

УДК 519.872.6

## Разладка математического ожидания быстрофлуктуирующего гауссовского процесса с неизвестной интенсивностью

О. В. Чернояров\*, Сай Си Ту Мин

Предложен технически простой способ определения скачкообразного изменения среднего значения полосового гауссовского процесса с неизвестной интенсивностью. С этой целью были созданы новые аппроксимации решающих статистик при различных гипотезах, выполнена их максимизация по неизвестным параметрам, разработаны структурные схемы соответствующих обнаружителя и измерителя в виде достаточно простых одноканальных устройств.

Для определения качества функционирования синтезированных алгоритмов с помощью метода локально-марковской аппроксимации были найдены асимптотически точные выражения для их характеристик — вероятностей ошибок 1-го и 2-го родов (при обнаружении момента разладки) и условных смещений, и рассеяний оценок (при измерении параметров анализируемого случайного процесса). Представлена новая методика аналитического расчета характеристик оценки разрывного параметра (момента разладки) с учетом аномальных ошибок. Методами статистического моделирования на ЭВМ выполнена экспериментальная проверка эффективности указанных алгоритмов. Установлено, что предложенные обнаружитель и измеритель являются работоспособными, а теоретические формулы для вероятностей ошибок 1-го и 2-го родов и условных смещений, и рассеяний выносимых оценок удовлетворительно согласуются с соответствующими экспериментальными данными в широком диапазоне значений параметров анализируемого процесса.

Полученные результаты могут быть использованы для синтеза и анализа новых технически простых алгоритмов обработки быстрофлуктуирующих случайных процессов с резко изменяющимися характеристиками в условиях различной параметрической априорной неопределенности.

Ключевые слова: разладка случайного процесса, оценка математического ожидания, неизвестная дисперсия, методы максимального правдоподобия и локально-марковской аппроксимации, разрывный параметр, статистическое моделирование.

---

\* o\_v\_ch@mail.ru

## Постановка задачи

Задача статистического анализа разладки (скачкообразного изменения в некоторый момент времени) среднего значения случайного процесса имеет широкие приложения в технической и медицинской диагностике, теории управления, при обработке данных измерений и пр. [1 — 3]. Как правило, в литературе при ее постановке помимо предположения о гауссовском характере реализации наблюдаемых данных накладываются некоторые дополнительные ограничения. Так в [1] предполагается, что отсчеты наблюдаемого процесса статистически независимы, в [2, 3] рассматриваются в основном лишь авторегрессионные модели информационного сигнала и т.д. Кроме того, синтез алгоритмов обнаружения и измерения момента разладки во многих случаях проводился в условиях полной априорной определенности относительно неинформативных параметров анализируемого случайного процесса. В относительно немногочисленных работах по статистическому анализу разладки гауссовских случайных процессов с неизвестными параметрами описаны достаточно сложные итерационные алгоритмы, работоспособные только при весьма больших отношениях сигнал/шум (ОСШ) [1].

В настоящей работе проанализирована задача разладки среднего значения гауссовского случайного процесса в предположении лишь быстроты его флуктуаций (сильное условие) и относительной равномерности его спектральной плотности (слабое условие) в заданной полосе частот. Показаны возможности эффективного преодоления параметрической априорной неопределенности при произвольных ОСШ. Предложен технически простой способ определения момента скачкообразного изменения среднего значения полосового гауссовского случайного процесса с неизвестной интенсивностью и измерения его энергетических параметров до и после разладки.

Представим аналитически разладку среднего значения полосового гауссовского случайного процесса следующим образом:

$$\xi(t) = v(t) + a_{01} + (a_{02} - a_{01}) \theta(t - \lambda_0). \quad (1)$$

Здесь  $\theta(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $\theta(t) = 1$  при  $t \geq 0$  — функция Хевисайда;  $\lambda_0$  — момент возможной разладки;  $a_{01}$ ,  $a_{02}$  — математические ожидания (средние значения) процесса  $\xi(t)$  при  $t < \lambda_0$  и  $t \geq \lambda_0$ , соответственно;  $v(t)$  — стационарный центрированный гауссовский случайный процесс, обладающий спектральной плотностью [4, 5].

$$G(\omega) = \begin{cases} d_0/2, & |\omega| \leq \Omega/2; \\ 0, & |\omega| > \Omega/2. \end{cases} \quad (2)$$

где  $\Omega$  — ширина полосы частот;  $d_0$  — величина спектральной плотности (интенсивность) процесса  $v(t)$ , определяющая его дисперсию  $D_0 = d_0 \Omega / 4\pi$ .

Полагаем, что процесс (1) наблюдается на фоне аддитивного гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ . В результате этого доступна смесь:

$$x(t) = \xi(t) + n(t); \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Флуктуации процесса  $\xi(t)$  будем считать «быстрыми», так что выполняется условие:

$$\mu_{\min} = T_{\min} \Omega / 4\pi \gg 1, \quad (4)$$

где  $T_{\min} = \min(\lambda_0, T - \lambda_0)$ . По реализации (3) необходимо обнаружить момент разладки и оценить параметры  $\lambda_0$ ,  $a_{01}$ ,  $a_{02}$ ,  $d_0$ , принимающие значения из соответствующих априорных интервалов  $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ ,  $(-\infty, \infty)$ ,  $(-\infty, \infty)$ ,  $[0, \infty)$ .

## Обнаружение разладки математического ожидания случайного процесса с неизвестной интенсивностью

При решении задачи обнаружения разладки математического ожидания процесса  $\xi(t)$  выделим два возможных случая (две гипотезы):

- 1)  $a_{01} = a_{02}$ , т.е. разладка отсутствует (гипотеза  $H_0$ );
- 2)  $a_{01} \neq a_{02}$  (гипотеза  $H_1$ ).

