
1.2. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ (ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ) (1.2.2)

УДК 621.396

DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-133-144

Оценка потенциальной точности некоторых параметров орбит по угловым измерениям: двумерная модель

Ю.А. Горицкий, А.И. Захарова

Рассмотрен вопрос об оценке по угловым измерениям некоторых параметров орбит космического тела. Вопреки существующему представлению о непригодности угловых измерений для получения практически интересных точностей, показано, что если орбита такова, что место падения находится в окрестности наблюдателя, то такие параметры, как точка и время приземления, можно установить с вполне приемлемой точностью.

Описано достаточно простое средство оценки точности путем сведения к анализу на плоскости. Анализ опирается на несколько моментов. Выделяется семейство неблагоприятных для наблюдателя орбит, и на этом семействе проходит анализ (это орбиты, плоскость которых касается земной параллели наблюдателя, при этом точка касания является точкой пересечения траекторий наблюдателя и космического тела). Обоснована простая приближенная плоская модель, в которой истинное движение наблюдателя без изменения его скорости заменено движением в плоскости орбиты. Информация о точке падения содержится в наблюдениях при снижении высоты, что позволяет в режиме снижения рассчитать ускорение свободного падения константой. Модель движения упрощена по сравнению с движением по Кеплеру. В полярной системе координат получена простая схема движения. Необходимость в решении дифференциального уравнения, связанного с изменением ускорения, отпадает. Выведена формула измерения, учитывающая кривизну Земли и широту наблюдателя, и добавлены параметры, определяющие анализируемую схему: расстояние до точки падения, угол и момент падения, горизонтальная скорость. Анализ точности выполнен с помощью матрицы Фишера. В результате получена приближенная задача на плоскости с 4-мя параметрами против задачи в трехмерном пространстве с 7-ю параметрами. Трудности с точностью оценки смещения и момента приземления в модели сохранены и проанализированы. Точность оценена не анализом алгоритма обработки, а использованием понятия информации Фишера и многомерного информационного неравенства Рао-Крамера.

Ключевые слова: угловые измерения, параметры орбит, неблагоприятные орбиты, точка и момент приземления, точность оценивания, матрица Фишера.

Для цитирования: Горицкий Ю.А., Захарова А.И. Оценка потенциальной точности некоторых параметров орбит по угловым измерениям: двумерная модель // Вестник МЭИ. 2022. № 5. С. 133—144. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-133-144.

Estimating the Potential Accuracy of Some Orbital Parameters from Angular Measurements: a 2D Model

Yu.A. Goritsky, A.I. Zakharova

The problem of estimating some parameters of a cosmic body orbits from angular measurements is considered. Contrary to the existing opinion that angular measurements are unsuitable for obtaining accuracies that are of practical interest, it is shown that, if the orbit is such that the impact place is in the vicinity of the observer, then such parameters as the impact point and time can be determined with quite acceptable accuracy.

A fairly simple means for evaluating the accuracy of the "motion-measurement" process by reducing it to an analysis in a plane is described. The analysis is based on several principles. A family of orbits unfavorable to the observer is singled out, and an analysis is performed on this family. These are orbits whose plane touches the observer's Earth parallel, with the touching point being the intersection point of the observer and cosmic body trajectories. The article substantiates a simple approximate plane model, in which the observer's true motion is replaced without changing its velocity by motion in the orbit plane. Information about the impact point is contained in the observations when the height decreases, which makes it possible to consider the gravity acceleration of as a constant in the descending mode. The motion model is simplified compared with the Keplerian motion: a simple motion scheme is obtained in the polar coordinate system. As a result, it becomes unnecessary to solve the differential equation representing the change in acceleration. A measurement formula that takes into account the Earth curvature and the observer latitude is derived, and the parameters determining the analyzed scheme are added: the distance to the impact point, incidence angle and impact moment, and horizontal velocity. The model accuracy is analyzed using the Fisher matrix. As a result, an approximate problem on a plane with four parameters is obtained instead of a problem in 3D space with seven parameters. The difficulties with the accuracy of estimating the displacement and impact moment in the model remain, and they are analyzed. The accuracy is estimated using the concept of Fisher information and the multidimensional Rao-Kramer information inequality instead of analyzing the processing algorithm.

Key words: angular measurements, orbital parameters, unfavorable orbits, impact point and moment, estimation accuracy, Fisher matrix.

For citation: Goritsky Yu.A., Zakharova A.I. Estimating the Potential Accuracy of Some Orbital Parameters from Angular Measurements: a 2D model. Bulletin of MPEI. 2022;5:133—144. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-133-144.

Введение

Рассмотрен вопрос о возможности оценки смещения орбиты космического тела (КТ) по угловым измерениям. Задача оценивания параметров орбит космических тел по угловым измерениям не нова и решалась с помощью различных подходов [1 — 13], однако, с совершенствованием технических средств измерений, вычислительных возможностей, изменением требований к точности она получает новый виток развития.

Изучены актуальная задача оценки смещения орбиты (расстояния от измерителя до точки падения) и возможность получения практически интересной точности в ней.

Среди разработчиков угломерных систем есть представление [1, 5] о непригодности их для получения практически интересных точностей в силу отсутствия измерения дальности. Однако это не совсем так: если орбита такова, что место падения находится в окрестности наблюдателя, то некоторые важные параметры, такие как точка и время приземления, можно установить с вполне приемлемой точностью.

В [14] описано достаточно простое средство оценки точности процесса «движение–измерение» сведением к анализу его на плоскости. Задача в [14] решается с опорой на несколько особенностей.

1. Выделяется семейство «плановых» (термин условный) орбит, заканчивающихся в заданной окрестности наблюдателя.

2. Среди «плановых» выбирается семейство «неблагоприятных» для наблюдателя орбит. Это те орбиты, для которых измерительная информация минимальна, а именно: изменения азимута пренебрежимо малы, информация о параметрах орбиты содержится только в измерениях угла места, т. е. орбиты, плоскость которых касается земной параллели наблюдателя (он движется в силу вращения Земли), и точка касания является точкой пересечения траекторий наблюдателя и КТ. Плановые орбиты получаются из неблагоприятных прибавлением ненулевого смещения точки падения. На семействе плановых орбит выполняется анализ.

3. Обосновывается простая приближенная плоская модель, в которой истинное движение наблюдателя (вне плоскости орбиты КТ) без изменения его скорости заменяется движением в плоскости орбиты КТ по окружности земной сферы.

