты $D, E, K \in C(\bar D)$.

Введя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \ C_0 = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}; \ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

запишем класс функций (5.1) в матричной форме:

$$u, \mathrm{e}^{-a_0\omega}\left(Au_x + B^Tu_y + C_0u\right) \in C^\mu(\bar D);$$
$$0 < \mu < 1 - 2/p, p > 2. \qquad (6.2)$$

Заметим, что A, B — матричные коэффициенты уравнения Бицадзе (0.1); B^T — транспонированная матрица B.

Для уравнения (6.1) в классе (6.2) ставится следующая задача Пуанкаре.

Задача *P*. *Найти решение уравнения (6.1) в классе (6.2), удовлетворяющее на* Γ *граничному условию*

$$p_1u_x + p_2u_y + qu|_{(x,y)\in\Gamma} = g(x, y), \qquad (6.3)$$

где $p_1, p_2, q, g \in C^\mu(\Gamma)$, *причем*

$$p_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G_2^0 & -G_2^1 \end{pmatrix}; \ p_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -G_2^1 & -G_2^0 \end{pmatrix};$$
$$q = \begin{pmatrix} G_1^0 & -G_1^1 \\ -G_2^0c_1 + G_2^1c_2 & -G_2^0c_2 + G_2^1c \end{pmatrix}; \ g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \mathrm{e}^{a_0\omega}g_2 \end{pmatrix}; \ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix};$$

p_j, $j = 1, 2$, q, ... — *действительные матричные функции размерности* 2×2; $g(x, y)$ — *действительный вектор, заданный на контуре* Γ.

Заметим, что $G_k = G_k^0 + iG_k^1, g = g_1 + ig_2$ — *коэффициенты правой части задачи* R *Римана–Гильберта.*

Теорема 6. *Пусть* $æ_k = \mathrm{Ind}_\Gamma G_k > 0$, $k = 1, 2$ *и в задаче* (P) *функции* p_j, $j = 1, 2, q$, $g \in C^\mu(\Gamma)$, $\mu = 1 - \dfrac{2}{p}$, $p > 2$, *и выполняются условия теоремы 5, а также разрешимости (5.6). Тогда задача Пуанкаре* (P) *в классе (5.2) имеет единственное решение, которое дается формулой (3.4), в которой произвольные аналитические функции* φ_k, $k = 1, 2$ *определяются формулами (5.5).*

Из теоремы 6 следует, что при $æ_k = \mathrm{Ind}_\Gamma G_k > 0$, $k = 1, 2$ и выполнении остальных условий теоремы задача (P) имеет единственное решение. Согласно теореме 5 при $æ_k = \mathrm{Ind}_\Gamma G_k \le 0$, $k = 1, 2$ решение задачи (P) не единственное, и размерность пространства решений равна $-2(æ_1 + æ_2 - 1)$. Значит, чтобы получить единственное решение задачи P надо дополнительно к условиям задачи P (для функции u и ее производной) добавить точечные условия

$$\begin{cases} u(z_j^1) = 0,\ j = 1, 2, \dots, -2æ_1 + 1, z_j^1 \in D; \\ u_{\bar z}(z_j^2) + c(z_j^2) u(z_j^2) = 0,\ j = 1, 2, \dots, -2æ_2 + 1, z_j^2 \in D. \end{cases} \tag{6.4}$$

где $z_j^k \ne z_s^k \left(j \ne s, k = 1, 2 \right)$.

Согласно теореме 5 при $æ_k \le 0$, а также $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и $G \in C^\nu(\Gamma)$ однородная задача Римана–Гильберта имеет ровно $-2æ_k + 1$ линейно независимых решений. Совокупность всех решений дается выражением

$$\varphi_k(z) = X_k(z)\left(c_0 z^{-2æ_k} + c_1 z^{-2æ_k - 1} + \dots + c_{-2æ_k} \right),\ k = 1, 2, \tag{6.5}$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{-2æ_k}$ — произвольные постоянные.