Задачу проверки указанных гипотез будем решать с помощью метода максимального правдоподобия. С этой целью на основе результатов работ [4, 5] запишем выражения для решающих статистик (логарифмов функционала отношения правдоподобия) при гипотезах  $H_0$  и  $H_1$  против альтернативы  $H$ :  $n(t) = n(t)$ , как:

$$\begin{aligned} L_0(a_1, d) &= \frac{d}{N_0(N_0 + d)} \int_0^T y^2(t) dt + \\ H_0: & + \frac{2a_1}{N_0 + d} \int_0^T x(t) dt - \frac{a_1^2 T}{N_0 + d} - \frac{\Omega T}{4\pi} \ln \left( 1 + \frac{d}{N_0} \right); \\ L_1(\lambda, a_1, a_2, d) &= \frac{d}{N_0(N_0 + d)} \int_0^T y^2(t) dt + \\ H_1: & + \frac{2a_1}{N_0 + d} \int_0^\lambda x(t) dt - \frac{a_1^2 \lambda}{N_0 + d} + \\ & + \frac{2a_2}{N_0 + d} \int_\lambda^T x(t) dt - \frac{a_2^2 (T - \lambda)}{N_0 + d} - \frac{\Omega T}{4\pi} \ln \left( 1 + \frac{d}{N_0} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t - t') dt'$  — выходной сигнал фильтра с передаточной функцией  $H(\omega)$ , удовлетворяющей условию  $|H(\omega)|^2 = 2G(\omega)/d_0$  (2), а  $\lambda$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $d$  — текущие значения параметров  $\lambda_0$ ,  $a_{01}$ ,  $a_{02}$ ,  $d_0$ , соответственно. Тогда решение о наличии разладки будет приниматься, если [4, 6]:

$$\max_{\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2], a_1, a_2, d \geq 0} L_1(\lambda, a_1, a_2, d) - \max_{a_1, d \geq 0} L_0(a_1, d) > c, \quad (6)$$

где  $c$  — порог, рассчитываемый в соответствии с выбранным критерием оптимальности.

Максимизацию функционалов (5) по переменным  $a_1, a_2, d$  можно выполнить аналитически. В результате максимально-правдоподобный алгоритм обнаружения разрядки среднего значения гауссовского случайного процесса с неизвестной интенсивностью примет вид:

$$\max_{\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]} M(\lambda) \underset{<}{>} c; \quad (7)$$

$$M(\lambda) = M_1^2(\lambda)/\lambda + M_2^2(\lambda)/(T - \lambda) - M_3^2/T;$$

$$M_1(\lambda) = \int_0^\lambda x(t) dt; \quad M_2(\lambda) = \int_\lambda^T x(t) dt; \quad (8)$$

$$M_3 = \int_0^T x(t) dt$$

и является инвариантным к спектральной плотности белого шума.

Качество обнаружения характеризуем вероятностями ошибок 1-го рода (ложной тревоги)  $\alpha$  и 2-го рода (пропуска сигнала)  $\beta$  [6]. Для нахождения  $\alpha$  и  $\beta$  введем в рассмотрение нормированные функционалы:

$$\tilde{M}_i(l) = M_i(\lambda) \sqrt{2/T(N_0 + d_0)}; \quad (9)$$

$$\tilde{M}_3 = M_3 \sqrt{2/T(N_0 + d_0)}$$

и представим их в виде суммы сигнальных и шумовых составляющих [6]:

$$\tilde{M}_i(l) = S_i(l) + N_i(l); \quad (10)$$

$$\tilde{M}_3 = S_3 + N_3.$$

Здесь  $S_i(l) = \langle \tilde{M}_i(l) \rangle$ ,  $S_3 = \langle \tilde{M}_3 \rangle$  — сигнальные,  $N_i(l) = \tilde{M}_i(l) - \langle \tilde{M}_i(l) \rangle$ ,  $N_3 = \tilde{M}_3 - \langle \tilde{M}_3 \rangle$  — шумовые составляющие;  $l = \lambda/T$  — текущее значение нормированного параметра  $l_0 = \lambda_0/T$ ; усреднение  $\langle \cdot \rangle$  выполняется по реализациям  $x(t)$  при фиксированных  $\lambda_0, a_{01}, a_{02}, d_0$ .

Согласно (8) имеем:

$$S_2(l) = z_{01}(1-l) + \Delta z [1 - \max(l, l_0)];$$

$$S_3 = z_{01} + \Delta z(1-l_0); \quad (11)$$

$$\langle N_1(l_1)N_1(l_2) \rangle = \min(l_1, l_2);$$

$$\langle N_2(l_1)N_2(l_2) \rangle = 1 - \max(l_1, l_2); \quad \langle N_3^2 \rangle = 1.$$

Здесь  $\Delta z = z_{02} - z_{01}$ ;  $z_{0i} = a_{0i} \sqrt{2T/(N_0 + d_0)}$ ,  $i = 1, 2$  — ОСШ для постоянных составляющих  $a_{01}$  на всем интервале наблюдения.

С учетом (9) перепишем решающее правило (7) в виде:

$$\max_{l \in [\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2]} \tilde{M}(l) \underset{<}{>} u \quad (12)$$

где

$$\tilde{M}(l) = 2M(\lambda)/T(N_0 + d_0) = \tilde{M}_1^2(l)/l + \tilde{M}_2^2(l)/(1-l) - \tilde{M}_3^2,$$

$$\tilde{\Lambda}_{1,2} = \Lambda_{1,2}/T; \quad u = 2c/T(N_0 + d_0) \text{ — нормированный порог.}$$

Положим, что разрядка по математическому ожиданию процесса  $\xi(t)$  (1) отсутствует, т.е.:

$$z_{01} = z_{01} (\Delta z = 0). \quad (13)$$

В этом случае для вероятности ложной тревоги:

$$\alpha = P [ \max_{l \in [\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2]} \tilde{M}(l) > u ] = 1 - P_N(u), \quad (14)$$

где  $P_N(u) = P [ \tilde{M}(l) < u ], l \in [ \tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2 ]$ .

Используя (10) — (13), представим функционал  $\tilde{M}(l)$  следующим образом:

$$\tilde{M}(l) = [ N_1(l) \sqrt{(1-l)/l} - N_2(l) \sqrt{l/(1-l)} ]^2. \quad (15)$$

Выполним в (15) замену переменных:

$$\theta = \ln [ l/(1-l) ]; \quad \theta \in [ \Theta_1, \Theta_2 ]; \quad (16)$$

$$\Theta_i = \ln [ \tilde{\Lambda}_i / (1 - \tilde{\Lambda}_i) ]; \quad i = 1, 2.$$

Тогда вероятность  $P_N(u)$  (14) можно определить как:

$$P_N(u) = P [ X^2(\theta) < u ]; \quad \theta \in [ \Theta_1, \Theta_2 ], \quad (17)$$

где  $X(\theta)$  — гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $\langle X(\theta_1)X(\theta_2) \rangle = \exp(-|\theta_2 - \theta_1|/2)$ .