В настоящей работе подход [14] продолжен. Выведена новая четвертая особенность: нас интересует смещение места приземления относительно наблюдателя. Информация о точке падения содержится в наблюдениях при снижении высоты, т. е. при малых (относительно радиуса Земли) изменениях расстояния до центра планеты. В этом режиме константами высчитываются ускорение свободного падения и угловая скорость, модель движения упрощается по сравнению с движением по Кеплеру. В полярной системе координат получаем простую схему движения: радиальные перемещения характеризуются начальной скоростью и постоянным

ускорением, а угловые — горизонтальной скоростью. Необходимость в решении уравнений, связанных с изменением ускорения, отпадает. Однако, учет кривизны поверхности Земли и проблема с точностью оценки смещения и момента приземления остаются. В результате получается аппроксимация задачи анализа на плоскости с четырьмя параметрами против задачи в трехмерном пространстве с 7-ю параметрами. Возможная точность оценивается не анализом алгоритма обработки (которого нет), а использованием понятия информации Фишера и многомерного информационного неравенства Рао–Крамера.

Цель работы: описать достаточно простое средство оценки возможностей угломерной системы (при орбитах с высотой не выше сотен км) и доказать с помощью расчетов, что практически интересные точности возможны.

В разделах работы коротко описаны основные моменты из [14] о сведениях к задаче на плоскости. Принято допущение о постоянстве силы земного притяжения, выведена формула измерения, учитывающая кривизну Земли и широту наблюдателя, и добавлены параметры, определяющие анализируемую схему: момент времени и расстояние до точки падения, угол падения и горизонтальная скорость. Конкретизирована матрица Фишера. Даны результаты расчетов, показывающие возможность получения практически интересных точностей. В приложении содержатся формульные выкладки.

Сведение к плоской схеме

Предполагается, что наземный наблюдатель в дискретные моменты времени может измерять только угловые координаты объекта (азимут и угол места). Объект находится в свободном движении со скоростью, меньшей первой космической, с высотами сотен километров. Решается вопрос о том, можно ли по угловым измерениям оценить точку и момент приземления с практически интересной точностью. Для ответа учтем лишь основные факторы, пренебрегая многочисленными другими, влияющими на точность: считаем, что движение определяется только силой тяжести, измерения производятся с дискретностью Δt и случайной погрешностью, стандартное отклонение которой σ .

Наиболее благоприятные для наблюдателя орбиты.

Разработчикам измерительных систем необходимо знать, какую точность для каких орбит можно получить. Эти вопросы могут прояснить оценки точности, основанные на информационном неравенстве Рао–Крамера и на понятии «информация Фишера». На практике особо выделяют класс траекторий, направленных в сторону наблюдателя, для которых весьма характерными считаются малые изменения азимута. Данная ситуация имеет место, когда движение наблюдателя, связанное с вращением Земли, происходит вблизи плоскости орбиты. В этих случаях задачу можно приближенно счи-

тать двумерной, проецируя движение наблюдателя на плоскость орбиты, а единственным источником информации — измерения только одного угла — угла места. Ситуации с малыми изменениями азимута интересны также тем, что они наименее благоприятны для оценки параметров движения, потому анализ их точности может служить ориентиром для использования угловых измерительных систем.

У т о ч н е н и е. Во-первых, нас интересуют орбиты, которые могут закончиться в окрестности наблюдателя. Во-вторых, семейство орбит, заканчивающихся в точке наблюдателя, и в этой точке окружность наблюдателя касается плоскости орбиты, являются наиболее неблагоприятными в том смысле, что иначе информации будет больше, и тогда и качество оценок должно быть выше. Действительно, если в момент падения в эту точку вектор скорости наблюдателя не лежит в плоскости орбиты, то измерительной информации по орбите будет больше (чем в случае касания) за счет азимутальных измерений. Если же точку падения отодвинуть от точки наблюдателя, то диапазон изменения угла места увеличится, и опять будет увеличение информации. Если реверсировать время, то можно сформулировать следующим образом: неблагоприятны для измерителя те траектории, которые исходят из точки наблюдения, и орбитальная плоскость проходит через вектор скорости наблюдателя. В этом случае взаимное движение выглядит следующим образом: из точки касания начинаются одновременно два движения: наблюдатель движется по окружности-параллели с широтой φ_H , а КТ движется в орбитальной плоскости.

Схема плоской задачи.

Пусть точка Н наблюдения (рис. 1) находится в плоскости орбиты и является неподвижной (в дальнейшем движение учтено). Объект движется по эллипсу, главная ось которого ОА составляет угол $\varphi + \gamma$ относительно направления на точку Н. При $\gamma = 0$ имеем «неблагоприятную» орбиту (γ — угол смещения $\Delta = \gamma R$ точки

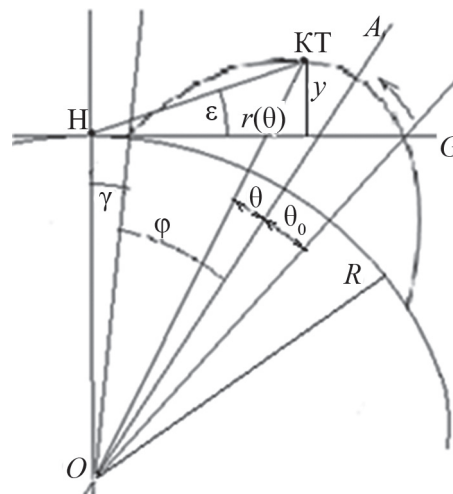


Рис. 1. Схема плоской задачи

падения относительно наблюдателя; R — радиус земной сферы).

Орбита характеризуется трехмерным параметром $(\gamma + \varphi, p, e)^T$, где p — фокальный параметр; e — эксцентриситет орбиты. Уравнение орбиты в полярных координатах (например, [3]) выглядит следующим образом:

$$r(\theta) = \frac{p}{(1 - e \cos \theta)},$$

где $r(\theta)$ — расстояние до центра Земли; θ — истинная аномалия (угол направления на объект, отсчитываемый от направления на апогей).

Положение объекта определяется расстоянием $r(\theta)$ от него до центра Земли и углом θ .

Измерения угла места начинаются после момента t_0 входа в зону видимости, т. е. когда объект выходит из-за горизонта G . Угол места $\varepsilon = \varepsilon(t)$ в любой момент $t \geq t_0$ определяется очевидным соотношением: тангенс угла — есть отношение катетов (см. рис. 1):

$$\operatorname{tg}(\varepsilon) = \frac{r(\theta) \cos(\varphi + \gamma - \theta) - R}{r(\theta) \sin(\varphi + \gamma - \theta)}, \quad (1)$$

где $\theta = \theta(t)$ — аномалия в момент t измерения; $d\theta/dt = \omega(t)$ — угловая скорость,

$$g(t) = \frac{\mu M}{(R + \Delta r(t))^2}; \quad \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{p\mu}}{(R + \Delta r(t))^2}, \quad (2)$$

где μ — гравитационная постоянная; M, R — масса и радиус Земли.

Угол места измеряем со случайной ошибкой δ , средним 0 и стандартным отклонением $\sigma_\varepsilon = 0,1^\circ$. Результат измерения — $x = \varepsilon + \delta$.