Неоднородная задача с граничным условием (5.4) безусловно разрешима, причем все ее решения в классе $C^\mu(\bar D)$ описываются формулой (5.5), выглядящей как

$$\varphi_k(z) = (Ig)(z) + X_k(z) p[\omega(z)], \quad p \in P^0_{-2æ_k},\ k = 1, 2, \tag{6.6}$$

где

$$(Ig)(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{g_k(t)}{\tilde G_k(t) X_k^+(t)} \frac{\omega'(t) dt}{\omega(t) - \omega(z)}.$$

Подчиним решение (6.6) задачи (6.2) условию (6.4). При $æ_k \le 0$, $k = 1, 2$ придем к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} P_{-2æ_k}(z_j^k) = -\dfrac{(Ig)(z_j^k)}{X(z_j^k)}; \\ j = 1, 2, \dots, -2æ_k + 1, z_j^k \in D, k = 1, 2, \end{cases} \tag{6.7}$$

где

$$P_{-2æ_k}(z_j^k) = c_0 \left(z_j^k \right)^{-2æ_k} + c_1 \left(z_j^k \right)^{-2æ_k - 1} + \dots + c_{-2æ_k};$$
$$j = 1, 2, \dots, -2æ + 1, z_j^k \in D, k = 1, 2,$$

а числа $c_0, c_1, \dots, c_{-2æ_k}$ — пока неизвестны.

Введя обозначения

$$\begin{cases} C^k = (c_0, c_1, \dots, c_{-2æ_k}); \\ f_j^k = -\dfrac{(Ig)(z_j^k)}{X(z_j^k)}; \\ F^k = (f_j^k, f_2^k, \dots, f_{-2æ_k}^k), k = 1, 2; \end{cases}$$

$$A_k^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1^k & z_2^k & z_3^k & \cdots & z_{-2æ_k}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(z_1^k\right)^{-2æ_k} & \left(z_2^k\right)^{-2æ_k} & \left(z_3^k\right)^{-2æ_k} & \cdots & \left(z_{-2æ_k}^k\right)^{-2æ_k} \end{pmatrix},\ k = 1, 2,$$

запишем систему уравнений (6.7) в матричной форме

$$A_k^T C^k = F^k, \tag{6.8}$$

в которой столбец C^k является столбцом неизвестных $\left(c_0, c_1, \dots, c_{-2æ_k} \right)^T$, $k = 1, 2$. Матрица A_k^T имеет определитель $\Delta_k = | A_k^T | \ne 0$, поскольку он является определителем Вандермонда. Следовательно, системы уравнений (6.7) или (6.8) имеют единственное решение, и оно представимо в виде

$$C^k = \left(A_k^T \right)^{-1} F^k,\ k = 1, 2. \tag{6.9}$$

Подставив установленные значения чисел $c_j = c_j^k$, $k = 1, 2$ в $P_{-2æ_k}$, найдем точное значение функций $\varphi_k(z)$, $k = 1, 2$ в (6.6) и построим однозначное решение задачи P случае $æ_k \le 0$, $k = 1, 2$.

Теорема 7. *Пусть* $æ_k \le 0$, $k = 1, 2$, *и выполняются условия теорем 1, 2, а также условия (6.4). Тогда задача Пуанкаре* (P) *для (6.1) в классе (6.2) имеет единственное решение, которое дается формулой (3.4), в которой произвольные аналитические функции* φ_k, $k = 1, 2$ *определяются формулами (5.5), постоянные* $c_0, c_1, \dots, c_{-2æ_k}$, *как решения алгебраической системы (6.8), определяются формулой (6.9).*

Литература

1. **Бицадзе А.В.** Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

2. **Фролов П.С.** О компонентах связности вещественных эллиптических систем на плоскости // Доклады АН СССР. 1968. Т. 181. № 6. С. 1350—1353.

References

1. **Bitsadze A.V.** Nekotorye Klassy Uravneniy v Chastnykh Proizvodnykh. M.: Nauka, 1981. (in Russian).

2. **Frolov P.S.** O Komponentakh Svyaznosti Veshchestvennykh Ellipticheskikh Sistem na Ploskosti. Doklady AN SSSR. 1968;181;6:1350—1353. (in Russian).

3. **Bochev P.B.** Analysis of Least-squares Finite Element Methods Muhammad Tahir, A.R. Davies for the Navier-Stokes Equations // Siam J. Numer. Anal. 1997. V. 34. No. 5. Pp 1817—1844.

4. **Tahir M., Davies A.R.** Stokes-Bitsadze problem. I // J. Mathematics. 2005. V. 32. Pp. 77—90.