Отсюда на основе результатов [7] находим:

$$P_N(u) = \begin{cases} \exp [ -(\Theta_2 - \Theta_1) \sqrt{u/2\pi} \exp(-u/2) ], & u \geq 1; \\ 0, & u < 1, \end{cases} \quad (18)$$

и выражение для вероятности ложной тревоги (14) принимает вид:

$$\alpha = \begin{cases} 1 - \exp [ -(\Theta_2 - \Theta_1) \sqrt{u/2\pi} \exp(-u/2) ], & u \geq 1; \\ 1, & u < 1. \end{cases} \quad (19)$$

Точность формулы (19) возрастает с увеличением  $u$  и отношения:

$$m = \tilde{\Lambda}_2 (1 - \tilde{\Lambda}_1) / \tilde{\Lambda}_1 (1 - \tilde{\Lambda}_2). \quad (20)$$

Положим, что  $z_{01} \neq z_{02}$  и запишем вероятность пропуска разрядки как:

$$\beta = P [ \max_{l \in [\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2]} \tilde{M}(l) < u ] = P [ \tilde{M}(l) < u ]. \quad (21)$$

Перейдем в (21) к новой переменной  $y = l/(1-l)$ , определенной на интервале  $[Y_1, Y_2]$ ,  $Y_i = \tilde{\Lambda}_i / (1 - \tilde{\Lambda}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , и с учетом (11) представим сигнальную  $S(y) = \langle \tilde{M}(y) \rangle$  и корреляционную функции  $S(y) = \langle \tilde{M}(y) \rangle$  шумовой функции  $N(y) = \tilde{M}(y) - \langle \tilde{M}(y) \rangle$  нормированного функционала:  $\tilde{M}(y)$  (12) в виде:

$$S(y) = \Delta z^2 \begin{cases} (1-l_0)^2 y, & y \leq y_0; \\ l_0^2/y, & y > y_0; \end{cases}$$

$$\langle N(y_1)N(y_2) \rangle = 4\Delta z^2 \begin{cases} (1-l_0)^2 \min(y_1, y_2), & y_1, y_2 \leq y_0; \\ l_0^2 \min(1/y_1, 1/y_2), & y_1, y_2 > y_0; \end{cases} \quad (22)$$

где  $y_0 = l_0/(1-l_0)$ .

Будем считать, что

$$|z| \gg 1. \quad (24)$$

Тогда положение максимума функционала  $\tilde{M}(y)$  располагается в малой окрестности точки  $y = y_0$ . В пределах этой окрестности функционал  $\tilde{M}(y)$  можно аппроксимировать гауссовским марковским случайным процессом с коэффициентами сноса и диффузии:

$$\tilde{K}_1 = \Delta z^2 (1-l_0)^2 \begin{cases} 1, & y \leq y_0; \\ -1, & y > y_0; \end{cases} \quad \tilde{K}_2 = 4\Delta z^2 (1-l_0)^2.$$

Используем эту аппроксимацию на всем интервале возможных значений переменной  $y \in [Y_1, Y_2]$ . Тогда, следуя [8], для вероятности (21) находим:

$$\beta = P_S(u); \quad (25)$$

$$P_S(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\tilde{K}_2(y_0 - Y_1) + \sigma_1^2]}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left\{ \exp \left[ \frac{(u - S_1 - |\tilde{K}_1|(y_0 - Y_1) - x)^2}{2(\tilde{K}_2(y_0 - Y_1) + \sigma_1^2)} \right] \times \right.$$

$$\times \Phi \left[ \frac{(y_0 - Y_1)(|\tilde{K}_1|\sigma_1^2 + \tilde{K}_2(u - S_1)) + \sigma_1^2 x}{\sigma_1 \sqrt{\tilde{K}_2(y_0 - Y_1)(\tilde{K}_2(y_0 - Y_1) + \sigma_1^2)}} \right] -$$

$$- \exp \left[ -\frac{2|\tilde{K}_1|x}{\tilde{K}_2} - \frac{(u - S_1 - |\tilde{K}_1|(y_0 - Y_1) + x)^2}{2(\tilde{K}_2(y_0 - Y_1) + \sigma_1^2)} \right] \times$$

$$\times \Phi \left[ \frac{(y_0 - Y_1)(|\tilde{K}_1|\sigma_1^2 + \tilde{K}_2(u - S_1)) - \sigma_1^2 x}{\sigma_1 \sqrt{\tilde{K}_2(y_0 - Y_1)(\tilde{K}_2(y_0 - Y_1) + \sigma_1^2)}} \right] \times$$

$$\times \left\{ \Phi \left( \left| \tilde{K}_1 \right| \sqrt{\frac{Y_2 - y_0}{\tilde{K}_2}} + \frac{x}{\sqrt{\tilde{K}_2(Y_2 - y_0)}} \right) - \right.$$

$$\left. - \exp \left( -\frac{2|\tilde{K}_1|x}{\tilde{K}_2} \right) \Phi \left( \left| \tilde{K}_1 \right| \sqrt{\frac{Y_2 - y_0}{\tilde{K}_2}} - \frac{x}{\sqrt{\tilde{K}_2(Y_2 - y_0)}} \right) \right\} dx.$$

Здесь

$$S_1 = S(Y_1) = \tilde{\Lambda}_1 \Delta z^2 (1-l_0)^2 / (1-\tilde{\Lambda}_1),$$

$$\sigma_1^2 = \langle N^2(Y_1) \rangle = 4\tilde{\Lambda}_1 \Delta z^2 (1-l_0)^2 / (1-\tilde{\Lambda}_1).$$

Точность формул (25), (26) возрастает с увеличением  $|\Delta z|$  и  $u$ .