Перенос движения наблюдателя в плоскость орбиты.

Простые соображения показывают, что существует фиктивное движение измерителя (по окружности земной сферы S в орбитальной плоскости), эквивалентное

(в смысле получения углов места) истинному движению (вне орбитальной плоскости). Для этого достаточно, чтобы в любой момент времени два расстояния: от КТ до фиктивного движения и от КТ до истинного движения были одинаковы. С помощью эквивалентного фиктивного движения $\Delta\varphi(t)$ задача сводится к плоской. Однако, фиктивное эквивалентное движение зависит от точки расположения КТ.

Если заменить равномерное движение наблюдателя вдоль своей параллели на движение по окружности S сферы в орбитальной плоскости, сохранив его линейную скорость

$$V_H = \omega_3 R \cos \varphi_H,$$

то получим с хорошей точностью значения измерений наблюдателя, независимые от КТ (ω_3 — угловая скорость вращения Земли). Заметим, что на экваторе ($\varphi_H = 0$) и северном полюсе ($\varphi_H = \pi/2$) данное фиктивное движение является эквивалентным. Хорошая точность ожидаема, поскольку траектория наблюдателя касается окружности земной сферы в плоскости орбиты.

В [16] оценено качество указанного приближения. Оба движения, истинное и фиктивное, приходят одновременно в общую точку H (для «неблагоприятной» орбиты $\gamma = 0$). Определяется разность длин двух отрезков, исходящих из точки КТ на истинную и фиктивную траектории. Если длины в любой момент одинаковы, т. е. их разность $\Delta d = 0$, то, в силу сферичности поверхности, углы места равны. Если $\Delta d \neq 0$, то вычисляются величины погрешности $\Delta\varepsilon(t, d, \varepsilon)$ измеряемого угла места и сдвига $\Delta l(t, d, \varepsilon)$ фиктивного наблюдателя — сдвига, приводящего к истинному значению угла места. Необходимые формулы приведены в [16]. В таблице 1 даны расчетные значения, в каждой ячейке указаны Δl и $\Delta\varepsilon$, зависящие от расположения КТ (угол ε и дальность d) и наблюдателя (время t движения до точки H). Значение широты наблюдателя $\varphi_H = 60^\circ$.

Таблица 1

Расчетные значения (слева) в метрах и (справа) в угловых минутах

t, c	$\varepsilon, ^\circ$	$d, км$							
		100		300		600		1000	
		Δl	$\Delta\varepsilon$	Δl	$\Delta\varepsilon$	Δl	$\Delta\varepsilon$	Δl	$\Delta\varepsilon$
100	12	0,13	0,0010	0,15	0,0004	0,15	0,0002	0,15	0,0002
	48	0,14	0,0036	0,15	0,0010	0,15	0,0006	0,15	0,0004
	72	0,17	0,0060	0,16	0,0020	0,16	0,0010	0,15	0,0006
300	12	2,90	0,0210	3,70	0,0090	3,80	0,0050	3,90	0,0050
	48	3,35	0,0860	3,84	0,0330	3,98	0,0170	4,04	0,0100
	72	4,65	0,1520	4,46	0,0490	4,31	0,0230	4,23	0,0140
600	12	19,0	0,1260	25,0	0,0600	28,0	0,0330	30,0	0,0210
	48	23,0	0,5900	29,5	0,2500	30,6	0,1300	31,5	0,0800
	72	35,9	1,1700	36,8	0,4000	35,0	0,1900	34,5	0,100

Видно, что смещение $\Delta l(t, d \varepsilon)$ относительно эквивалентных точек меньше 5 м в диапазоне до 300 с и 72° при дальностях от 100 до 1000 км. Если Δl перевести в погрешность $\Delta \varepsilon$ по углу места, то за 300 с до точки O при дальности 300 км и $\varepsilon = 48^\circ$ получим $\Delta l = 3,84$ м, что означает $\Delta \varepsilon \approx 0,033'$, что меньше среднеквадратического отклонения измерения в сотни раз.

Фиктивное движение учитывается тем, что к неизвестному параметру φ в (1) добавляется линейно изменяющаяся во времени (со скоростью $\omega_3 \cos \varphi_H$) составляющая $\Delta \varphi(\tau)$, $\Delta \varphi(\tau) = \pm \tau \omega_3 \cos \varphi_H$, τ — время до момента падения («-», если КТ на западе, и «+» — если на востоке).

Функция измерения

Предположение о постоянстве ускорения силы тяжести.

Известно, что основная часть информации о точке приземления содержится в наблюдениях, сделанных на этапе снижения объекта, т. е. на малых (относительно радиуса Земли) высотах, где изменения $\Delta r(t)$ расстояния до центра Земли малы. Поскольку ускорение $g(t)$ силы тяжести и угловая скорость $\omega(t)$ КТ определяются формулами (2), указанные характеристики принимают приближенно постоянными:

$$h(\tau) = V_y \tau - g \tau^2 / 2; \quad r(\tau) = R + V_x \tau - g \tau^2 / 2; \quad V_x = \omega R,$$

где $h(\tau)$ — высота; τ — время, оставшееся до падения и отсчитываемое от любого фиксированного момента t_i , например, момента первого измерения t_0 ; V_y — вертикальная составляющая скорости в момент падения; g — ускорение свободного падения; V_x — горизонтальная скорость.

Измеряемый угол места по (1).

Расположим наблюдателя H в точке приземления (в соответствии с предположением о наиболее неблагоприятных орбитах). Затем точку H сместим на величину Δ расстояния до точки падения (соответствующий угол по земной дуге $\gamma = \Delta/R$), а также сделаем эту точку подвижной из-за вращения Земли.

Временно считаем смещение $\Delta = 0$, т. е. рассмотрим неблагоприятные для наблюдателя орбиты. Максимум высоты находится на угловом расстоянии θ_0 от наблюдателя:

$$\theta_0 = T \omega = \frac{V_y V_x}{g R},$$

где V_x — горизонтальная скорость тела; $\omega = V_x/R$ — угловая скорость; V_y — вертикальная скорость в момент приземления; $T = V_y/g$ — время движения от апогея до приземления.

В (1) разность $\varphi - \theta(\tau)$ — угол между объектом и наблюдателем, если τ — время до момента падения, то

$$\varphi - \theta(\tau) = \omega \tau.$$

Формула (1) дает значение тангенса для наблюдаемого угла. Используя приближения

$$\cos(\omega \tau) = 1 - (\omega \tau)^2 / 2 + O(\tau^4); \quad \sin(\omega \tau) = \omega \tau + O(\tau^3),$$

после простых преобразований, приведенных в Приложении А, получим:

$$\operatorname{tg} \varepsilon(\tau) = \frac{V_y \tau - g^* \tau^2 / 2 + O(\tau^3)}{V_x \tau (1 + O(\tau))} \approx \frac{V_y \tau - g^* \tau^2 / 2}{V_x \tau}, \quad (3)$$

$$\text{где } g^* = g + R \omega^2 = g + \frac{V_x^2}{R}; \quad O(\tau) = \frac{V_y}{R} \tau \left(1 - \frac{g \tau}{2 V_y} \right).$$

Приближенная формула получается такой же, как при плоской поверхности при постоянном вертикальном ускорении (параболическое движение, рис. 2). Отличие состоит в появлении в вертикальном ускорении дополнительного слагаемого V_x^2/R (центростремительного ускорения), учитывающего сферичность Земли.