5. **Tahir M.** The Stokes-Bitsadze System // J. Mathematics.1999. V. 32. Pp. 173—180.

6. **Солдатов А.П.** Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости // Известия РАН. Серия «Математика». 2006. Т. 70. № 6. С. 161—192.

7. **Vaitekhovich T.** Boundary Value Problems to Second Order Complex Partial Differential Equations in a Ring Domain // Proc. Math. Seminar. 2007. V. 2(10). Pp. 117—146.

8. **Oshorov B.B.** On Boundary Value Problems for the Cauchy-Riemann and Bitsadze Systems of Equations // Doklady Mathematics. 2006. V. 73(2). Pp. 241—244.

9. **Hizliyel S., Cagliyan M.** A Boundary Value Problem for Bitsadze Equation in Matrix Form // Turkish J. Math. 2011. V. 35(1). Pp. 29—46.

10. **Davies A.R., Devlin J.** On Corner Flows of Oldroyd-B Fluids // J. Non-newtonian Fluid Mech. 1993. V. 50. Pp. 173—191.

11. **Солдатов А.П., Расулов А.Б.** Уравнение Бицадзе с сильными особенностями в младших коэффициентах // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 238—248.

12. **Rasulov A.B., Fedorov Yu.S., Sergeeva A.M.** Integral Representations of Solutions for the Bitsadze Equation with the Set of Supersingular Points in the Lower Coefficients // Proc Intern. Conf. Appl. and Eng. Math. 2019. Pp. 13—17.

13. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

14. **Солдатов А.П.** Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальная направления. 2017. V. 63(1). Pp. 1—189.

3. **Bochev P.B.** Analysis of Least-squares Finite Element Methods Muhammad Tahir, A.R. Davies for the Navier-Stokes Equations. Siam J. Numer. Anal. 1997;34; 5:1817—1844.

4. **Tahir M., Davies A.R.** Stokes-Bitsadze problem. I. J. Mathematics. 2005;32:77—90.

5. **Tahir M.** The Stokes-Bitsadze System. J. Mathematics.1999;32:173—180.

6. **Soldatov A.P.** Ellipticheskie Sistemy Vtorogo Poryadka v Poluploskosti. Izvestiya RAN. Seriya «Matematika». 2006;70;6:161—192. (in Russian).

7. **Vaitekhovich T.** Boundary Value Problems to Second Order Complex Partial Differential Equations in a Ring Domain. Proc. Math. Seminar. 2007;2(10):117—146.

8. **Oshorov B.B.** On Boundary Value Problems for the Cauchy-Riemann and Bitsadze Systems of Equations. Doklady Mathematics. 2006;73(2):241—244.

9. **Hizliyel S., Cagliyan M.** A Boundary Value Problem for Bitsadze Equation in Matrix Form. Turkish J. Math. 2011;35(1):29—46.

10. **Davies A.R., Devlin J.** On Corner Flows of Oldroyd-B Fluids. J. Non-newtonian Fluid Mech. 1993; 50:173—191.

11. **Soldatov A.P., Rasulov A.B.** Uravnenie Bitsadze s Sil'nymi Osobennostyami v Mladshikh Koeffitsientakh. Differentsial'nye Uravneniya. 2018;54;2:238—248. (in Russian).

12. **Rasulov A.B., Fedorov Yu.S., Sergeeva A.M.** Integral Representations of Solutions for the Bitsadze Equation with the Set of Supersingular Points in the Lower Coefficients. Proc Intern. Conf. Appl. and Eng. Math. 2019:13—17.

13. **Muskhelishvili N.I.** Singulyarnye Integral'nye Uravneniya. M.: Nauka, 1968. (in Russian).

14. **Soldatov A.P.** Singulyarnye Integral'nye Operatory i Ellipticheskie Kraevye Zadachi. I. Sovremennaya Matematika. Fundamental'naya Napravleniya. 2017;63(1): 1—189.

Сведения об авторах:

Расулов Абдурауф Бабаджанович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: RasulovAB@mpei.ru
Федоров Юрий Сергеевич — доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: FedorovYS@mpei.ru

Information about authors:

Rasulov Abdurauf B. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: RasulovAB@mpei.ru
Fedorov Yuriy S. — Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: FedorovYS@mpei.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *23.07.2021*
The article received to the editor: *23.07.2021*