### Оценка момента разладки и энергетических параметров случайного процесса

Положим теперь, что разладка математического ожидания случайного процесса  $\xi(t)$  (1) реализуется на интервале  $[0, T]$  с вероятностью 1. При этом необходимо измерить момент разладки и значения энергетических параметров  $a_{01}, a_{02}, d_0$ . Синтез алгоритма совместного оценивания будем проводить на основе метода максимального правдоподобия. Используя (5), для оценок максимального правдоподобия (ОМП) , , , неизвестных величин  $\lambda_m, a_{1m}, a_{2m}, d_m$  получаем:

$$\lambda_m = \arg \max_{\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]} M(\lambda);$$

$$a_{1m} = M_1(\lambda_m) / \lambda_m;$$

$$a_{2m} = M_2(\lambda_m) / (T - \lambda_m); \quad (29)$$

$$d_m = \max \left\{ 0, \frac{1}{\mu} \left[ \int_0^T y^2(t) dt - \frac{1}{\lambda_m} M_1^2(\lambda_m) - \frac{1}{T - \lambda_m} M_2^2(\lambda_m) \right] - N_0 \right\},$$

где  $\mu = T\Omega/4\pi$ ;  $M(\lambda), M_i(\lambda), i = 1, 2$  определяются из (7), (8).

Найдем характеристики оценок (29). Используя (10), (11), представим сигнальную  $S(l)$  и шумовую  $N(l)$  функции нормированного функционала  $\tilde{M}(l)$  (12) в виде:

$$S(l) = [z_{01}l + \Delta z \max(0, l - l_0)]^2 / l +$$

$$+ [z_{01}(1-l) + \Delta z(1 - \max(l, l_0))]^2 / (1-l) -$$

$$- [z_{01} + \Delta z(1-l_0)]^2, \quad (30)$$

$$N(l) = 2[z_{01}l + \Delta z \max(0, l - l_0)]N_1(l)/l +$$

$$+ 2[z_{01}(1-l) + \Delta z(1 - \max(l, l_0))]N_2(l)/(1-l) -$$

$$- 2[z_{01} + \Delta z(1-l_0)]N_3 + N_\Sigma^2(l).$$

Здесь  $N_\Sigma^2(l) = N_1^2(l)/l + N_2^2(l)/(1-l) - N_3^2$ .

Предположим, что выполняется условие (24), так что последним слагаемым  $N_\Sigma^2(l)$  во втором выражении (30) можно пренебречь. При этом с увеличением  $|\Delta z|$  нормированная оценка  $l_m = \lambda_m/T$  сходится к истинному значению нормированного оцениваемого параметра  $l_0$  в среднеквадратическом смысле [6]. В результате для определения характеристик оценки  $l_m$  при  $|\Delta z| \gg 1$  достаточно исследовать поведение функционала  $\tilde{M}(l)$  в малой окрестности точки  $l = l_0$ . Обозначим  $\Delta = \max\{|l_1 - l_0|, |l_2 - l_0|, |l_1 - l_2|\}$ . Тогда для сигнальной функции и корреляционной функции шумовой функции (30) при  $\Delta \rightarrow 0$  справедливы асимптотические представления:

$$S(l) \approx \Delta z^2 [l_0(1-l_0) - |l-l_0|];$$

$$\langle N(l_1)N(l_2) \rangle \approx$$

$$\approx 4\Delta z^2 \begin{cases} l_0(1-l_0) - |l_1-l_2| - \\ -\min(|l_1-l_0|, |l_2-l_0|), & (l_1-l_0)(l_1-l_0) \geq 0; \\ l_0(1-l_0) - |l_1-l_2|, & (l_1-l_0)(l_1-l_0) < 0. \end{cases} \quad (31)$$

Введем в рассмотрение разностный функционал  $\zeta(l) = \tilde{M}(l) - \tilde{M}(x)$ ,  $l, x \in \tilde{\Lambda}_\delta$ .

Здесь  $\tilde{\Lambda}_\delta = [l_0 - m_r, l_0 + m_r]$ , а  $m_r$  фиксировано и выбрано настолько малым, что при  $\Delta < m_r$  аппроксимации (31) обладают требуемой точностью. Тогда при  $|\Delta z| \gg 1$  (24) условную функцию распределения  $F_0(x|l_0)$  оценки  $l_m$  можно представить в виде:

$$F_0(x|l_0) = P[l_m < x] = P\left[\max_{l < x} \zeta(l) > \max_{l \geq x} \zeta(l)\right], l, x \in \tilde{\Lambda}_\delta.$$

Согласно [9] процесс  $\zeta(l)$  на интервале  $\tilde{\Lambda}_\delta$  является асимптотически (при  $\mu_{\min} \rightarrow \infty$ ) гауссовским марковским случайным процессом диффузионного типа, коэффициенты сноса  $K_1$  и диффузии  $K_2$  которого определяются выражениями

$$K_1 = \Delta z^2 \begin{cases} 1, & l \leq l_0; \\ -1, & l > l_0; \end{cases} \quad K_2 = 4\Delta z^2.$$

Тогда, используя результаты [9], для условных плотностей вероятности  $w_0(l|l_0)$ , смещения  $b_0(l_m|l_0) = \langle l_m - l_0 \rangle$  и рассеяния  $V_0(l_m|l_0) = \langle (l_m - l_0)^2 \rangle$  оценки  $l_m$  (29) получаем:

$$w_0(l|l_0) = \frac{2K_1^2}{K_2} \left\{ 3 \exp\left(\frac{4K_1^2|l-l_0|}{K_2}\right) \times \right.$$

$$\times \left[ 1 - \Phi\left(3|K_1|\sqrt{\frac{|l-l_0|}{K_2}}\right) \right] + \Phi\left(|K_1|\sqrt{\frac{|l-l_0|}{K_2}}\right) - 1 \left. \right\} =$$

$$= \frac{\Delta z^2}{2} \left\{ 3 \exp(\Delta z^2|l-l_0|) \left[ 1 - \Phi\left(\frac{3|\Delta z|}{2}\sqrt{|l-l_0|}\right) \right] + \right.$$

$$\left. + \Phi\left(\frac{|\Delta z|}{2}\sqrt{|l-l_0|}\right) - 1 \right\};$$

$$b_0(l_m|l_0) = 0; \quad V_0(l_m|l_0) = 13K_2^2/8K_1^4 = 26/\Delta z^4.$$

Точность формул (32) возрастает с увеличением  $\mu_{\min}$  и  $|\Delta z|$ .