В знаменателе (3) стоит расстояние $V_x \tau$ до точки падения, когда остается время τ до падения. Учтем $\Delta \neq 0$ и движение наблюдателя; тогда к расстоянию $V_x \tau$ добавятся смещение Δ , путь $V_H \tau$ и скорость $V_H = \pm \omega_3 R \cos \varphi_H$ наблюдателя. После деления на $V_x \tau$ получим окончательную аппроксимацию:

$$\operatorname{tg} \varepsilon(\tau) = \frac{V_y \tau - g^* \tau^2 / 2 + O(\tau^3)}{\Delta + V_H \tau + V_x \tau (1 + O(\tau))} \approx \frac{V_y \tau - g^* \tau^2 / 2}{\Delta + (V_H + V_x) \tau} = \frac{\operatorname{tg} \alpha^* - \frac{g^* \tau}{V_\Sigma}}{\frac{\Delta}{V_\Sigma \tau} + 1}. \quad (4)$$

Здесь $g_1^* = g + \frac{V_\Sigma^2}{R}$; $\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{V_y}{V_\Sigma}$; $V_\Sigma = V_x + V_H$; V_H — скорость наблюдателя.

Из (4) видно влияние смещения Δ , сферичности Земли $\left(g + \frac{V_\Sigma^2}{R} \right)$, широты наблюдателя и направления движения КТ.

Параметризация.

Примем модель измерения согласно (4). Неизвестные параметры — Δ , τ , $\operatorname{tg} \alpha$, V_x . Основная трудность со-

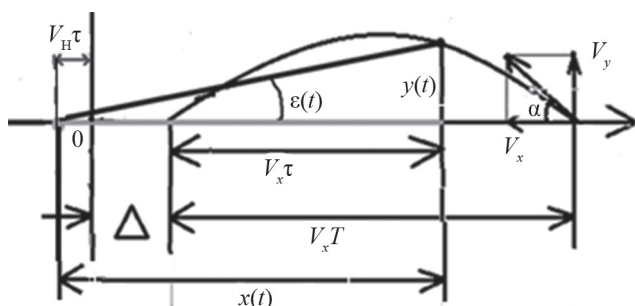


Рис. 2. Параболическое движение

стоит в оценке параметров Δ и τ . В результатах расчетов даны результаты по параметрам Δ , τ , tga , поскольку V_x оценивается хорошо, и оценка получаемой точности известна [14]. Производные для матрицы Фишера прописаны в Приложении С.

Матрица Фишера

Информационная матрица Фишера

$$F(a) = M \left[\left(\frac{d \ln p(x; a)}{da} \right)^T \left(\frac{d \ln p(x; a)}{da} \right) \right],$$

где M , T — символы математического ожидания и транспонирования; a — неизвестный векторный параметр; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — совокупность наблюдений.

Если измерения углов принять независимыми и нормальными

$$\ln p(x; a) = \ln(2\pi\sigma^2)^{-n/2} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \varepsilon_i(a))^2,$$

то для матрицы Фишера справедливо выражение

$$F(a) = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^n (\partial \varepsilon_i / \partial a)^T (\partial \varepsilon_i / \partial a),$$

где слагаемое под знаком суммы — матрица Фишера для момента t_i ; $(\partial \varepsilon_i / \partial a)$ — вектор-строка.

В соответствии с неравенством Рао–Крамера в обратной матрице

$$[r_{j,k}] = R(a) = F^{-1}(a)$$

диагональные элементы являются нижними границами для дисперсий несмещенных оценок

$$D\hat{a}_j \geq r_{j,j}.$$

Условия регулярности для справедливости неравенства в нашем случае, очевидно, выполняются. Вектор-строка производных имеет размерность 3:

$$\frac{\partial \ln p(x; a)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \varepsilon_i(a)) \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial a_1}, \sum_{i=1}^n (x_i - \varepsilon_i(a)) \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial a_2}, \sum_{i=1}^n (x_i - \varepsilon_i(a)) \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial a_3} \right).$$

Матрица Фишера обладает значениями

$$c_{j,k} = \frac{1}{\sigma^4} M \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \varepsilon_i(a)) \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial a_j} \sum_{s=1}^n (x_s - \varepsilon_s(a)) \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial a_k} \right) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial a_j} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial a_k}.$$

Производные $(\partial \varepsilon_i / \partial a)$ функций выведены из соотношения (4), и при фиксированном $t = t_i$ их можно выписать в явном виде (Приложение С).

Результаты расчетов

Информация Фишера о параметре смещения в одном наблюдении.

Из геометрических соображений ясно, что в угловых наблюдениях о параметре Δ информации тем больше, чем ближе наблюдаемый объект находится к измерителю. Для того, чтобы грамотно выбрать наблюдения для оценки параметра, данная зависимость анализируется количественно.

В приложении А дана формула (П2) для информации Фишера $I_\Delta(\tau)$ в одном наблюдении, как функция τ :

$$I_\Delta(\tau) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} \varepsilon_\tau \right)^2 = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \left[\frac{\sin^2 \varepsilon_\tau}{(\text{tga} - g\tau/2V_x) V_x \tau} \right]^2.$$

При уменьшении времени до момента падения τ информация увеличивается как τ^2 . Отсюда практический вывод: оценивать смещение Δ нужно по наблюдениям, как можно более поздним. На рисунке 3 изображены зависимости от τ при различных параметрах.

Расчетные характеристики.

Оценки стандартных отклонений, полученных по всем наблюдениям, сведены в табл. 2.

По результатам можно сделать следующие выводы. Точность по месту приземления для некоторых орбит (с малой скоростью и высокими) можно получить порядка сотен метров. Выделены значения, не превышающие 500 м: 480, 224, 132, 78 и др. Выделены точности, по моменту приземления не превосходящие 10 с.

О влиянии движения измерителя.

В приведенных расчетах предполагается, что наблюдатель располагается на широте $\varphi_H = 60^\circ$, что означает его движение со скоростью $V_H \approx 250$ м/с. В таблице 3 даны результаты при встречном движении наблюдателя и КТ. Сравнение результатов табл. 2, 3 показывает увеличение погрешностей неизвестных параметров (рост скорости сближения приводит к уменьшению времени наблюдения).