При малых значениях  $|\Delta z|$  ( $|\Delta z| \rightarrow 0$ ) нормированная решающая статистика (12) может быть приближенно (в пренебрежении величинами порядка  $|\Delta z|$  и менее) представлена в виде (15). Выполнив замену переменных (16), перейдем от нормированной оценки  $l_m$  (29) к оценке

$$\theta_m = \arg \max_{\theta \in [\Theta_1, \Theta_2]} X^2(\theta). \quad (34)$$

Здесь  $X(\theta)$  определяется так же, как в (17).

Согласно [6] положение максимума стационарного случайного процесса описывается равномерной плотностью вероятности. Тогда для условной плотности вероятности  $w(\theta|\theta_0)$  случайной величины  $\theta_m$  (34), где  $\theta_0 = \ln[l_0/(1-l_0)]$ , может быть записано:  $w(\theta|\theta_0) = 1/(\Theta_2 - \Theta_1)$ ,  $\theta \in [\Theta_1 - \Theta_2]$ . Отсюда с учетом (16) для плотности вероятности  $w_a(l|l_0)$  и условных смещения  $b_a(l_m|l_0)$  и рассеяния  $V_a(l_m|l_0)$  ОМП  $l_m$  (29) при малых  $|\Delta z|$  находим:

$$w_a(l|l_0) = 1/l(1-l) \ln m;$$

$$l \in [\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2];$$

$$b_a(l_m|l_0) = 1-l_0 - \ln(\tilde{\Lambda}_2/\tilde{\Lambda}_1)/\ln m; \quad (35)$$

$$V_a(l_m|l_0) = l_0^2 +$$

$$+ [(1-2l_0) \ln((1-\tilde{\Lambda}_1)/(1-\tilde{\Lambda}_2)) + \tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2]/\ln m;$$

где  $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2$  и  $m$  определяются согласно (12), (20).

При произвольных значениях  $|\Delta z|$  распределение оценки  $l_m$  будем искать в виде:

$$w(l|l_0) = P_0 w_0(l|l_0) + (1-P_0) w_a(l|l_0), \quad (36)$$

где  $w_0(l|l_0)$ ,  $w_a(l|l_0)$  определяются из (32), (35);  $P_0 = P[H_S > H_N]$ ,  $H_S, H_N$  — случайные величины, характеризующие максимум функционала  $\tilde{M}(l)$ , когда его положение (ОМП  $l_m$ ) подчиняется закону распределения  $w_0(l|l_0)$  (32) или  $w_a(l|l_0)$  (35), соответственно.

Вероятность  $P_0$  можно найти, используя двумерную плотность вероятности  $w_2(u, v)$  или функцию распределения

$$F_2(u, v) = P[H_S < u, H_N < v] = \int_0^u \int_0^v w_2(u', v') du' dv'$$

случайных величин  $H_N, H_S$ :

$$P_0 = \int_0^\infty \int_0^u w_2(u, v) dv du = \int_0^\infty \left[ \frac{\partial F_2(u, v)}{\partial u} \right]_{v=u} du. \quad (37)$$

Здесь учтено, что  $H_N > 0, H_S > 0$ .

Как следует из (15), (30), случайные величины  $H_N, H_S$  являются некоррелированными. Тогда (37) приближенно можно представить в виде:

$$P_0 \approx \int_0^\infty P_N(u) dP_S(u), \quad (38)$$

где  $P_N(u), P_S(u)$  определяются согласно (18), (26). Подставив (18), (26) в (38), получим:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi[\tilde{K}_2(y_0 - Y_1) + \sigma_1^2]^3}} \int_0^\infty \int_0^\infty dudx \times \\
&\times \exp\left[-(\Theta_2 - \Theta_1)\sqrt{\frac{u}{2\pi}} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\right] \times \\
&\times \left\{ (u - S_1 - |\tilde{K}_1|(y_0 - Y_1) - x) \times \right. \\
&\exp\left[-\frac{2|\tilde{K}_1|x}{\tilde{K}_2} - \frac{(u - S_1 - |\tilde{K}_1|(y_0 - Y_1) + x)^2}{2(\tilde{K}_2(y_0 - Y_1) + \sigma_1^2)}\right] \times \\
&\times \Phi\left[\frac{(y_0 - Y_1)(|\tilde{K}_1|\sigma_1^2 + \tilde{K}_2(u - S_1)) - \sigma_1^2 x}{\sigma_1\sqrt{\tilde{K}_2(y_0 - Y_1)(\tilde{K}_2(y_0 - Y_1) + \sigma_1^2)}}\right] - \\
&-(u - S_1 - |\tilde{K}_1|(y_0 - Y_1) + x) \times \\
&\times \exp\left[\frac{(u - S_1 - |\tilde{K}_1|(y_0 - Y_1) - x)^2}{2(\tilde{K}_2(y_0 - Y_1) + \sigma_1^2)}\right] \times \\
&\times \Phi\left[\frac{(y_0 - Y_1)(|\tilde{K}_1|\sigma_1^2 + \tilde{K}_2(u - S_1)) + \sigma_1^2 x}{\sigma_1\sqrt{\tilde{K}_2(y_0 - Y_1)(\tilde{K}_2(y_0 - Y_1) + \sigma_1^2)}}\right] \left. \right\} \\
&\times \left\{ \left[ |\tilde{K}_1|\sqrt{\frac{Y_2 - y_0}{\tilde{K}_2}} + \frac{x}{\sqrt{\tilde{K}_2(Y_2 - y_0)}} \right] - \right. \\
&-\exp\left(-\frac{2|\tilde{K}_1|x}{\tilde{K}_2}\right) \Phi\left[\frac{|\tilde{K}_1|\sqrt{\frac{Y_2 - y_0}{\tilde{K}_2}} - \frac{x}{\sqrt{\tilde{K}_2(Y_2 - y_0)}}}{\tilde{K}_2}\right] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Используя (36), (39), для условных смещения  $b(l_m | l_0)$  и рассеяния  $V(l_m | l_0)$  оценки  $l_m$  при произвольных  $|\Delta z|$  находим:

$$\begin{aligned}
b(l_m | l_0) &= P_0 b_0(l_m | l_0) + (1 - P_0) b_a(l_m | l_0) = \\
&= (1 - P_0) b_a(l_m | l_0); \\
V(l_m | l_0) &= P_0 V_0(l_m | l_0) + (1 - P_0) V_a(l_m | l_0),
\end{aligned} \tag{40}$$