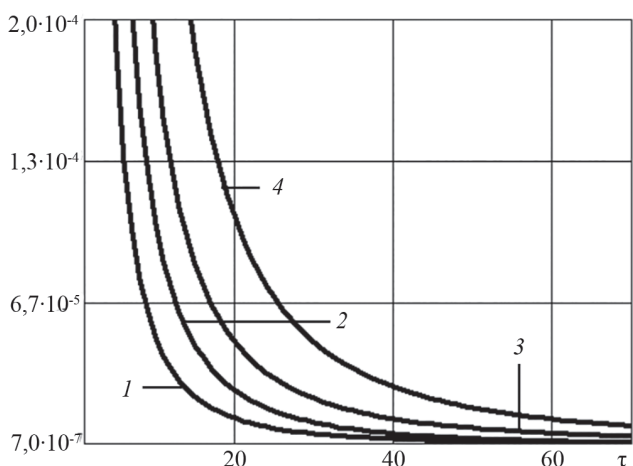


Рис. 3. Информация Фишера $I_\Delta(\tau)$ относительно Δ при различных V и α :

1 — 3 км/с; 24° ; 2 — 2 км/с; 24° ; 3 — 3 км/с; 48° ; 4 — 2 км/с; 48°

Таблица 2

Оценка стандартной ошибки по Δ , τ и tga по всем наблюдениям (неподвижный наблюдатель)

V , км/с	Параметры	α , °					
		12	24	36	48	60	72
1	T , с	42	82	119	151	176	193
	τ_3 , с	15	20	20	20	20	20
	t_{\max} , с	27	62	99	131	156	173
	t_0	1	2	2	2	2	1
	d_0 , км	42	76	97	101	88	60
	N	6	13	20	26	31	35
	σ_Δ , м	—	480	224	132	78	45
	σ_τ , с	—	11	6	4	3	1
2	σ_{tga}	0,13	0,06	0,04	0,03	0,03	0,02
	T , с	84	165	239	303	353	387
	τ_3 , с	15	20	20	20	20	20
	t_{\max} , с	69	145	219	283	333	367
	t_0	6	9	10	9	6	3
	d_0 , км	166	303	388	406	353	240
	N	13	28	42	55	66	73
	σ_Δ , м	—	549	305	174	108	82
3	σ_τ , с	—	14	9	5	3	3
	σ_{tga}	0,09	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02
	T , с	127	248	359	454	529	581
	τ_3 , с	15	20	20	20	20	20
	t_{\max} , с	112	228	339	434	509	561
	t_0	16	27	32	28	19	9
	d_0 , км	373	682	873	913	795	539
	N	20	41	62	82	99	111
5	σ_Δ , м	—	656	352	212	144	113
	σ_τ , с	—	—	10	6	4	4
	σ_{tga}	0,05	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02
	T , с	212	414	599	757	883	969
	τ_3 , с	15	20	20	20	20	20
	t_{\max} , с	197	394	579	737	863	949
	t_0	59	105	125	116	81	36
	d_0 , км	1037	1894	2424	2535	2208	1498
5	N	28	58	91	125	157	183
	σ_Δ , м	—	1050	530	319	232	190
	σ_τ , с	—	—	17	10	8	7
	σ_{tga}	0,06	0,05	0,03	0,02	0,02	0,02

Примечание: T — полное время движения (от 42 до 970 с); τ_3 — время запаса (время от момента принятия решения до момента приземления — 20...30 с); t_{\max} — момент времени, в который принимается решение (отсчитывается от момента начала движения); t_0 — момент, с которого начинаются наблюдения за движением; d_0 — полное расстояние (от 42 до 1500 км); N — количество наблюдений; σ_Δ , σ_τ , σ_{tga} — расстояния Δ до точки падения, момента приземления τ и тангенса угла падения tga . Результаты приведены для различных орбит, задаваемых скоростью V и углом α в момент приземления, Δ — расстояние до измерителя в момент приземления, $\Delta = 1000$ м.

Границы стандартных ошибок для Δ , τ и $\text{tg}\alpha$ (встречное движение)

V , км/с	Параметры	α , °					
		12	24	36	48	60	72
1	σ_{Δ} , м	—	754	339	206	131	97
	σ_{τ} , с	—	17	8	6	4	3
	$\sigma_{\text{tg}\alpha}$	0,2	0,07	0,04	0,03	0,03	0,02
2	σ_{Δ} , м	—	836	339	195	146	98
	σ_{τ} , с	38	23	9	5	5	3
	$\sigma_{\text{tg}\alpha}$	0,092	0,06	0,03	0,02	0,02	0,02
3	σ_{Δ} , м	—	781	398	278	189	133
	σ_{τ} , с	—	20	11	9	7	5
	$\sigma_{\text{tg}\alpha}$	0,08	0,04	0,02	0,02	0,02	0,02

В таблице 4 приведены результаты при движении в одну сторону наблюдателя и КТ. Сравнение таблиц 2 и 4 демонстрирует уменьшение погрешностей.

Определение информативной тройки.

Определим тройку наиболее информативных наблюдений. Моменты измерений t_0 и t_{max} фиксированы, третий, промежуточный момент t_k подбираем. На рис. 4 показаны значения границ для среднеквадратических погрешностей σ_{Δ} , (это квадратные корни из диагональных элементов матрицы, обратной к матрице Фишера). Характеризуем указанный момент временем $\tau_k = \tau - k\Delta t$, оставшимся до падения (τ — время до падения в первый момент t_0 измерения после появления над горизонтом; $\tau_k/\tau = (\tau - k\Delta t)/\tau$ — относительное время до падения; $0 < \tau_k/\tau < \tau$ — отнесенное к полному времени τ . Минимум означает наилучшую тройку из просмотренных. Расчеты сделаны для трех орбит со скоростями 2, 3 и 5 км/с, углом 48° и $\Delta = 2000$ м. Для угловых измерений $\sigma_e = 6'$. Горизонтальная шкала времени дана в относительных единицах. Справа находятся начальные наблюдения, слева — близкие к моменту падения.

В таблице 5 представлены оценки по найденным тройкам наблюдений с помощью матрицы Фишера.

Как и ожидалось, все значения в табл. 5 превышают полученные по всем наблюдениям (табл. 2). Так, при орбитах $V_x = 1$ км/с и $\alpha = 24, 36, 48^\circ$ имеем ошибки по смещению Δ : 822, 452, 303 м против 480, 224, 132 м.

О влиянии ошибок в скорости V_x .

В качестве примера оценим увеличение погрешности по Δ для значений 822, 452 и 303 м в табл. 5.

Стандартные отклонения в скорости V_x для указанных орбит $\sigma_{V_x} = 12; 4,6; 2,5$ м/с известны [14]. Только за счет их действия получим ошибки в смещении, равные 560, 307 и 177 м. Общая погрешность с учетом ошибок по V_x вырастет, следовательно, получаем 990, 546 и 350 м (пояснение в Приложении D).