где  $b_0(l_m | l_0)$ ,  $V_0(l_m | l_0)$ ,  $b_a(l_m | l_0)$ ,  $V_a(l_m | l_0)$  определяются из (32), (35). Точность формул (39) — (40) возрастает с увеличением  $\mu_{\min}$  (4),  $|\Delta z|$  (11) и  $m$  (20).

Найдем теперь характеристики оценок  $a_{1m}$ ,  $a_{2m}$  и  $d_m$  (29). В [10] показано, что асимптотически (с ростом ОСШ) точность максимально-правдоподобных оценок регулярных параметров (математического ожидания и величины спектральной плотности) не зависит от наличия неизвестного разрывного параметра (момента разладки). Это означает, что условные смещения и рассеяния ОМП  $a_{1m}$ ,  $a_{2m}$ ,  $d_m$  (29), при больших значениях  $|\Delta z|$  (11) асимптотически совпадают с условными смещениями и рассеяниями оценок математического ожидания и величины спектральной плотности случайного процесса  $\xi(t)$  с априори известным моментом

разладки. Тогда, полагая в (29)  $l_m = l_0$  и выполняя непосредственное усреднение по всем возможным реализациям наблюдаемых данных  $x(t)$  (3) при фиксированных значениях  $a_{01}$ ,  $a_{02}$ ,  $d_0$  с учетом (4) для характеристик оценок (29), находим:

$$\begin{aligned}
b_0(a_{1m} | a_{01}) &= \langle a_{1m} - a_{01} \rangle = 0; \\
V_0(a_{1m} | a_{01}) &= \langle (a_{1m} - a_{01})^2 \rangle = (N_0 + d_0) / 2\lambda_0; \\
b_0(a_{2m} | a_{02}) &= \langle a_{2m} - a_{02} \rangle = 0; \\
V_0(a_{2m} | a_{02}) &= \langle (a_{2m} - a_{02})^2 \rangle = (N_0 + d_0) / 2(T - \lambda_0); \\
b(d_m | d_0) &= \langle d_m - d_0 \rangle = -2\pi(N_0 + d_0) / T\Omega; \\
V(d_m | d_0) &= \langle (d_m - d_0)^2 \rangle = 4\pi(N_0 + d_0)^2 / T\Omega.
\end{aligned} \tag{41}$$

Точность формул (41) возрастает с увеличением  $\mu_{\min}$  и  $|\Delta z|$ .

## Результаты статистического моделирования

С целью установления границ применимости найденных асимптотически точных формул для характеристик обнаружения и оценки, используя методику, изложенную в [9], было выполнено статистическое моделирование алгоритмов (7), (29) на ЭВМ. Некоторые результаты статистического моделирования представлены на рис. 1 — 6, где показаны также соответствующие теоретические зависимости. Каждое экспериментальное значение получено при обработке не менее  $5 \cdot 10^4$  реализаций  $x(t)$ .

На рис. 1 приведена теоретическая зависимость (19) вероятности ложной тревоги  $\alpha(u)$ . Границы априорного интервала возможных значений параметра  $l_0$  (11) полагались равными  $\tilde{\Lambda}_1 = 0,1$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 = 0,9$ . Экспериментальные значения вероятности ложной тревоги  $\alpha(u)$  для  $\tilde{\Lambda}_1 = 0,1$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 = 0,9$  и  $\mu = 200, 500, 1000$  (29), обозначены квадратиками, крестиками, ромбиками.

На рис. 2 изображены теоретические зависимости вероятности пропуска сигнала  $\beta(\Delta z)$  (25), (26). Кривая 1 рассчитана в случае  $l_0 = 0,05$ ,  $\tilde{\Lambda}_1 = 0,025$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 = 0,975$ , 2 —  $l_0 = 0,125$ ,  $\tilde{\Lambda}_1 = 0,1$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 = 0,9$ , 3 —  $l_0 = 0,5$ ,  $\tilde{\Lambda}_1 = 0,1$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 = 0,9$ . Величина порога  $u$  определялась из (19) по критерию Неймана–Пирсона в соответствии с заданным уровнем вероятности ложной тревоги, равном 0,01. Соответствующие экспериментальные значения вероятности пропуска сигнала  $\beta$  обозначены квадратиками, крестиками и ромбиками.

На рис. 3 сплошными линиями нанесены зависимости условного рассеяния  $V_l(\Delta z) = V(l_m | l_0)$  (39), (41), а штриховой — рассеяния  $V_{0l}(\Delta z) = V_0(l_m | l_0)$  (32) нормированной оценки момента разладки  $l_m$  (29). Кривая 1 рассчитана для  $l_0 = 0,05$ ,  $\tilde{\Lambda}_1 = 0,04$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 = 0,96$ , 2 —  $l_0 = 0,125$ ,  $\tilde{\Lambda}_1 = 0,1$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 = 0,9$ , 3 —  $l_0 = 0,25$ ,  $\tilde{\Lambda}_1 = 0,1$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 = 0,9$ . Экспериментальные значения рассеяния