Пример сравнения оценок матрицей Фишера и результатов моделирования.

Матрица Фишера основана на локальной линейности по параметрам измеряемой функции, и потому результаты требуют осторожного использования (если случайные погрешности угловых измерений выводят из области локальной линейности, то погрешность оценки параметра увеличивается по сравнению с нижней границей). Сравним на примере оценки матрицей Фишера с результатами моделирования.

Фиксируем некоторые три момента наблюдения. С одной стороны, оцениваем погрешности параметров матрицей Фишера, а с другой — по измеренным углам статистическими испытаниями. Фиксируем именно три наблюдения, поскольку оценка трех параметров по трем наблюдениям однозначна и состоит в решении системы из трех уравнений.

П р и м е р. Параметры: $V = 1$ км/с, $\alpha = 48^\circ$, $\tau_3 = 20$ с, $\Delta = 2000$ м, стандартная ошибка угловых измерений $\sigma_e = 6'$, моменты измерений $t_0 = 1,6$ с, $t_1 = 107$ с, $t_2 = 127$ с, наблюдатель неподвижен. По 100 испытаниям матрицей Фишера ошибку для Δ получаем равной 303 м, а моделированием — 308 м; по моменту времени τ ошибка — 3,95 против 4,02 с. Имеем практически совпадение результатов, что означает, что пределы ло-

Границы стандартных ошибок для Δ , τ и $\text{tg}\alpha$ (движение в одну сторону)

V , км/с	Параметры	α , °					
		12	24	36	48	60	72
2	σ_{Δ} , м	986	466	203	124	92	59
	σ_{τ} , с	17	13	6	4	3	2

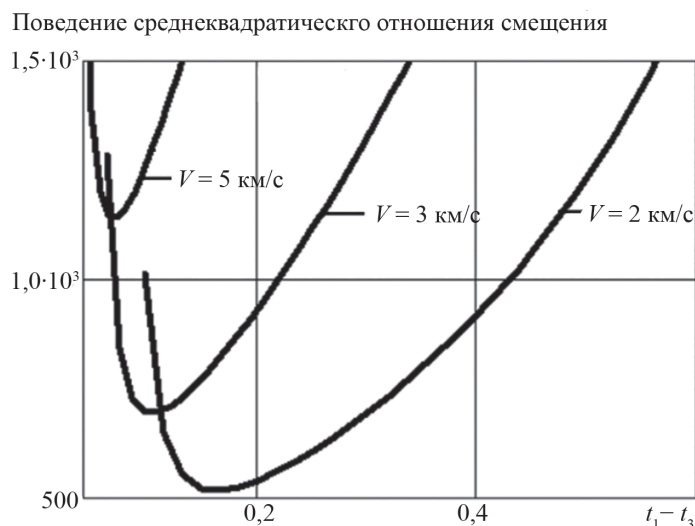


Рис. 4. Значения среднеквадратического отношения $\sigma_{\Delta_1} - \sigma_{\Delta_3}$, как функции промежуточного наблюдения

Таблица 5

Оценки погрешностей матрицей Фишера по трем наблюдениям для параметров Δ , τ и $\text{tg}\alpha$

V, км/с	Параметры	$\alpha, ^\circ$					
		12	24	36	48	60	72
1	τ_{opt}	21	36	38	45	55	58
	$\sigma_{\Delta}, \text{м}$	—	822	452	303	206	146
	$\sigma_{\tau}, \text{с}$	—	8	5	4	3	2
	$\sigma_{\text{tg}\alpha}$	0,09	0,05	0,03	0,03	0,03	0,03
2	τ_{opt}	29	37	45	49	47	55
	$\sigma_{\Delta}, \text{м}$	—	1220	801	517	362	343
	$\sigma_{\tau}, \text{с}$	—	13	10	6	4	4
	$\sigma_{\text{tg}\alpha}$	0,07	0,04	0,03	0,03	0,02	0,04
3	τ_{opt}	26	42	43	47	46	53
	$\sigma_{\Delta}, \text{м}$	—	1667	1036	696	523	494
	$\sigma_{\tau}, \text{с}$	—	18	12	8	6	6
	$\sigma_{\text{tg}\alpha}$	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,03

кальной линейности в данном случае не нарушены, и информационная оценка дает достоверный результат.

Приложения

Приложение А. Информация Фишера относительно смещения Δ в одном наблюдении.

Для тангенса измеряемого угла при плоской поверхности и постоянном вертикальном ускорении в момент τ_i (τ_i — время до приземления) имеем:

$$\text{tg}\varepsilon_{\tau} = \frac{V_y \tau - g\tau^2/2}{V_x \tau + \Delta} = \frac{V_y/V_x - g\tau/2V_x}{1 + \Delta/V_x \tau} = \frac{\text{tg}\alpha - g\tau/2V_x}{1 + \Delta/V_x \tau}, \quad (\text{П1})$$

где τ — время до приземления; V_x, V_y — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости в момент приземления; α — угол приземления.

Считаем, что ξ_{τ} — измеренное со случайной нормальной ошибкой значение угла ε_{τ} , т. е. $\xi_{\tau} \sim N(\varepsilon_{\tau}, \sigma_{\varepsilon}^2)$, σ_{ε}^2 — стандартное отклонение ошибки. Информация Фишера, содержащаяся в ξ_{τ} , относительно параметра Δ

$$I(\tau) = M \left[\frac{\partial}{\partial \Delta} \ln p(\xi_{\tau}, \Delta) \right]^2 = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon}^2} \left[\frac{\partial}{\partial \Delta} \varepsilon_{\tau} \right]^2.$$

Производную определим дифференцированием равенства (П1), записанного через обратные величины:

$$I(\tau) = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon}^2} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta} \varepsilon_{\tau} \right)^2 = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon}^2} \left[\frac{\sin^2 \varepsilon_{\tau}}{(\text{tg}\alpha - g\tau/2V_x) V_x \tau} \right]^2; \quad (\text{П2})$$

$$\sin^2 \varepsilon_{\tau} = \text{tg}^2 \varepsilon_{\tau} / (1 + \text{tg}^2 \varepsilon_{\tau}).$$

Приложение В. Формула для измеряемого угла с учетом сферичности и ненулевого смещения.

Числитель в (1):

$$\begin{aligned} r(\tau) \cos(\varphi - \theta(\tau)) - R &= \\ &= (R + V_y \tau - g\tau^2/2) (1 - (\omega\tau)^2/2 + O(\tau^4)) - R = \\ &= V_y \tau - g\tau^2/2 - R(\omega\tau)^2/2 + O(\tau^3) = \\ &= V_y \tau - (g + R\omega^2)\tau^2/2 + O(\tau^3) = V_y \tau - g^* \tau^2/2 + O(\tau^3). \end{aligned}$$

Здесь $g^* = g + R\omega^2 = g + V_x^2/R$ — обозначение; V_x^2/R — центростремительное ускорение.