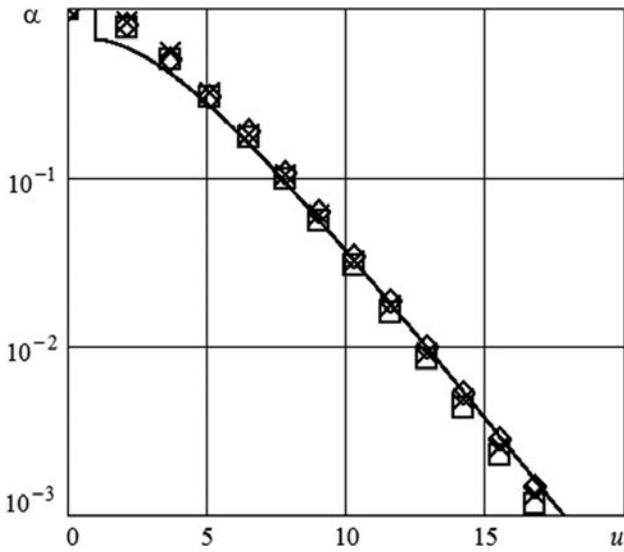


Рис. 1. Вероятность ложной тревоги

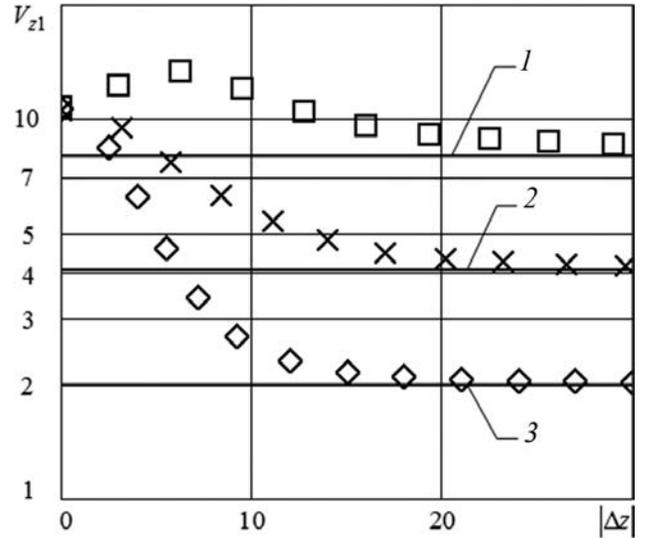


Рис. 4. Нормированное рассеяние оценки математического ожидания до разрядки

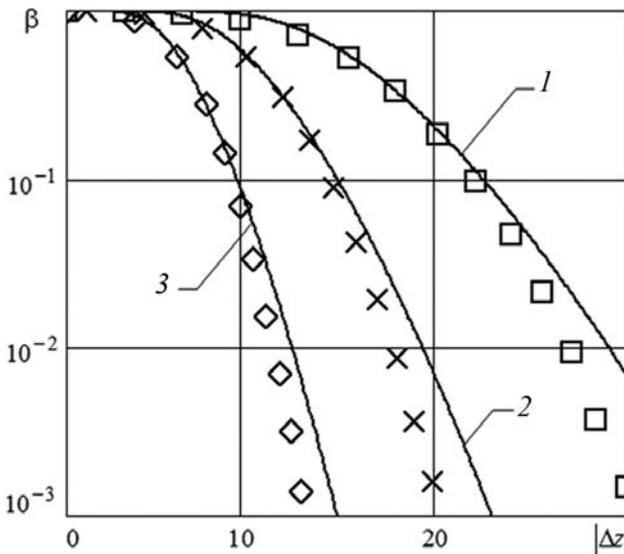


Рис. 2. Вероятность пропуска сигнала

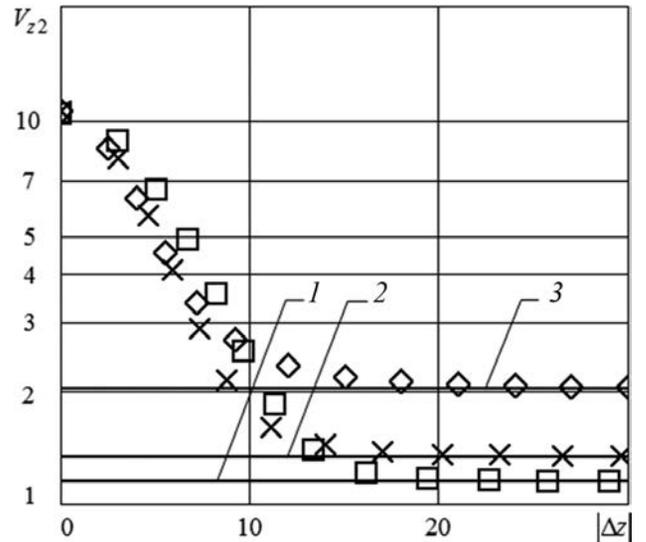


Рис. 5. Нормированное рассеяние оценки математического ожидания после разрядки

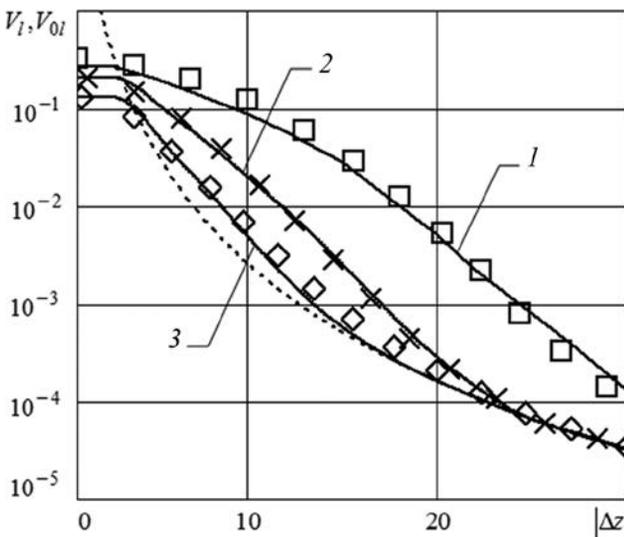


Рис. 3. Нормированное рассеяние оценки момента разрядки

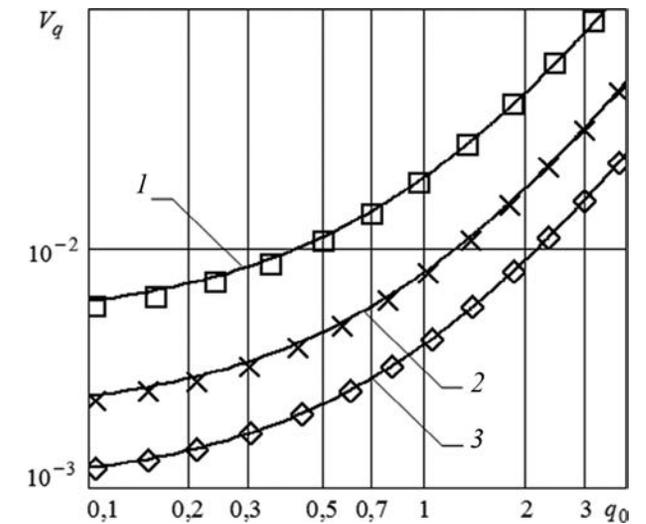


Рис. 6. Нормированное рассеяние величины спектральной плотности

оценки  $l_m$ , соответствующие кривым 1 — 3, обозначены квадратиками, крестиками и ромбиками.