Знаменатель в (1):

$$\begin{aligned} r(\tau) \sin(\varphi - \theta(\tau)) &= (R + V_y \tau - g\tau^2/2) \omega\tau (1 - O(\tau^2)) = \\ &= (R + V_y \tau - g\tau^2/2) (V_x/R) \tau (1 - O(\tau^2)) = \\ &= V_x \tau (1 + (V_y/R)\tau (1 - g\tau/2V_y)) (1 - O(\tau^2)) = \\ &= V_x \tau \left(1 + \frac{V_y}{R} \tau \xi\right) (1 - O(\tau^2)) = \\ &= V_x \tau (1 + O(\tau)) (1 - O(\tau^2)) = V_x \tau (1 + O(\tau)), \end{aligned}$$

Знаменатель $\approx V_x \tau$ с точностью 2% при скорости V_y меньше 1000 м/с (≈ 100 с набора высоты).

Тангенс измеряемого угла из (1):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\varepsilon) &= \frac{V_y \tau - g^* \tau^2/2 + O(\tau^3)}{V_x \tau (1 + O(\tau))} = \\ &= \frac{V_y - g^* \tau/2 + O(\tau^2)}{V_x (1 + O(\tau))} \approx \frac{V_y - g^* \tau/2}{V_x} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g^* \tau}{2V_x}. \end{aligned}$$

При смещении $\Delta \neq 0$ формула примет вид:

$$\operatorname{tg}(\varepsilon) \approx \frac{V_y - g^* \tau/2}{V_x + \Delta/\tau} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - g^* \tau/2V_x}{1 + \Delta/\tau V_x}. \quad (\text{П3})$$

Приложение С. Производные по параметрам для матрицы Фишера.

Выпишем производные при неподвижном наблюдателе

$$\operatorname{tg}\varepsilon(\tau_i) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \tau_i g^*/2V_x}{1 + \Delta/V_x \tau_i} \quad (\text{П4})$$

и дифференцируем по параметру $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\frac{\partial}{\partial \operatorname{tg}\alpha} \varepsilon(\tau_i) = \frac{\cos^2 \varepsilon(\tau_i)}{(1 + \Delta/V_x \tau_i)}.$$

Записав (П4) через $\operatorname{ctg}\varepsilon$ и дифференцировав, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta} \varepsilon(\tau_i) = -\frac{1}{V_x \tau_i} \frac{\sin^2 \varepsilon(\tau_i)}{\operatorname{tg}\alpha - \tau_i g^*/2V_x}.$$

Записав (П4) в виде

$$\operatorname{ctg}\varepsilon(\tau_i) (1 + \Delta/V_x \tau_i) = 1 + \Delta/V_x \tau_i$$

и дифференцируя обе части, найдем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} \varepsilon(\tau_i) = \frac{\sin^2 \varepsilon(\tau_i)}{(\operatorname{tg}\alpha - \tau_i g^*/2V_x)} \left[\frac{\Delta}{V_x \tau_i^2} - \frac{g^*/2V_x}{\operatorname{tg}\varepsilon(\tau_i)} \right].$$

Приложение D. Об учете влияния ошибок в скорости.

Существует связь параметров (a, V_x) , где $a = (\Delta, \tau, \operatorname{tg}\alpha)$, с измеряемыми углами ε ($\varepsilon = (t, a; V_x)$). При оценивании по тройке измерений решим эту систему относительно a и получим $a = g(t, \varepsilon; V_x)$. Имеем два источника погрешности для a в углах δ_ε и скорости δ_{V_x} :

$$\hat{a} = g(t, \varepsilon + \delta_\varepsilon; V_x + \delta_{V_x}) \approx a + g'_\varepsilon \delta_\varepsilon + g'_{V_x} \delta_{V_x}.$$

Дисперсия общей погрешности:

$$D\hat{a} \approx (g'_\varepsilon \sigma_\varepsilon)^2 + (g'_{V_x} \sigma_{V_x})^2 + 2r(g'_\varepsilon \sigma_\varepsilon)(g'_{V_x} \sigma_{V_x}),$$

где r — коэффициент корреляции между δ_ε и δ_{V_x} .

Для трех орбит с углами падения $\alpha = 24, 36, 48^\circ$ и $V_x = 1$ км/с из-за случайных ошибок измерения углов имеем ошибки по смещению Δ , равные 822, 452 и 303 м, при известной скорости. Стандартные отклонения оценки скорости V_x при тех же орбитах из [14] — $\sigma_{V_x} = 12; 4,6$ и $2,5$ м/с. Внесем эти погрешности в скорость V_x , и значения измеряемых углов ε изменятся. По углам найдем параметры и их ошибки. Погрешности в параметрах Δ составим 560, 307, 177 м. Общую оценку погрешности для Δ получаем как корень квадратный из суммы квадратов — 990, 546м и 350 м.

Заключение

Построена двумерная математическая модель, отражающая основные особенности процесса «движение – измерение» при оценке места и времени падения. Модель учитывает следующие особенности:

- место падения находится в малой окрестности наблюдателя;
- среди всех подобных орбит рассматриваются наиболее неблагоприятные, т. е. те, информация в измерениях по которым минимальна, и содержится только в углах места;
- движение наблюдателя с ничтожными погрешностями перенесено в плоскость орбиты;
- информация о смещении находится в наблюдениях при снижении высоты, и потому ускорение силы тяжести и горизонтальная скорость приближаются константами;
- при параметризации использованы следующие параметры: Δ — смещение; t — момент падения; $\operatorname{tg}\alpha$ — тангенс угла падения; V_x — горизонтальная скорость. Модель движения-измерения учитывает кривизну Земли, широту наблюдателя и направление движения КТ.

На построенной модели проанализирована потенциальная точность оценки параметров с помощью понятия информации Фишера и информационного не-

равенства Рао–Крамера, выписаны элементы матрицы Фишера.

Рассчитаны границы для точностей параметров орбит с углами от 12° до 70° и скоростями от 1 до 5 км/с.

Примеры показали, что по угловым измерениям возможно за время порядка одной минуты до падения

получить практически интересные точности (сотни и десятки метров для смещения Δ и единицы секунды для момента времени τ). Широта наблюдателя и направление его движения существенно влияют на точность. В приложении содержатся формульные преобразования.