На рис. 4, 5 приведены теоретические зависимости (42) нормированных условных рассеяний  $V_{z1} = 2TV(a_{1m}|a_0)/(N_0 + d_0)$ ,  $V_{z2} = 2TV(a_{2m}|a_0)/(N_0 + d_0)$  оценок  $a_{1m}$ ,  $a_{2m}$  (29). Кривые 1 соответствуют  $l_0 = 0,125$ , 2 — 0,25, 3 — 0,5. Экспериментальные значения рассеяний  $V_{z1}$ ,  $V_{z2}$ , найденные при  $\tilde{\Lambda}_1 = 0,1$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 = 0,9$  и  $l_0 = 0,125, 0,25, 0,5$  обозначены соответственно квадратиками, крестиками, ромбиками.

При нахождении экспериментальных значений вероятности пропуска сигнала  $\beta$  и рассеяний  $V_p$ ,  $V_{z1}$ ,  $V_{z2}$  в процессе моделирования для определенности принималось  $\mu = 1000$ ,  $q_0 = 1$ . Однако аналогичные зависимости наблюдаются в широком диапазоне значений параметров  $\mu$  и  $q_0$ , по крайней мере при  $\mu \geq 200$  и  $q_0 \geq 0$ .

На рис. 6 показаны теоретические зависимости нормированного условного рассеяния  $V_q(q_0) = V(d_m|d_0)/N_0^2$  оценки  $d_m$  (29). Кривая 1 рассчитана по формуле (42) при  $\mu = 200$ ,  $l_0 = 0,125$ , 2 —  $\mu = 500$ ,  $l_0 = 0,25$ , 3 —  $\mu = 1000$ ,  $l_0 = 0,5$ . Соответствующие экспериментальные значения рассеяния  $V_q$  обозначены квадратиками, крестиками и ромбиками. При моделировании полагалось  $\tilde{\Lambda}_1 = 0,1$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 = 0,9$ ,  $|\Delta z| = 3$ , однако аналогичные экспериментальные зависимости получаются при любых значениях  $|\Delta z| \geq 0$ .

Из проведенного анализа и рис. 1 — 6 следует, что теоретические зависимости для вероятностей  $\alpha$  (19),  $\beta$  (25), (26) и рассеяния  $V(l_m|l_0)$  (41) хорошо согласуются с экспериментальными данными уже при  $\mu \geq 200$ ,  $q_0 \geq 0$ ,  $\tilde{\Lambda}_1 \geq 0,04$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 \leq 0,96$  и  $|\Delta z| \geq 0$ . Если же при этом  $\tilde{\Lambda}_1 \geq 0,1$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 \leq 0,9$ , то, начиная с  $|\Delta z| \geq 10 \dots 20$ , для расчета рассеяния оценки момента разладки можно пользоваться более простой формулой (32). Формулы (42) для рассеяний оценок  $a_{1m}$ ,  $a_{2m}$  удовлетворительно аппроксимируют экспериментальные данные при  $\mu \geq 200$ ,  $q_0 \geq 0$ ,  $\tilde{\Lambda}_1 \geq 0,01$ ,  $\tilde{\Lambda}_2 \leq 0,9$  и  $|\Delta z| \geq 15 \dots 20$ , а для рассеяния оценки  $d_m$  — при  $\mu \geq 200$ ,  $q_0 \geq 0,1$ .

Дополнительные исследования показывают, что обнаружители и измерители, синтезированные на основе предложенного подхода, могут также использоваться для анализа скачкообразных изменений статистических характеристик негауссовских случайных процессов без заметных потерь в качестве функционирования.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-49-00079).

## Литература

1. Жиглявский А.А., Красковский А.Е. Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники. Л.: ЛГУ, 1988.
2. Клигене Н., Телькснис Л. Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов // Автоматика и телемеханика. 1983. Вып. 10. С. 5 — 56.
3. Basseville M., Nikiforov I.V. Detection of Abrupt Changes: Theory and Application, Prentice-Hall (NJ): Prentice-Hall, 1993.
4. Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: ВГУ, 1991.
5. Черноярков О.В., Сидорова Н.А. Оценка временного и энергетических параметров широкополосного случайного импульсного сигнала при наличии помехи с неизвестной интенсивностью // Вестник МЭИ. № 2. 2009. С. 124 — 138.
6. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986.
7. Chernoyarov O.V., Salnikova A.V., Kupriyanova Ya.A. Definition of probability characteristics of the absolute maximum of non-Gaussian random processes by example of Hoyt process // American J. Theoretical and Appl. Statist. 2013. V. 2. N 3. P. 54 — 60.
8. Chernoyarov O.V., Salnikova A.V., Rozanov A.E., Marcokova M. Statistical characteristics of the magnitude and location of the greatest maximum of markov random process with piecewise constant drift and diffusion coefficients // Appl. Math. Sci. 2014. V. 8. N 147. P. 7341 — 7357.
9. Chernoyarov O.V. et al. Application of the local markov approximation method for the analysis of information processes processing algorithms with unknown discontinuous parameters // Appl. Math. Sci. 2014. V. 8. N 90. P. 4469 — 4496.
10. Трифонов А.П., Бутейко В.К. Характеристики совместных оценок параметров сигнала при частичном нарушении условий регулярности // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. №2. С. 319 — 327.

Статья поступила в редакцию 31.03.2016