Литература

1. **Chang C.B.** Optimal State Estimation of Ballistic Trajectories with Angle-only Measurements. Lexington: MIT Lincoln Laboratory, 1979.
2. **Chang C.B., Tabaczynski J.** Application of State Estimation to Target Tracking // IEEE Trans. Automatic Control. 1984. V. 29. No. 2. Pp. 98—109.
3. **Саврасов Ю.С.** Методы определения орбит космических объектов. М.: Машиностроение, 1981.
4. **Саврасов Ю.С.** Алгоритмы и программы в радиолокации. М.: Радио и связь, 1985.
5. **Колесса А.Е., Пругло А.В., Равдин С.С.** Восстановление орбит по угловым измерениям // Радиотехника. 2005. № 10. С. 5—9.
6. **Колесса А.Е.** Рекуррентные алгоритмы фильтрации для некоторых систем с нелинейностями кусочно-линейного типа // Автоматика и телемеханика. 1986. № 4. С. 48—55.
7. **Колесса А.Е.** Некоторые прикладные вопросы рекуррентной кусочно-линейной фильтрации // Автоматика и телемеханика. 1986. № 5. С. 61—69.
8. **Колесса А.Е.** Точные формулы оптимальной фильтрации для нестационарной кусочно-линейной задачи оценивания параметра // Автоматика и телемеханика. 1989. № 12. С. 69—80.
9. **Булычев, В.Ю., Булычев Ю.Г., Ивакина С.С.** Пассивная локация на основе угловых и мощностных измерений системы пеленгаторов // Известия РАН. Серия «Теории и системы управления». 2014. № 1. С. 65—73.
10. **Булычев В. Ю. и др.** Угломерно-энергетический метод нестационарной пассивной локации на базе однопозиционной системы // Известия РАН. Серия «Теории и системы управления». 2015. № 5. С. 122—136.
11. **Farina A., Benvenuti D., Ristic B.** Tracking a Ballistic Target: Comparison of Several Nonlinear Filters // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst. 2002. V. 38. No. 3. Pp. 854—867.
12. **Farina A., Ristic B., Timmoneri L.** Cramer-Rao Bound for Nonlinear Filtering with $Pd < 1$ and Its Application to Target Tracking // IEEE Trans. Signal Proc. 2002. V. 50. No. 8. Pp. 1916—1924.
13. **Ristic B., Farina A., Benvenuti D., Arulampalam M.S.** Performance Bounds and Comparison of Nonlinear Filters for Tracking a Ballistic Object on Re-entry // IEEE Proc. Radar, Sonar and Navigation. 2003. V. 150. No. 2. Pp. 65—70.
14. **Горицкий Ю.А., Тигетов Д.Г., Ануфриев А.М.** Двумерная модель для оценки эффективности угло-

References

1. **Chang C.B.** Optimal State Estimation of Ballistic Trajectories with Angle-only Measurements. Lexington: MIT Lincoln Laboratory, 1979.
2. **Chang C.B., Tabaczynski J.** Application of State Estimation to Target Tracking. IEEE Trans. Automatic Control. 1984;29;2:98—109.
3. **Savrasov Yu.S.** Metody Opredeleniya Orbit Kosmicheskikh Ob'ektov. M.: Mashinostroenie, 1981. (in Russian).
4. **Savrasov Yu.S.** Algoritmy i Programmy v Radiolokatsii. M.: Radio i Svyaz', 1985. (in Russian).
5. **Kolessa A.E., Pruglo A.V., Ravdin S.S.** Vosstanovlenie Orbit po Uglovym Izmereniyam. Radiotekhnika. 2005;10:5—9. (in Russian).
6. **Kolessa A.E.** Rekurrentnye Algoritmy Fil'tratsii dlya Nekotorykh Sistem s Nelineynostyami Kusochno-lineynogo Tipa. Avtomatika i Telemekhanika. 1986;4:48—55. (in Russian).
7. **Kolessa A.E.** Nekotorye Prikladnye Voprosy Rekurrentnoy Kusochno-lineynoy Fil'tratsii. Avtomatika i Telemekhanika. 1986;5:61—69. (in Russian).
8. **Kolessa A.E.** Tochnye Formuly Optimal'noy Fil'tratsii dlya Nestatsionarnoy Kusochno-lineynoy Zadachi Otsenivaniya Parametra. Avtomatika i Telemekhanika. 1989;12:69—80. (in Russian).
9. **Bulychev, V.Yu., Bulychev Yu.G., Ivakina S.S.** Passivnaya Lokatsiya na Osnove Uglovykh i Moshchnostnykh Izmereniy Sistemy Pelengatorov. Izvestiya RAN. Seriya «Teorii i Sistemy Upravleniya». 2014;1:65—73. (in Russian).
10. **Bulychev V. Yu. i dr.** Uglomerno-energeticheskiy Metod Nestatsionarnoy Passivnoy Lokatsii na Baze Odnopozitsionnoy Sistemy. Izvestiya RAN. Seriya «Teorii i Sistemy Upravleniya». 2015;5:122—136. (in Russian).
11. **Farina A., Benvenuti D., Ristic B.** Tracking a Ballistic Target: Comparison of Several Nonlinear Filters. IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst. 2002;38;3:854—867.
12. **Farina A., Ristic B., Timmoneri L.** Cramer-Rao Bound for Nonlinear Filtering with $Pd < 1$ and Its Application to Target Tracking. IEEE Trans. Signal Proc. 2002;50;8:1916—1924.
13. **Ristic B., Farina A., Benvenuti D., Arulampalam M.S.** Performance Bounds and Comparison of Nonlinear Filters for Tracking a Ballistic Object on Re-entry. IEEE Proc. Radar, Sonar and Navigation. 2003;150;2:65—70.
14. **Goritskiy Yu.A., Tigetov D.G., Anufriev A.M.** Dvumernaya Model' dlya Otsenki Effektivnosti Uglovykh

вых измерений по эллиптическим орбитам // Известия РАН. Серия «Теория и системы управления». 2021. № 2. С. 14—24.

15. **Горицкий Ю.А., Тигетов Д.Г., Китова Е.В.** Вероятностный анализ требований к угломерной системе обнаружения смещения эллиптической орбиты // Вестник МЭИ. 2020. № 6. С. 101—109.

Izmereniy po Ellipticheskim Orbitam. Izvestiya RAN. Seriya «Teoriya i Sistemy Upravleniya». 2021;2:14—24. (in Russian).

15. **Goritskiy Yu.A., Tigetov D.G., Kitova E.V.** Veroyatnostnyy Analiz Trebovaniy k Uglomernoy Sisteme Obnaruzheniya Smeshcheniya Ellipticheskoy Orbity. Vestnik MEI. 2020;6:101—109. (in Russian).

Сведения об авторах:

Горицкий Юрий Александрович — доктор технических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: goritskiy@yandex.ru

Захарова Анна Игоревна — студент кафедры математического и компьютерного моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: zakharova2010@yandex.ru

Information about authors:

Goritskiy Yuriy A. — Dr.Sci. (Techn.), Professor of Mathematical and Computer Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: goritskiy@yandex.ru

Zakharova Anna I. — Student Mathematical and Computer Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: zakharova2010@yandex.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов

Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: 26.01.2022

The article received to the editor: 26.01.2022